

Clase 6: Estados quiméricos y clusters en sistemas dinámicos

Mario Cosenza

Mecánica Estadística Avanzada:

Modelos Discretos en Sistemas Complejos



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Quimeras



- ❖ **Mitología:** criatura fantástica, híbrida, compuesta de partes de varios animales (león, cabra, serpiente).

- ❖ **Biología o genética:** organismo que posee líneas celulares (zigotos) de orígenes distintos.



- ❖ **Sistemas dinámicos espaciotemporales:** estado colectivo caracterizado por la coexistencia de una región sincronizada o coherente, con otra región desincronizada o incoherente.

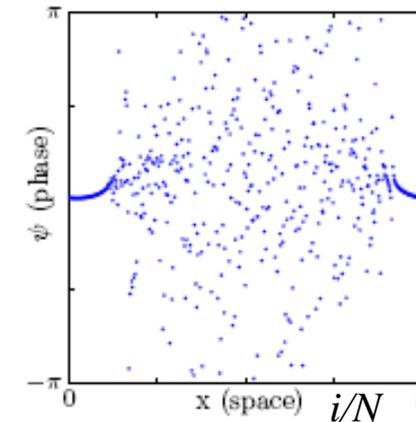
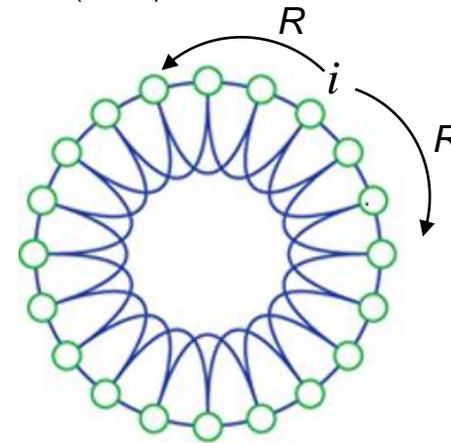


Estados quiméricos

➤ D. Abrams, S. H. Strogatz, *Chimera states for coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett. **93**, 174102 (2004).

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = \omega - \frac{k}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} \sin[\psi_i(t) - \psi_j(t) + \gamma]$$

$i = 1, \dots, N$ (anillo, conexiones rango R)



estados
instantaneos

Estado quimérico en sistema S : $S = \alpha \cup \beta$

α sincronizado:

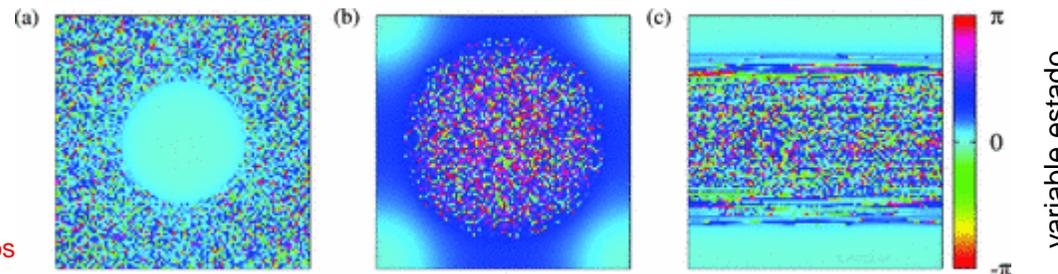
β desincronizado:

$$\psi_i(t) = \psi_j(t), \quad i, j \in \alpha \quad \psi_i(t) \neq \psi_j(t), \quad i, j \in \beta$$

➤ O. Omelchenko et al, Phys. Rev. E **85**, 036210 (2012).

Quimeras en 2 dimensiones
(condiciones frontera periódicas)

estados
instantaneos



Antes:

➤ Y. Kuramoto, D. Battogtokh, *Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators*, Nonlin. Phen. Complex Sys. **4**, 380 (2002).



Estados quiméricos en dos poblaciones de osciladores acopladas

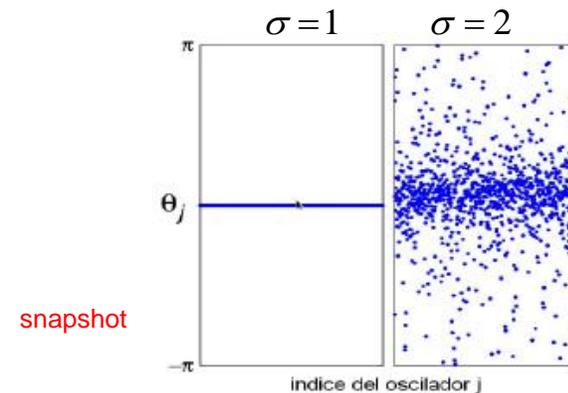
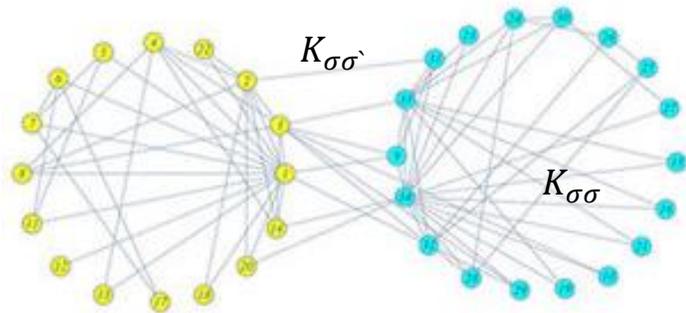
➤ D. Abrams, R. Mirollo, S. H. Strogatz, D. Wiley, Phys. Rev. Lett. **101**, 084103 (2008) .

