

Clase 1: Introducción a Redes Complejas

Mario Cosenza

Mecánica Estadística Avanzada:

Modelos discretos en Sistemas Complejos



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea



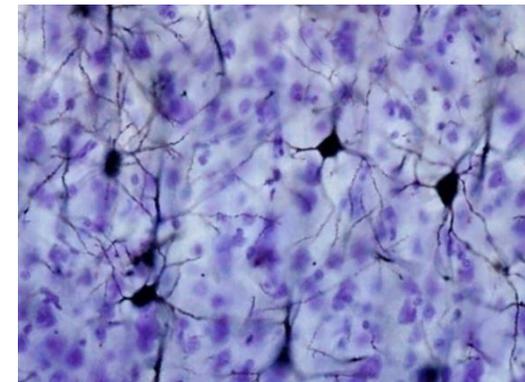
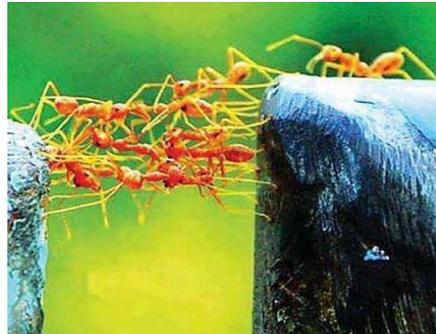


Sistemas Complejos

Sistema complejo: conjunto de elementos interactivos cuyo comportamiento colectivo (estructuras, funcionalidad, organización) no puede ser descrito a partir del comportamiento de los elementos aislados; **emerge** de sus interacciones → **No linealidad.**

Comportamientos colectivos comunes: sincronización (coherencia), formación de patrones, auto-organización, adaptación, transición orden-desorden, red de conectividad → **Universalidad.**

Ejemplos: osciladores no lineales acoplados, colonias de insectos, cardúmenes, tráfico, sistemas ecológicos, sistemas fisiológicos, clima, economía, sistemas sociales, cerebro. → **Interdisciplinariedad.**

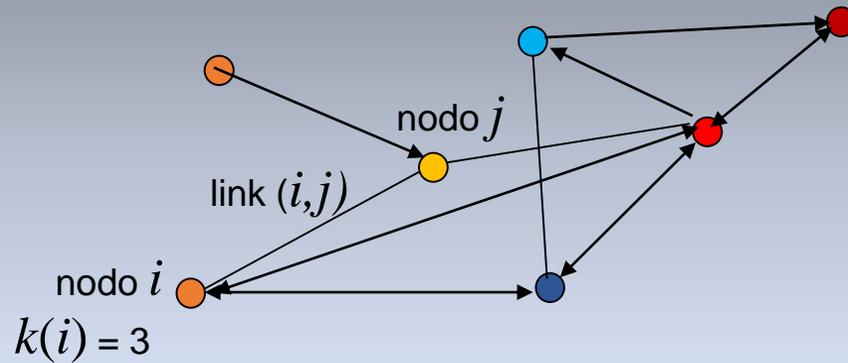




Redes: la estructura de sistemas complejos

Sistemas complejos: elementos dinámicos (nodos) + interacciones (conexiones, enlaces, links).

Red



$i = 1, 2, \dots, N$ (tamaño del sistema)

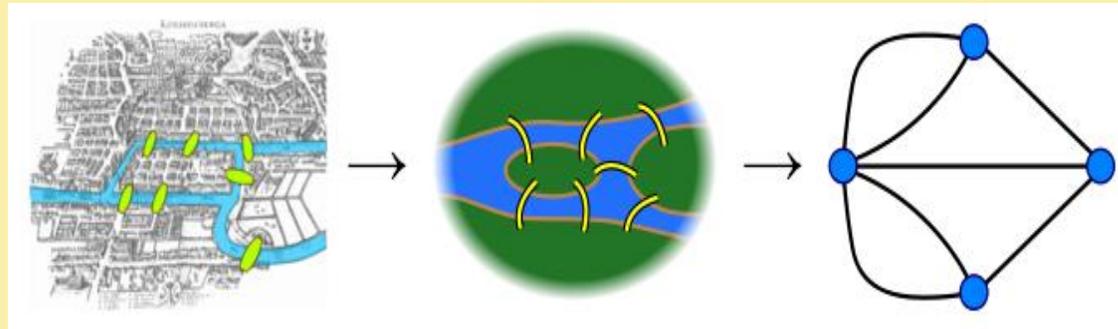
$k(i)$ = número de conexiones o *grado* del nodo i

$x_i(t)$ = *variable de estado de nodo i en tiempo t*
(estados y/o tiempo pueden ser continuos o discretos)

Breve historia: Teoría de Grafos

Puentes de Königsberg (Leonard Euler, 1736)

¿Existe un camino que cruce todos los puentes sin repetir ninguno?



No existe solución si hay mas de 2 nodos con $k(i)$ impar. **No aquí!**



Conceptos generales de redes

Sea $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ un conjunto finito, llamado conjunto de nodos o vértices.

Sea $E \subseteq V \otimes V$ un conjunto de pares (no necesariamente distintos) formado con los elementos de V , llamado conjunto de links, enlaces.

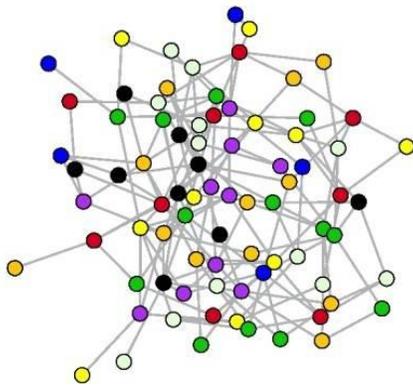
E es simétrico si $(v_i, v_j) \in E \leftrightarrow (v_j, v_i) \in E$.

Un grafo o una red G es un par (V, E) .

- Si E es simétrico, G es una red no dirigida.
- Si E no es simétrico, G es una red dirigida.
- Si $(v_i, v_i) \in E$, G es una red reflexiva.

Paul Erdős (1960's):

Propiedades estadísticas de redes aleatorias.