2 poblaciones de osciladores: $\sigma = 1, 2$ $N_\sigma =$ tamaño de población σ

$$\frac{d\theta_i^\sigma(t)}{dt} = \omega + \sum_{\sigma'=1}^2 \frac{K_{\sigma\sigma'}}{N_{\sigma'}} \sum_{j=1}^{N_{\sigma'}} \sin[\theta_j^{\sigma'} - \theta_i^\sigma + \gamma]$$

$K_{\sigma\sigma} =$ acoplamiento entre elementos dentro de una población.

$K_{\sigma\sigma'} =$ acoplamiento entre elementos de distintas poblaciones.



Estados quiméricos ocurren con interacciones locales y de largo alcance. Estado de rompimiento espontáneo de simetría de sincronización.

➤ Actualmente, mucho interés en quimeras: redes, espacio continuo, sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales.



Experimento: estados quiméricos en 2 poblaciones de osciladores químicos acopladas

➤ M. R. Tinsley, S. Nkomo, K. Showalter, Nature Phys. **8**, 658 (2012).

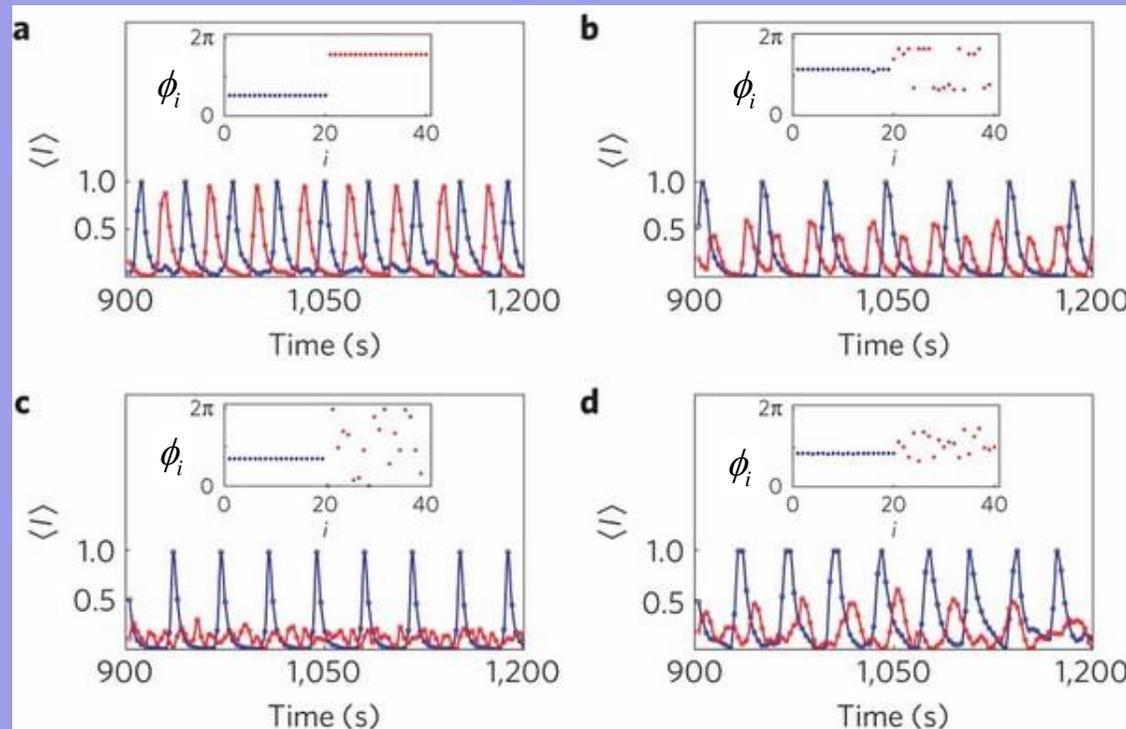
2 poblaciones de osciladores químicos BZ fotosensibles
(2 recipientes, cada uno con 20 esferas cubiertas inmersas en un fluido).