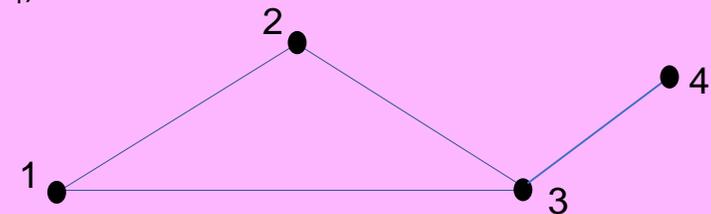
Grado promedio:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k(i)$$

Ejemplo: $V = \{1,2,3,4\}$

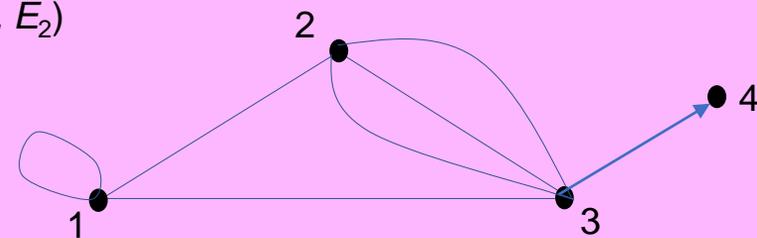
$$E_1 = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,3)\}$$

$G = (V, E_1)$



$$E_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (2,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,2), (3,2), (3,4)\}$$

$G = (V, E_2)$

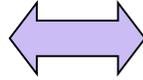
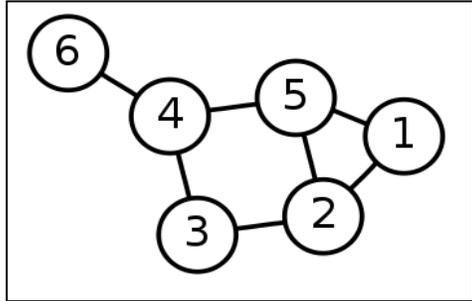




Conjunto de vecinos

matriz de adyacencia

tabla de vecinos



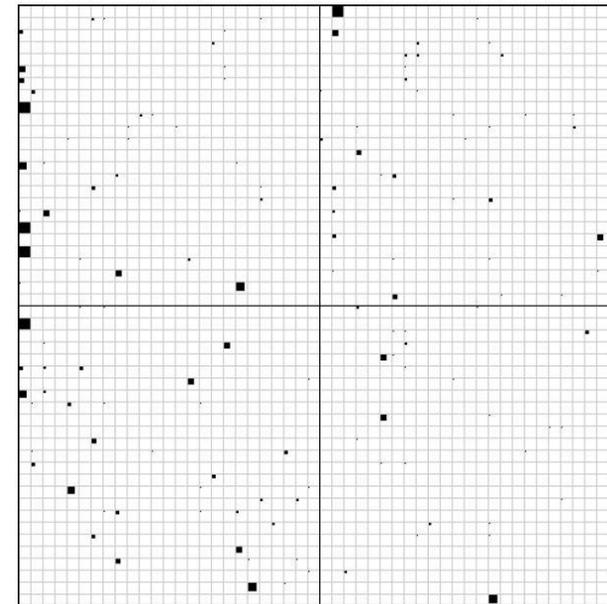
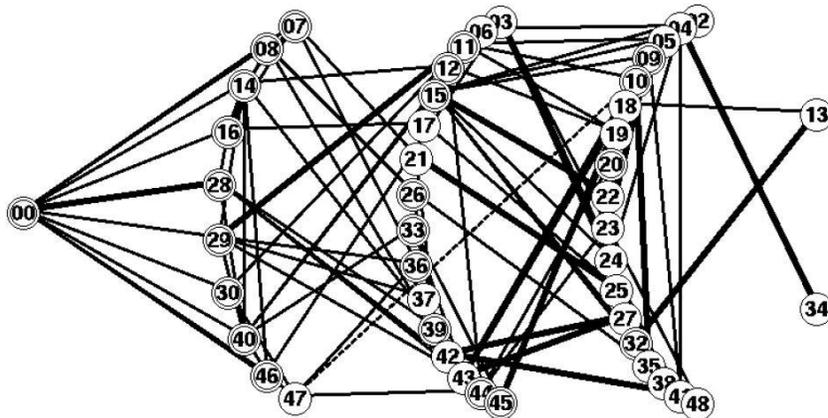
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


i $v_i = \text{conjunto de vecinos de } i$

1	2, 5
2	1, 3, 5
3	2, 4
4	3, 5, 6
5	1, 2, 4
6	4

En general, “peso” del acoplamiento i,j : $M_{ij} \in [0,1]$

Ejemplo: redes neuronales

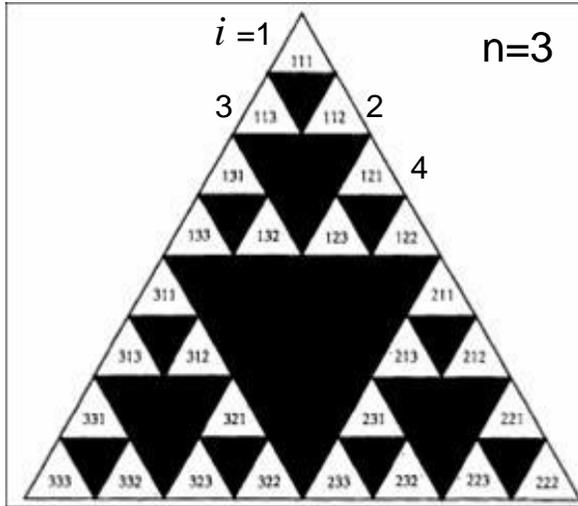
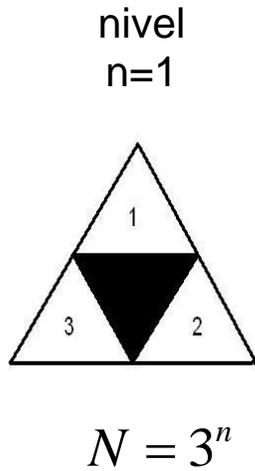