P_i^σ : intensidad de la luz retroalimentada de i
en población σ

I_σ : intensidad media de población σ

$k_\sigma, k_{\sigma\sigma'}$: intra- inter-intensidad de acoplamiento
de osciladores

$$P_i^\sigma = P_0 + k_\sigma P_{\max} (\hat{I}_\sigma(t - \tau) - I_i(t)) \\ + k_{\sigma\sigma'} P_{\max} (\hat{I}_{\sigma'}(t - \tau) - I_i(t))$$



$\langle I \rangle$ = intensidad media
normalizada de cada
población

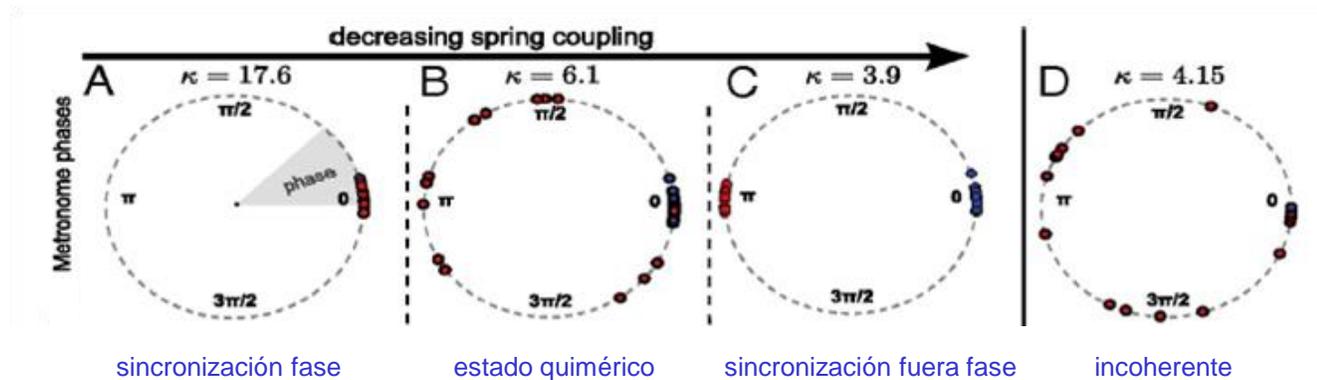
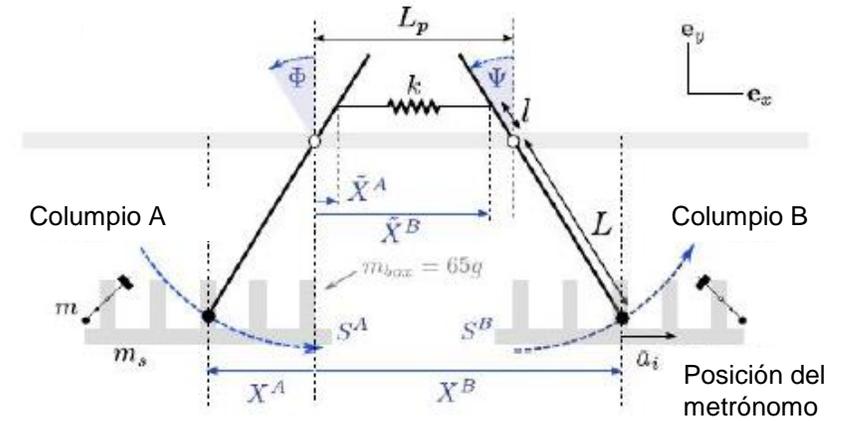
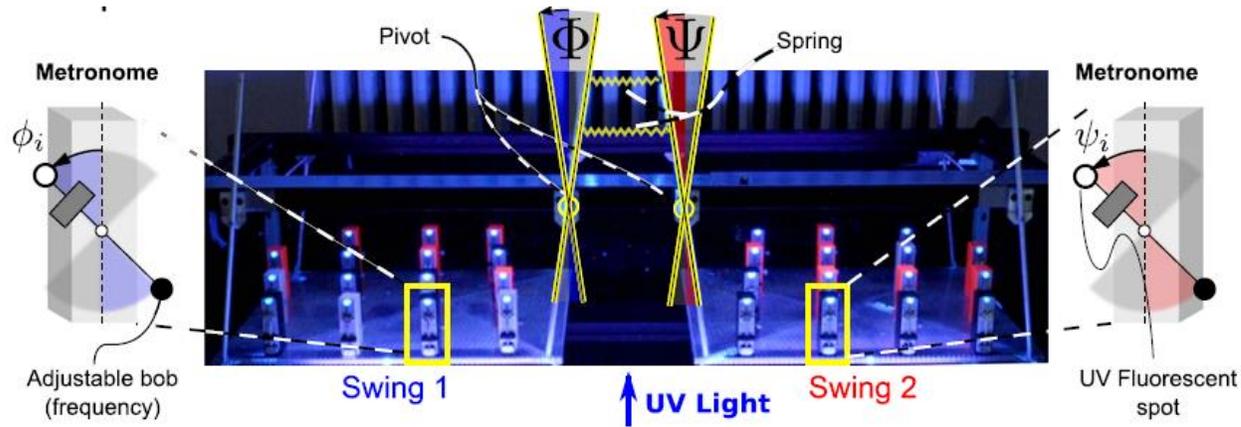
Estados quiméricos