50 × 50



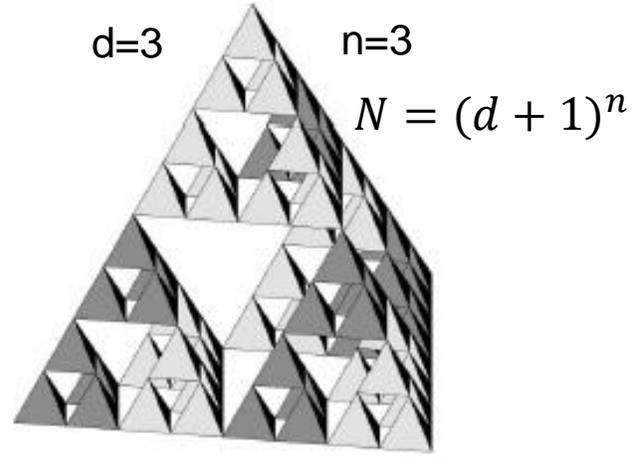
Redes fractales

Triángulo de Sierpinski



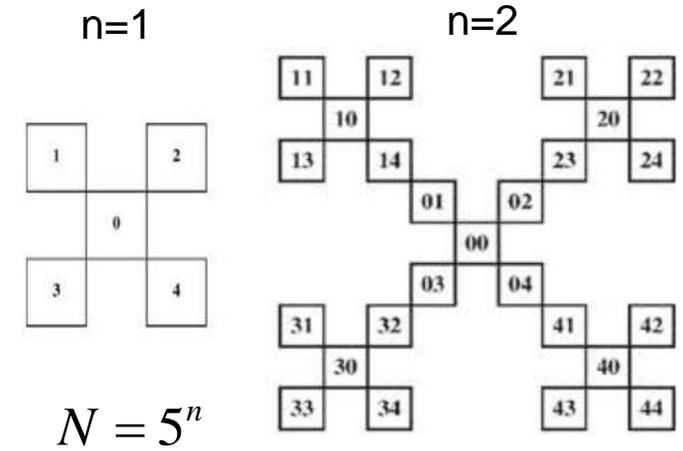
M.G. Cosenza, R. Kapral, Phys Rev A **46**,1850 (1992)

Sierpinski en d-dimensiones



K. Tucci, M.G. Cosenza, O. Alvarez, Phys Rev E **68**, 02702 (2003)

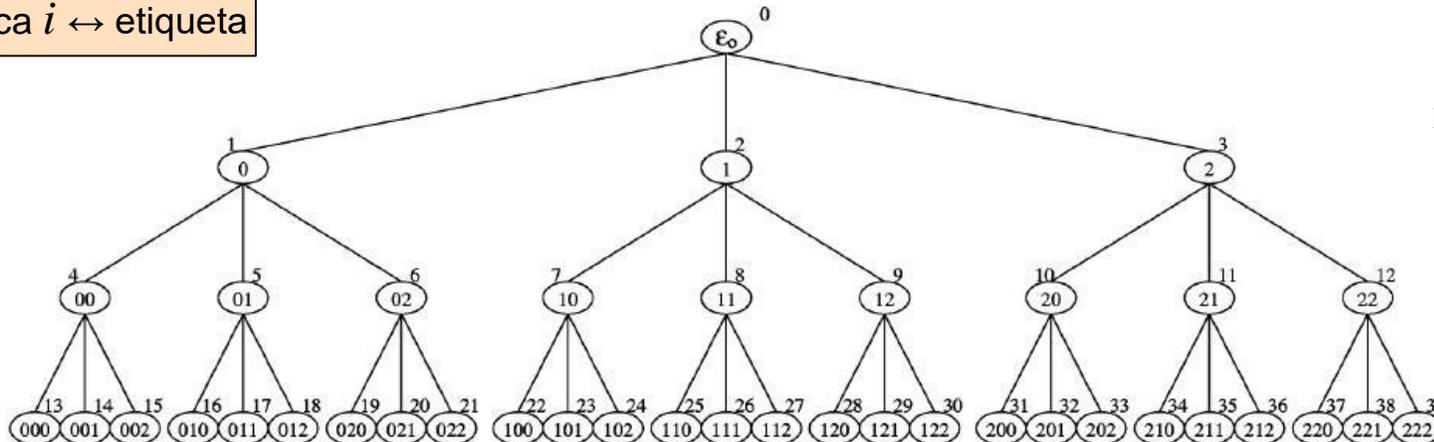
Crecimiento fractal (dendritas)



K. Tucci, M.G. Cosenza, Physica D **199**, 91 (2004)

Red jerárquica (árbol)

Relacion unívoca $i \leftrightarrow$ etiqueta



M.G. Cosenza, K. Tucci, Phys.Rev. E **64**, 026208 (2001).

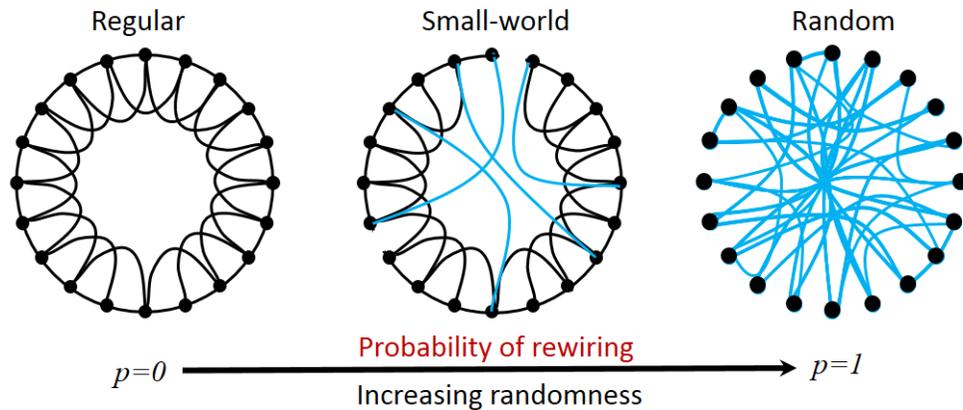


Redes de pequeño mundo: el boom

Small World Networks, D. J. Watts, S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998).

[46320 citas Google Scholar]

Muchas redes naturales y artificiales poseen pequeño número de links ($\ll N$) entre 2 nodos cualesquiera, en promedio.



L = longitud característica:
promedio de número de links entre 2 nodos.

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij}$$

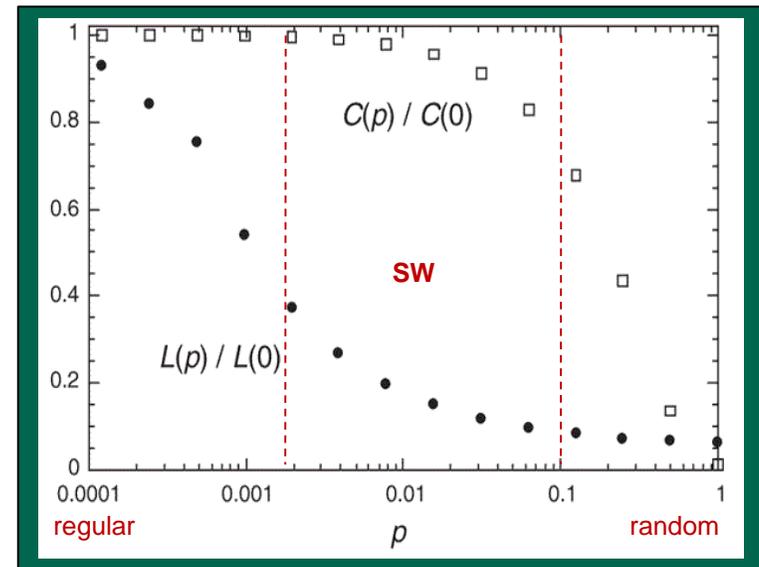
C = coeficiente de clustering: fracción promedio de vecinos que son vecinos entre sí.

$$C(i) = \frac{\# \text{ triángulos que contienen al nodo } i}{\# \text{ total de triángulos posibles con nodo } i}$$

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c(i)$$

Red pequeño mundo: L pequeño ($L \ll N$), C grande.

Redes de pequeño mundo: *existen entre el orden y el desorden; poseen conexiones de largo alcance.*





El efecto pequeño mundo



Distancia promedio entre cualesquiera dos nodos \ll tamaño del sistema

S. Milgram (1969): 296 personas

Nebraska \rightarrow Boston

SEIS GRADOS de separación Muchos repetían conocidos.

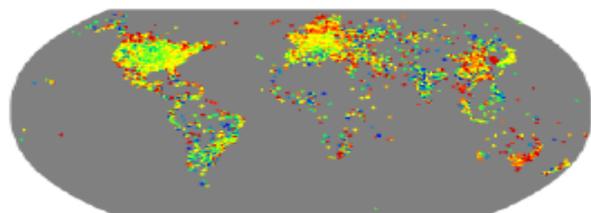


Figure 7: Number of users at a particular geographic location. Color of dots represents the number of users.

J. Leskovec, E. Horvitz, Transactions on Computational Social Systems IEEE 1, 156 (2014).

240 Millones personas,
30.000 millones conversaciones MSN Microsoft
Distancia media: **6,6 GRADOS**

Degrees of Separation on Facebook

2008



5.28 hops

2011



4.74 hops

L. Backstrom, P. Boldi, M. Rosa, J. Ugander, S. Vigna,
Proceedings of the 4th ACM Web Science Conference, p.33–42 (2012).

721 millones usuarios

69 billiones links

$L=4,74$

¡El mundo es pequeño!



Redes sociales reales: redes de pequeño mundo

Red de contactos sexuales:

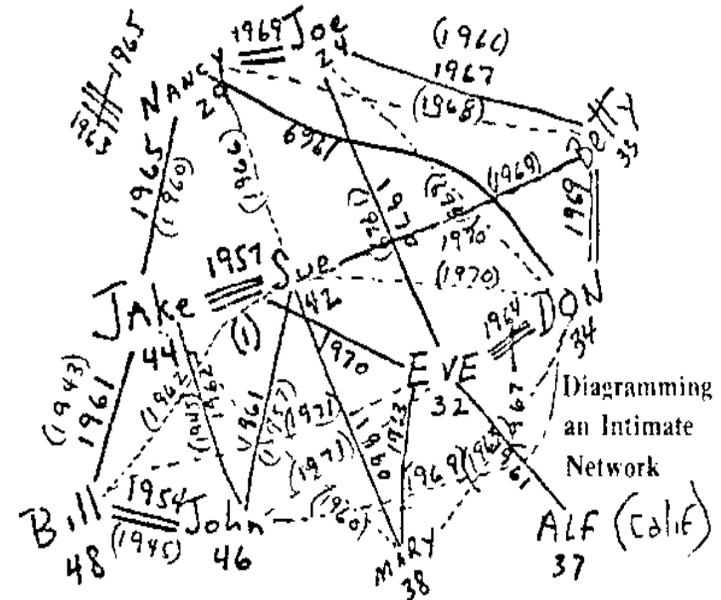
The Web of Human Sexual Contact.

F. Lijeros, C. Edling, L. Amaral, H. Stanley, Y. Aberg,
Nature **411**, 907 (2001).

$N = 2810$ (age 18-74), $L = 6$

Tema literario:

Javier Marías, *Mañana en la batalla piensa en mí.*



Red de colaboraciones científicas:

The Erdős Number Project:

<http://www.oakland.edu/enp/>

$N = 600.000$ autores, $L \approx 6$

Número de Erdős de Mario Cosenza = 4

- P. Erdős, M. Kac, *Amer. J. Math.* **62**, 738 (1940).
- B. Gaveau, T. Jacobson, M. Kac, L. Schulman, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 419 (1984).
- B. Gaveau, J. T. Hynes, R. Kapral, M. J. Moreau, *J. Stat. Phys.* **56**, 879 (1989).
- M. G. Cosenza, R. Kapral, *Phys. Rev. A* **46**, 1850 (1992).

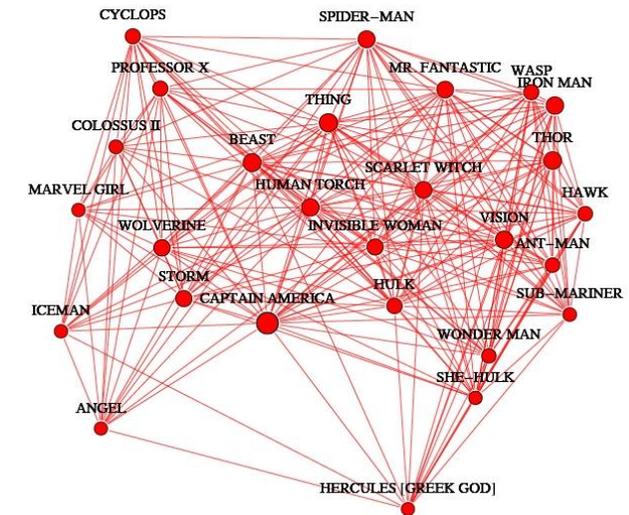


Ejemplos de redes de pequeño mundo

Efecto pequeño mundo es común en muchos sistemas: colaboradores (co-autores científicos, actores de cine, deportes), redes distribución eléctrica, neuronas *C. Elegans*, sinónimos, internet, redes metabólicas, redes sociales reales y virtuales, contactos sexuales.