Estados quiméricos en osciladores mecánicos

➤ E. A. Martens, S. Thutupalli, A. Fourriere, O. Hallatschek, Proc. Nat. Acad. Sci. **110**, 10563 (2013).

2 poblaciones de metrónomos globalmente acoplados.





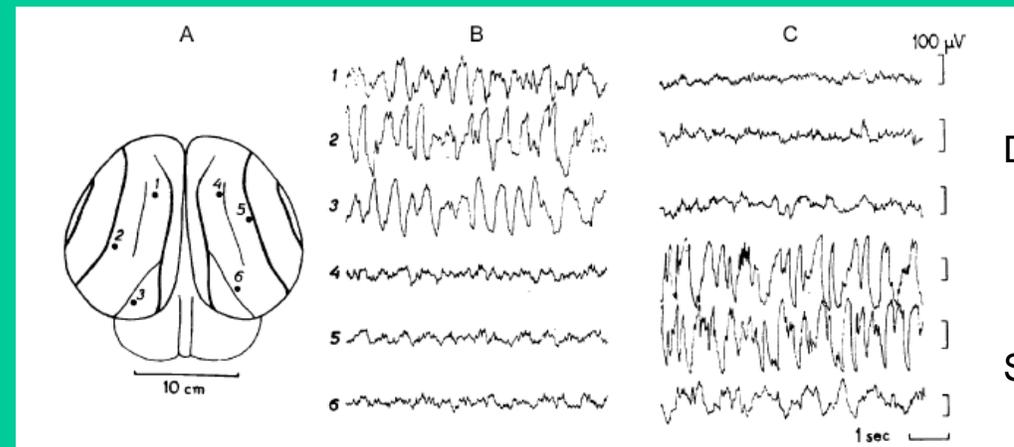
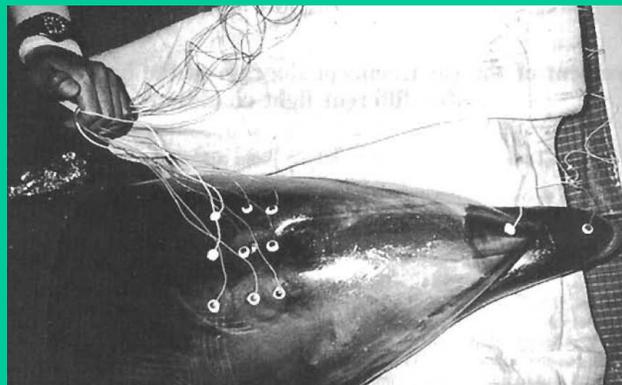
Sueño unihemisférico

- ❖ En mamíferos y aves, el sueño se asocia a dos estados fisiológicos del cerebro reflejados en un EEG: REM y ondas lentas.
- ❖ En el sueño unihemisférico se observan ondas lentas sincronizadas en un hemisferio cerebral, asociadas al sueño, y actividad desincronizada asociada a la vigilia, en el otro.
- ❖ Ventaja evolutiva: vigilancia por depredadores, sueño durante migraciones, control de respiración (cetáceos).



➤ N. C. Rattenborg, C. J. Almaner, *J. Neuro. Behiv. Rev.* **24**, 817 (2000).

Sueño unihemisférico en delfines.



- ❖ Sueño unihemisférico ha sido relacionado con estado quimérico modelos de 2 poblaciones acopladas de neuronas.

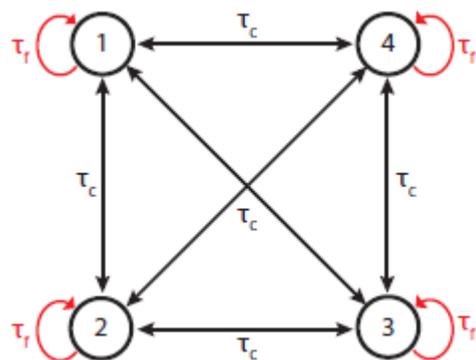


Quimeras y clusters en lasers globalmente acoplados

➤ JD Hart, K Bansal, TE Murphy, R. Roy, Chaos **26**, 094801 (2016).

Red mínima de 4 opto-osciladores electrónicos globalmente acoplados.

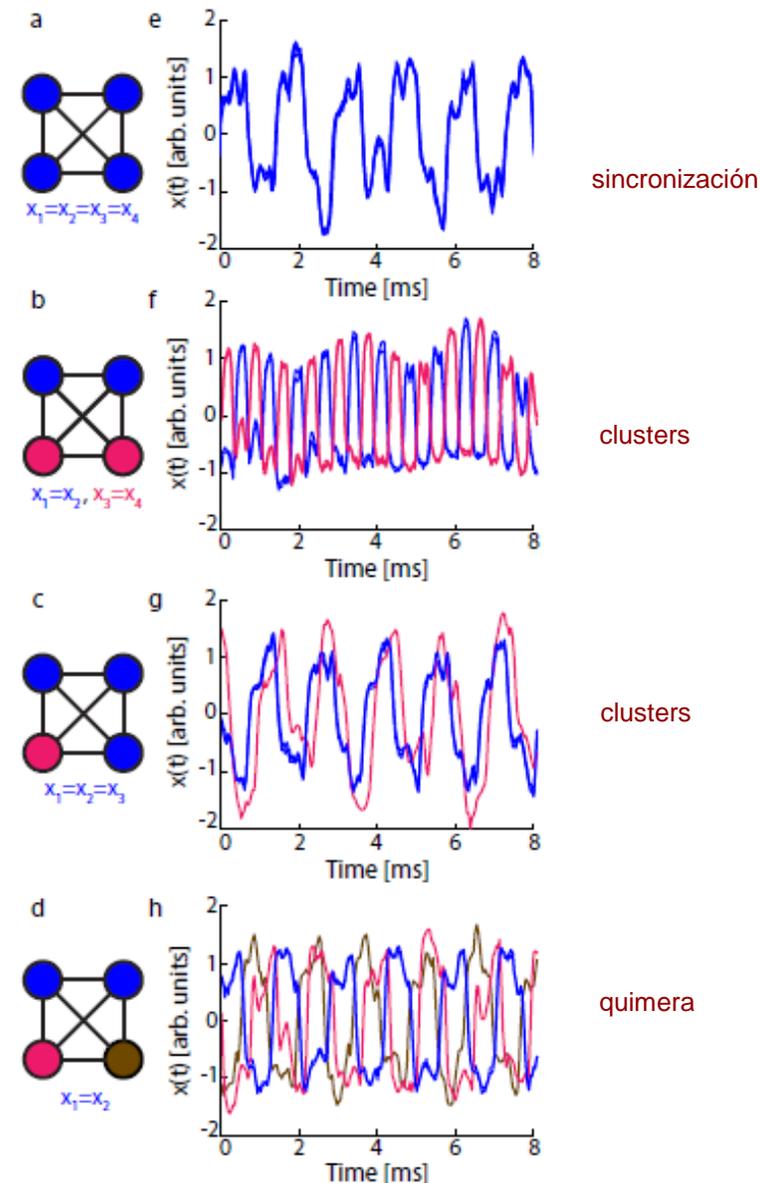
Cada nodo: diodo laser acoplado con fibra óptica cuya luz pasa a través de un modulador y es convertido en una señal eléctrica por un fotoreceptor.



Cada nodo tiene una retro-alimentación con retardo temporal τ_f es acoplado con todos los otros nodos con retardo τ_c

Líneas rojas: conexiones ópticas.

Líneas negras: conexiones electrónicas.





Quimeras tempranas: redes de mapas globalmente acoplados

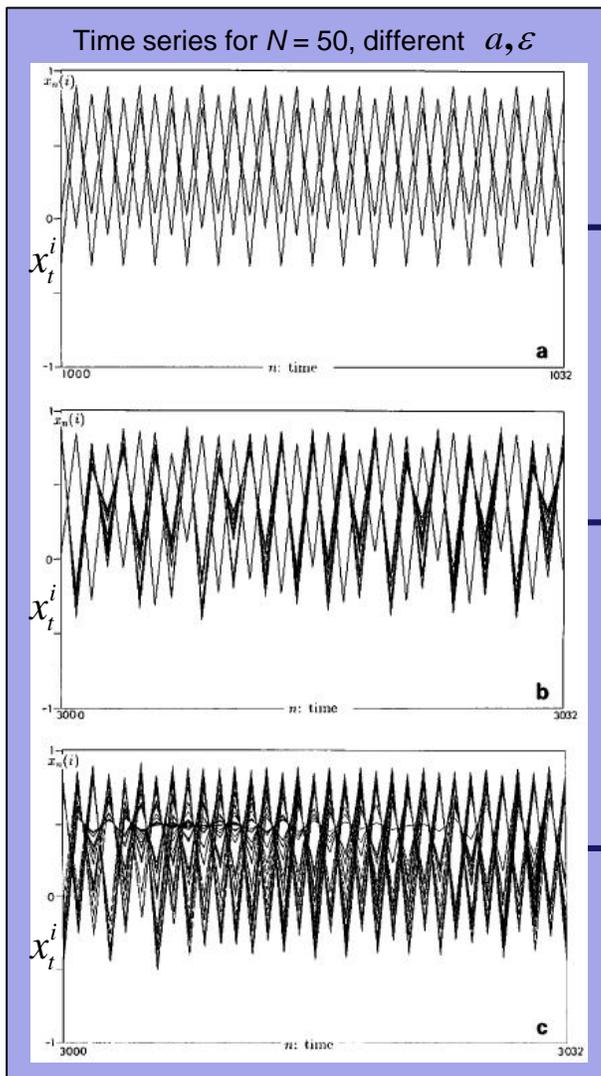
➤ K. Kaneko, *Physica D* **41**, 137 (1990).