Network	Size	$\langle k \rangle$	ℓ	ℓ_{rand}	C	C_{rand}	Reference	Nr.
WWW, site level, undir.	153 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic, 1999	1
Internet, domain level	3015–6209	3.52–4.11	3.7–3.76	6.36–6.18	0.18–0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> , 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> , 2001	2
Movie actors	225 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts and Strogatz, 1998	3
LANL co-authorship	52 909	9.7	5.9	4.79	0.43	1.8×10^{-4}	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	4
MEDLINE co-authorship	1 520 251	18.1	4.6	4.91	0.066	1.1×10^{-5}	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	5
SPIRES co-authorship	56 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	6
NCSTRL co-authorship	11 994	3.59	9.7	7.34	0.496	3×10^{-4}	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	7
Math. co-authorship	70 975	3.9	9.5	8.2	0.59	5.4×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> , 2001	8
Neurosci. co-authorship	209 293	11.5	6	5.01	0.76	5.5×10^{-5}	Barabási <i>et al.</i> , 2001	9
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner and Fell, 2000	10
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner and Fell, 2000	11
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya and Solé, 2000	12
Silwood Park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya and Solé, 2000	13
Words, co-occurrence	460.902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Ferrer i Cancho and Solé, 2001	14
Words, synonyms	22 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> , 2001b	15
Power grid	4941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts and Strogatz, 1998	16
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts and Strogatz, 1998	17

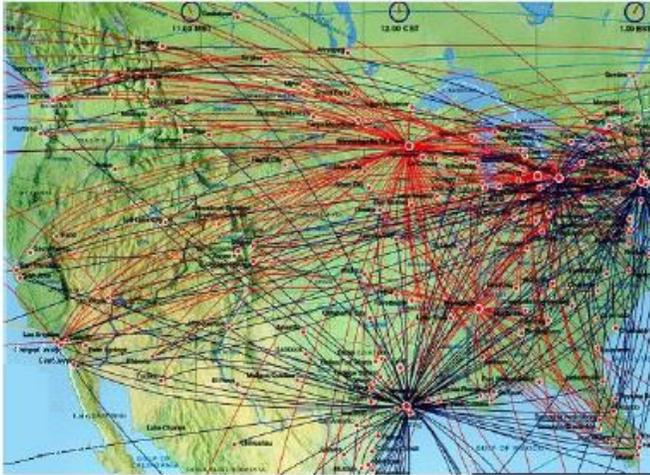
Red de Superhéroes coprotagonistas de Marvel (139)



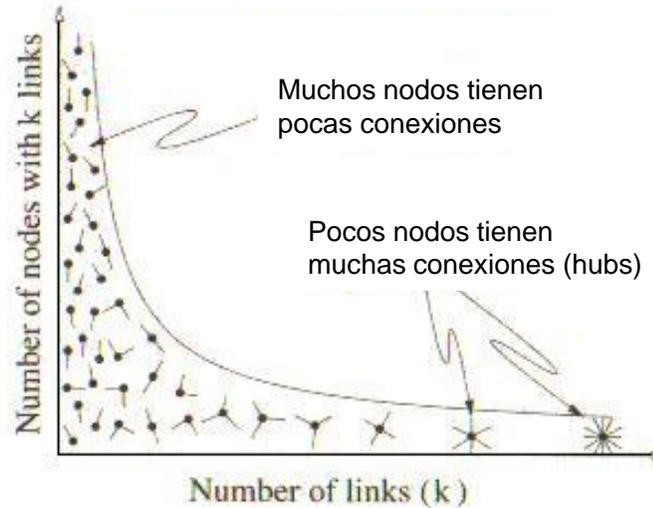


Redes libres de escala

Rutas aéreas

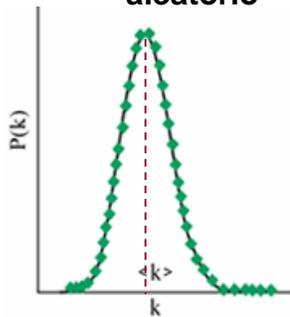


Distribución de links

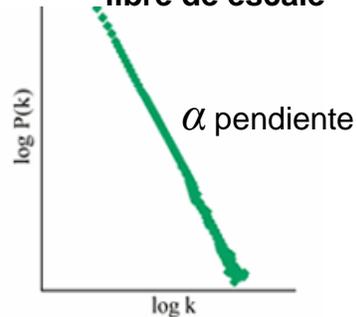


A. Barabasi, R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).

aleatorio



libre de escala

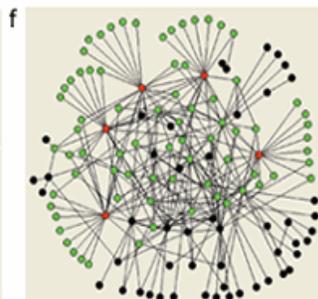
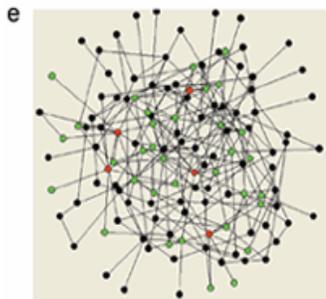


Distribución de probabilidad de links es una ley de potencia:

$$P(k) \propto k^{-\alpha}$$

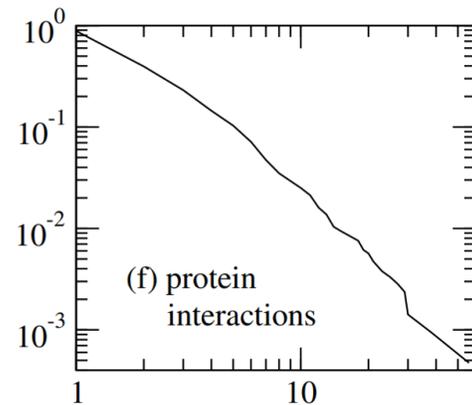
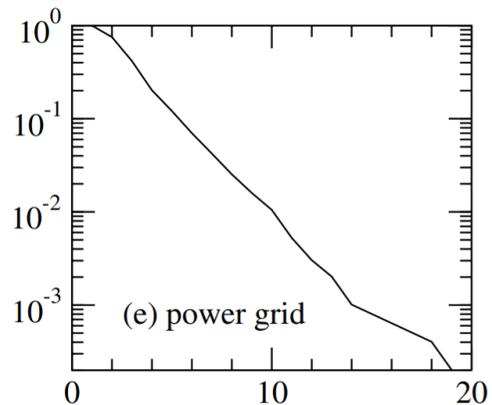
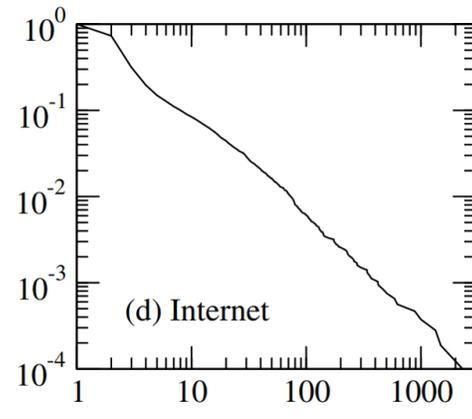
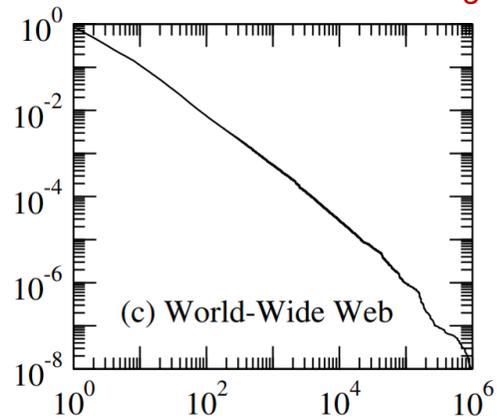
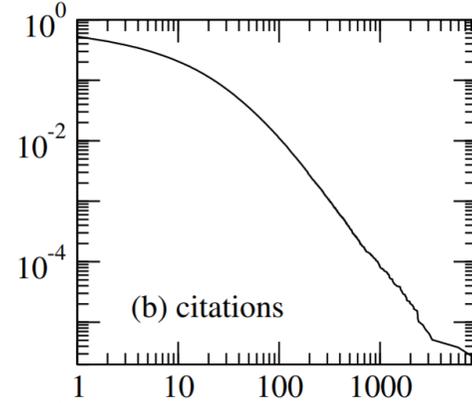
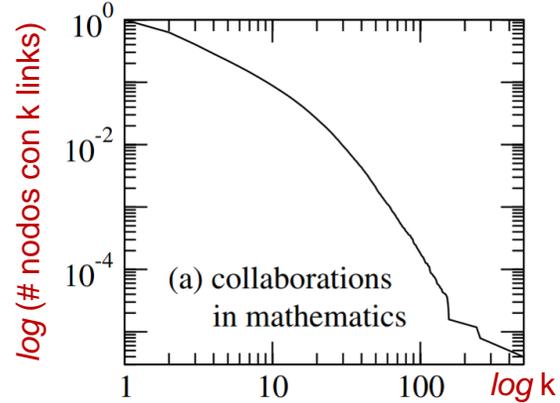
No existe escala característica (valor medio) de k :
eventos ocurren en todas las escalas.

Mecanismo de formación: conexión preferencial,
Nuevos nodos prefieren nodos con más conexiones.





Ejemplos de redes libres de escala

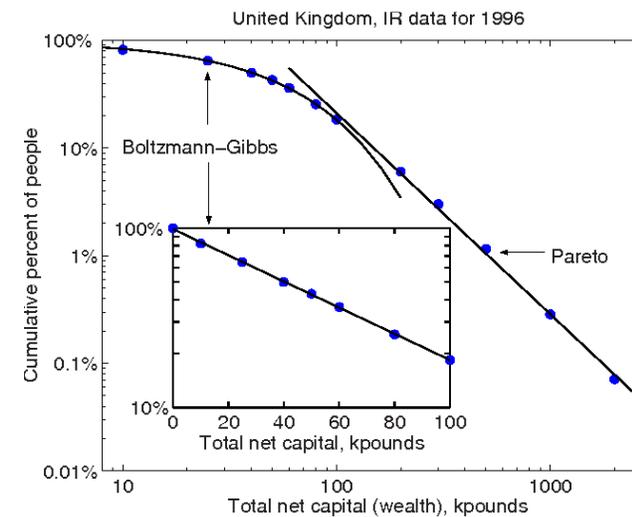


Ejemplos:

www, rutas de tráfico, interacciones de proteínas, citas, amigos Facebook, frecuencia de palabras en textos, llamadas telefónicas, redes eléctricas, terremotos, distribución de recursos, riqueza (Ley de Pareto en economía).

$$P(k) \propto k^{-\alpha}$$

$$2 < \alpha < 3$$



Ley de Pareto



Redes de comunidades (modulares)

Comunidades (módulos): subconjuntos de nodos altamente conectados, con pocas conexiones entre subconjuntos distintos.

Estructura modular o de comunidades en una red se puede caracterizar mediante una medida de modularidad.

Ejemplos:

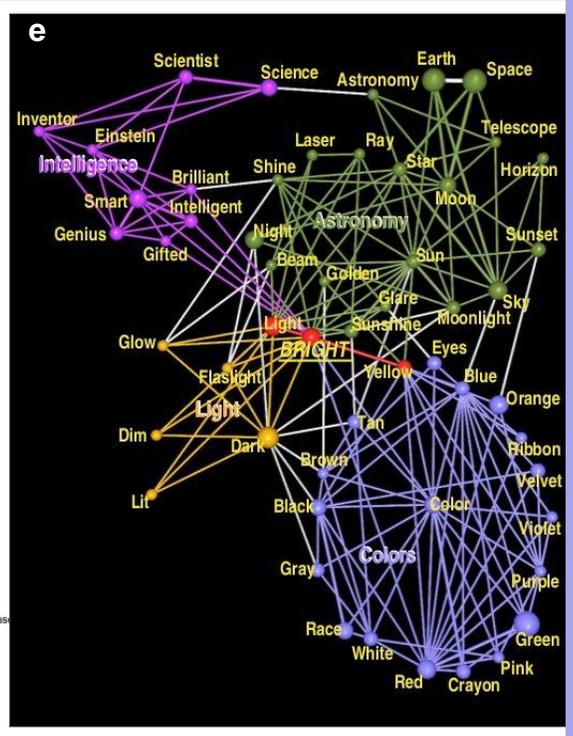
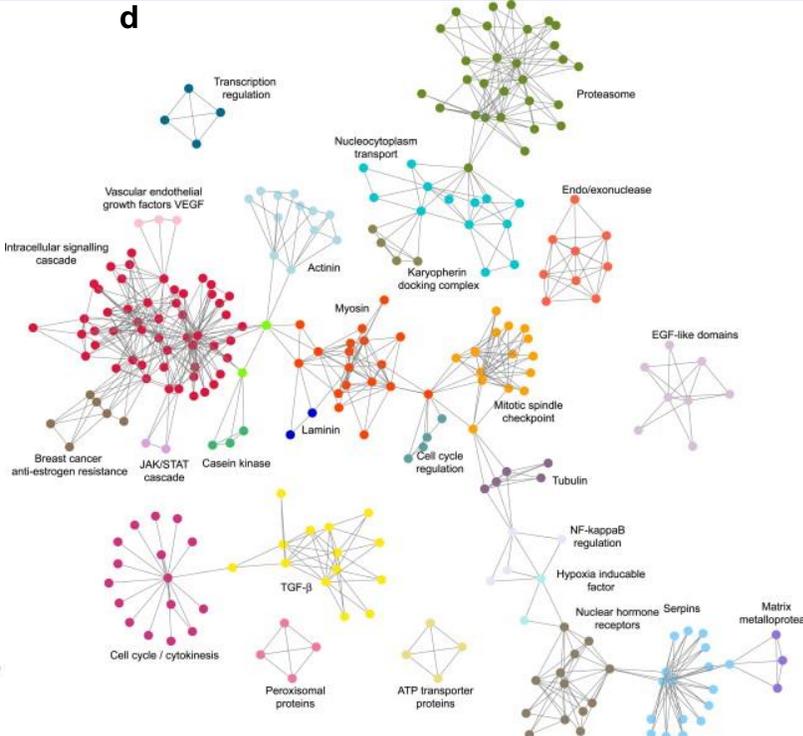
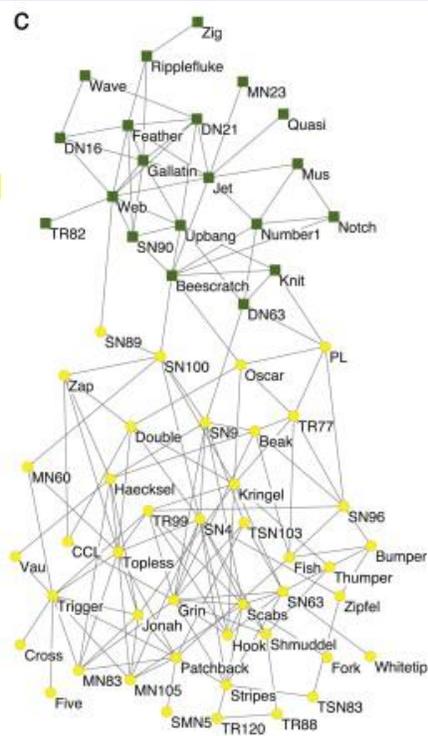
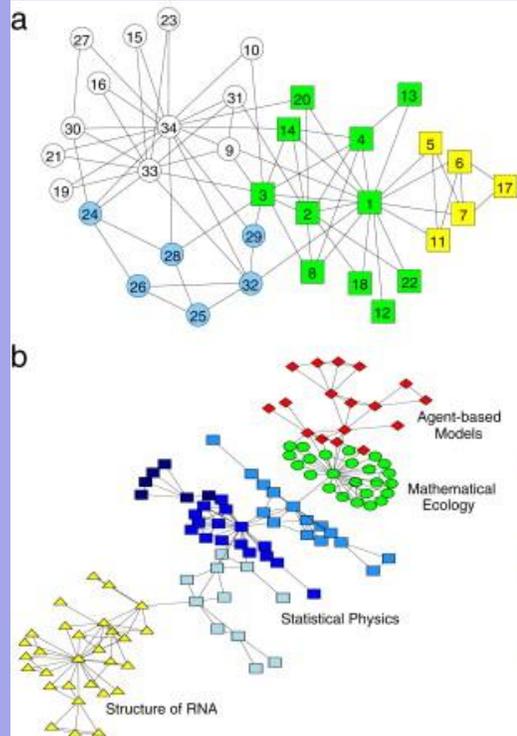
a) Amigos in un club de karate.

b) Colaboraciones en el Instituto Santa Fe.

c) Manada de delfines.

d) Interacciones proteína-proteína.

e) Palabras relacionadas con “bright”.