x_t^i : estado del mapa i en tiempo discreto $t = 0, 1, 2, \dots$

Sistema de mapas acoplados globalmente ($i = 1, \dots, N$):

$$x_{t+1}^i = (1 - \varepsilon) f(x_t^i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j) \quad \varepsilon : \text{Intensidad acoplamiento}$$

Mapa logístico local: $f(x) = 1 - ax^2$



- *Clusters dinámicos*: elementos se segregan en grupos distinguibles que evolucionan en el tiempo, tal que elementos en grupos distintos están sincronizados.

Un solo cluster = sincronización.

- “*Partially ordered*”: coexistencia de un cluster con elementos incoherentes.
→ estado quimérico!

“*Later, this kind of mixed state (synchronization and desynchronization) was termed chimera state...*”
K. Kaneko, *Chaos* **25**, 097608 (2015), 25th Anniversary issue.

- *Incoherente o desincronizado*.

Clusters observados experimentalmente en osciladores químicos globalmente acoplados:

➤ W Wang, IZ Kiss, JL Hudson, *Chaos* **10**, 248 (2000).

Quimeras observadas en lasers globalmente acoplados:

➤ JD Hart, K Bansal, TE Murphy, R Roy, *Chaos* **26**, 094801 (2016).



Caracterización de estados quiméricos y clusters dinámicos

En la práctica, i, j pertenecen a un cluster si $|x_t^i - x_t^j| < \delta$

Fracción de elementos pertenecientes a algún cluster en tiempo t :

$$p_t = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \Theta(|x_t^i - x_t^j| - \delta) \quad \Theta(x) = 0, \text{ if } x < 0 \text{ and } \Theta(x) = 1, \text{ if } x \geq 0$$

Desviación standard (dispersión) en el tiempo t :

$$\sigma_t = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_t^i - \bar{x}_t)^2 \right]^{1/2} \quad \bar{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_t^j$$

p, σ = promedios temporales asintóticos de valores p_t, σ_t , después de T transitorios, para una realización de condiciones iniciales.

$\langle p \rangle, \langle \sigma \rangle$ = promedios sobre muchas realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

$\langle p \rangle = 1, \langle \sigma \rangle = 0$: sincronización (**S**)

$\langle p \rangle = 1, \langle \sigma \rangle > 0$: clusters (**C**)

$p_{\min} < \langle p \rangle < 1$: quimera (**Q**)

$\langle p \rangle = 0, \langle \sigma \rangle > 0$: incoherente (**D**)