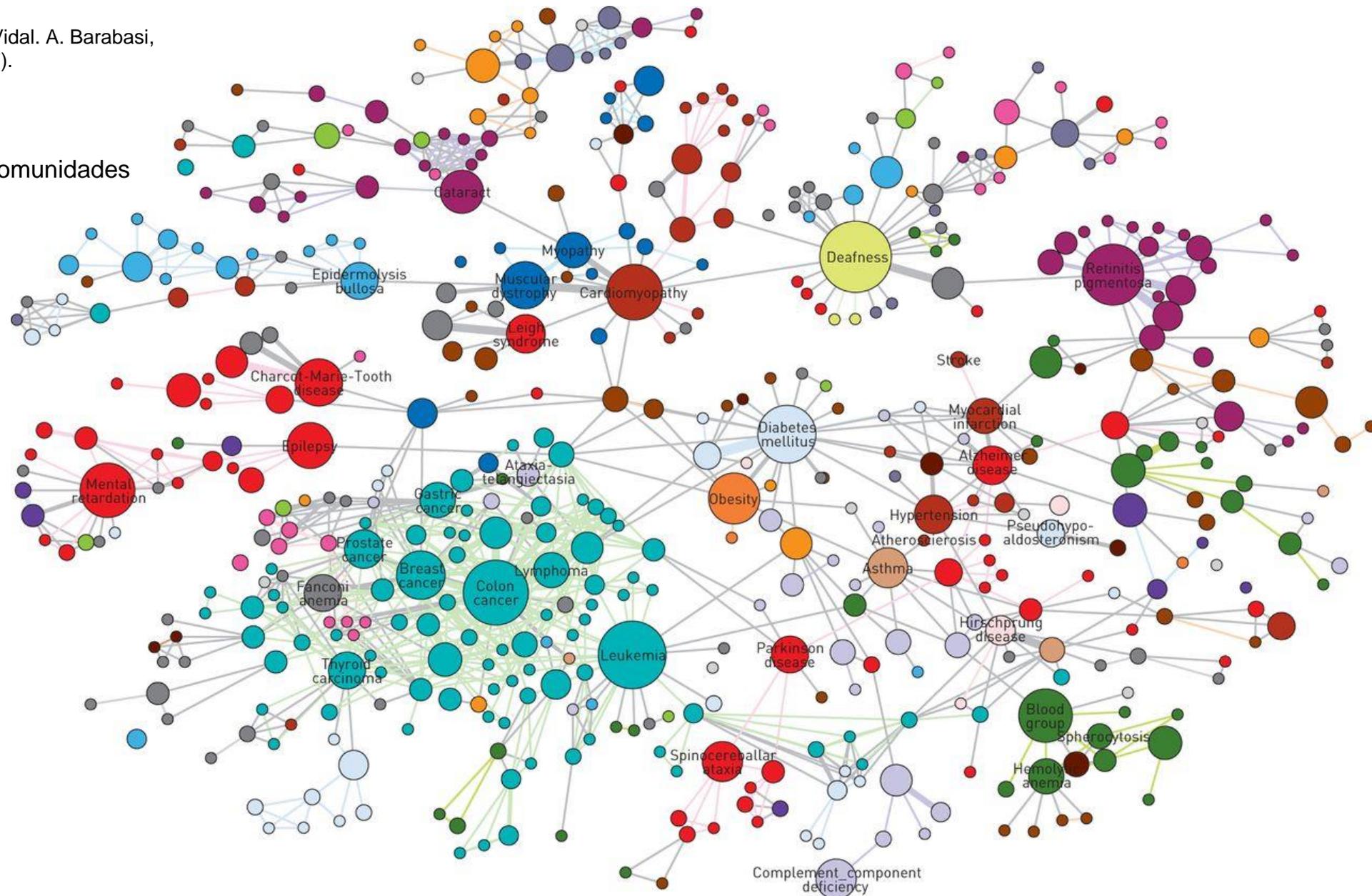


Red de enfermedades humanas

K. Goh, M. Cusick, D. Valle, B. Childs, M. Vidal, A. Barabasi,
Proc. Natl. Acad. Sci. USA 104, 8685 (2007).

pequeño mundo + libre de escala + comunidades

- Bone
- Cancer
- Cardiovascular
- Connective tissue
- Dermatological
- Developmental
- Ear, Nose, Throat
- Endocrine
- Gastrointestinal
- Hematological
- Immunological
- Metabolic
- Muscular
- Neurological
- Nutritional
- Ophthalmological
- Psychiatric
- Renal
- Respiratory
- Skeletal
- multiple
- Unclassified

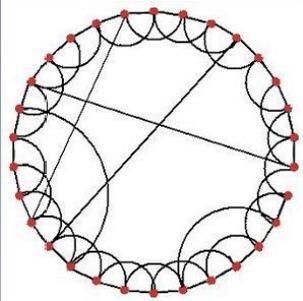




Resumen

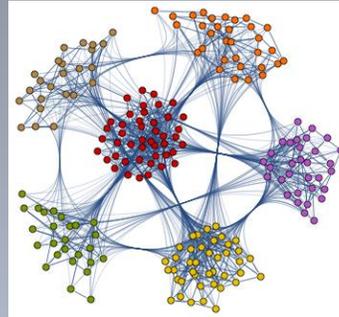
Redes Complejas: estructuras características en sistemas complejos de diversos contextos.

Pequeño mundo



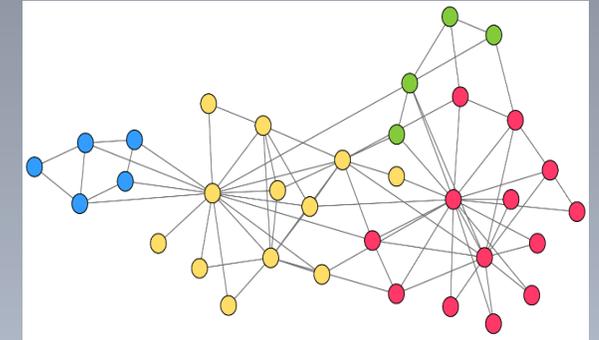
Distancia media entre nodos $\ll N$
clustering alto, entre ordenada y aleatoria

Libre de escala



Distribución de links: $P(k) \sim k^{-\alpha}$
Pocos nodos con muchos links, muchos nodos con pocos links

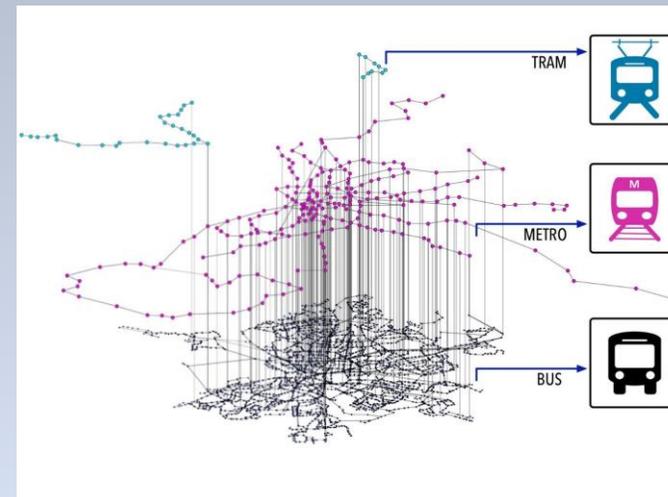
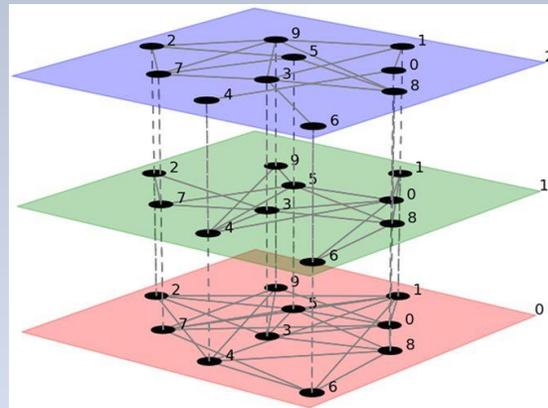
Comunidades



Subgrupos con muchos links internos,
pocos links entre distintos subgrupos

Multicapas

Diferentes redes coexistentes





<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.