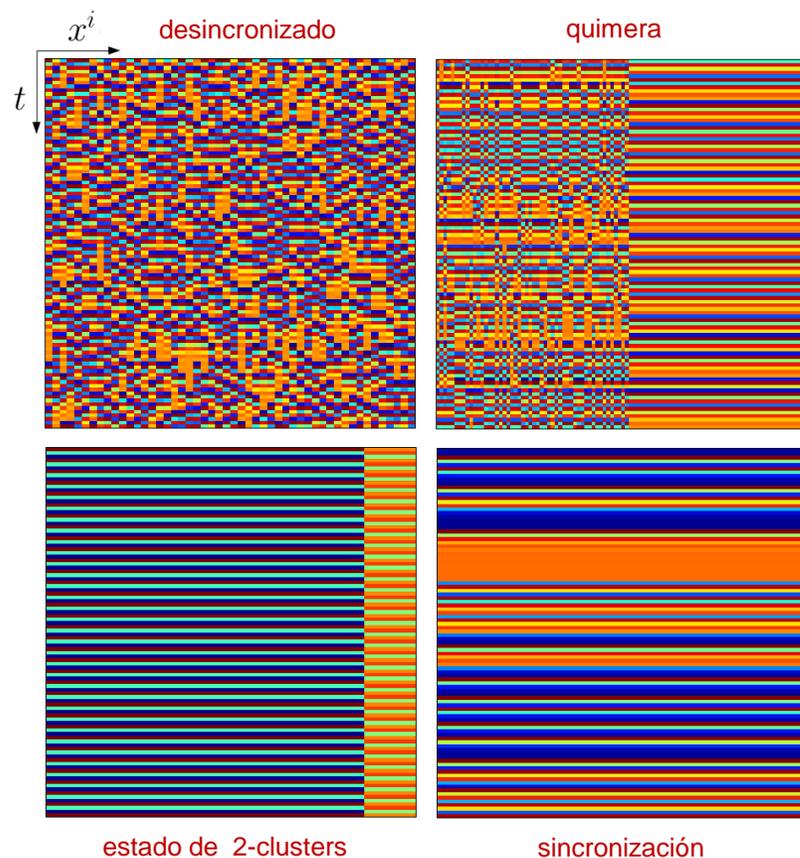


Quimeras caóticas

Red de mapas caóticos globalmente acoplados:

$$x_{t+1}^i = (1 - \varepsilon) f(x_t^i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j)$$

Ordering: $i < j$ if $x_t^i < x_t^j$, for $t > T$



$N = 100$ para visualización
 $b = 0.5$ fijo
 $T = 2 \times 10^5$ transitorios

distintos valores de ε

$$f(x) = \frac{1 - b^{x(1-x)}}{1 - b^{1/4}}, \quad x \in [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

mapa diferenciable con caos robusto para $b \in [0, 1]$

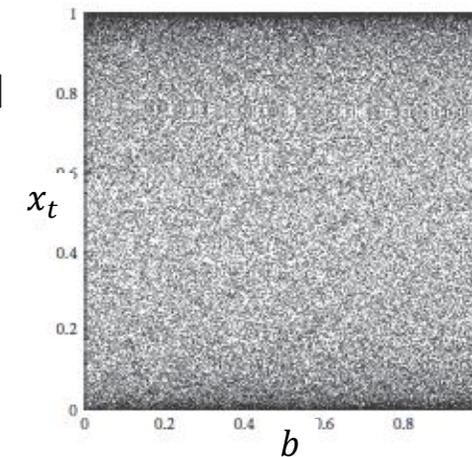
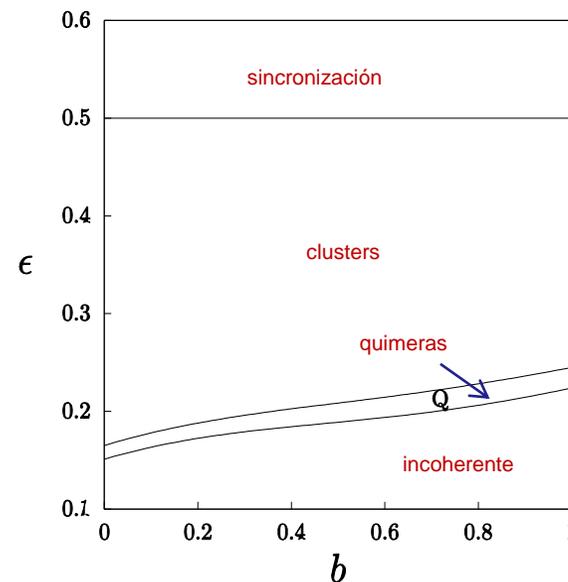


Diagrama de fases





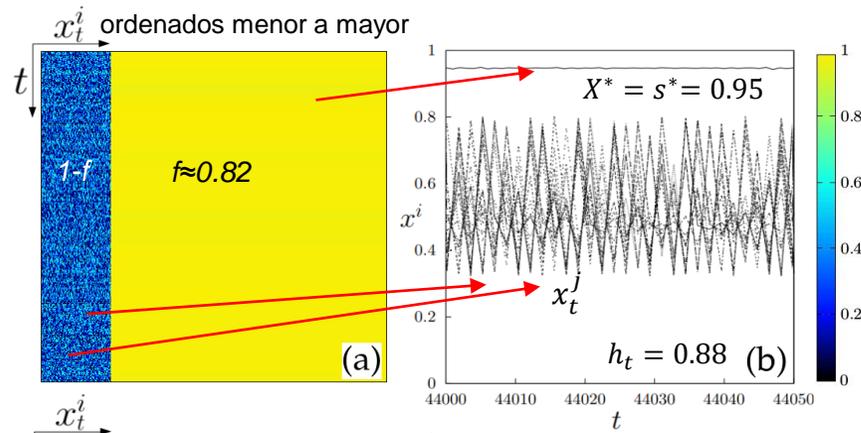
Estados quiméricos con campo medio constante

Red de mapas caóticos globalmente acoplados:

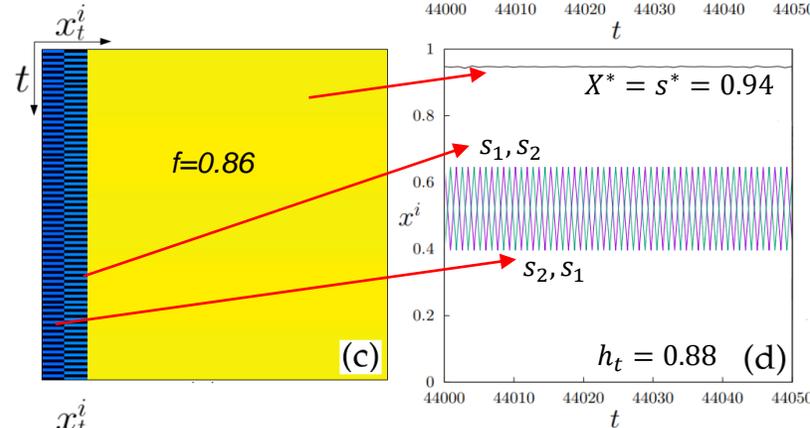
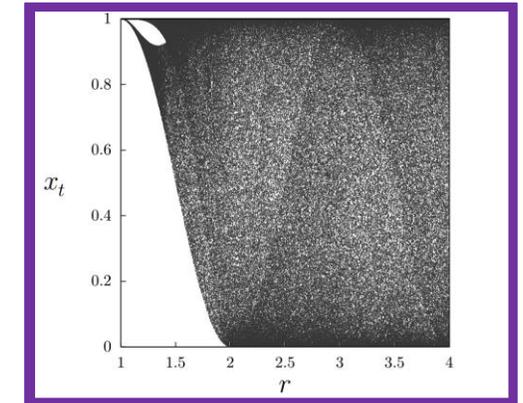
$$x_{t+1}^i = (1 - \varepsilon)f(x_t^i) + \varepsilon h_t, \quad h_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j)$$

mapa local con caos robusto:

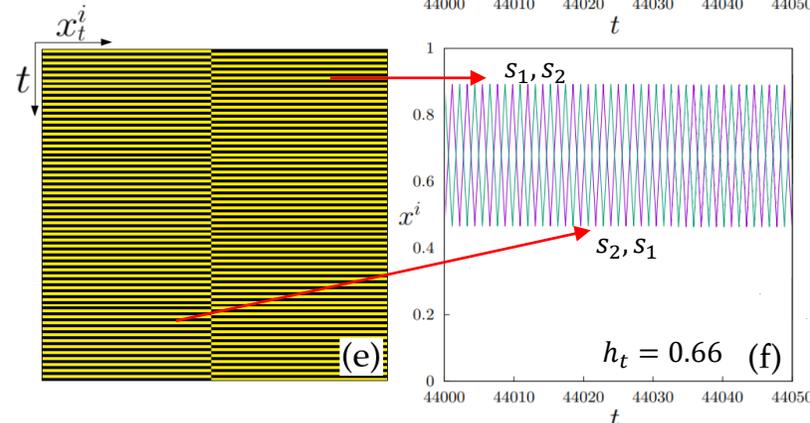
$$x_{t+1} = f(x_t) = \sin^2(r \sin^{-1}(\sqrt{x_t}))$$



(a-b) Estado quimérico dinámico asimétrico:
 1 subset en punto fijo
 + 1 subset desincronizado caótico
 $h_t = \text{cte}$



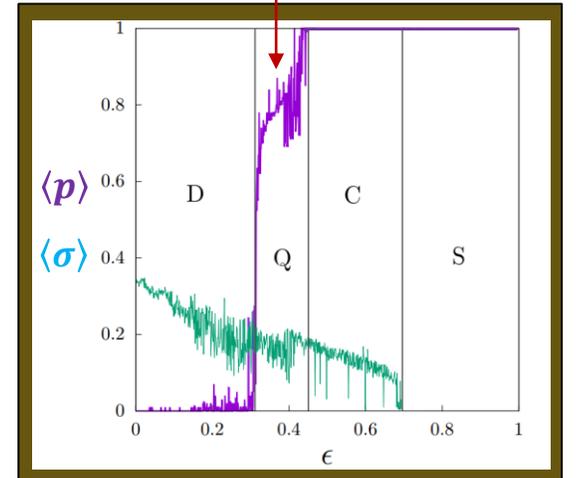
(c-d) Estado periódico asimétrico de 3 clusters:
 2 clusters de periodo-2, fuera de fase e igual tamaño
 + 1 cluster en punto fijo
 $h_t = \text{cte}$



(e-f) Estado simétrico de cluster periódicos:
 2 clusters de periodo-2, fuera de fase e igual tamaño.
 $h_t = \text{cte}$

$r=3.5$ fijo
 50 realizaciones
 para cada valor
 $\langle p \rangle, \langle \sigma \rangle$

quimeras viven entre clusters e incoherencia



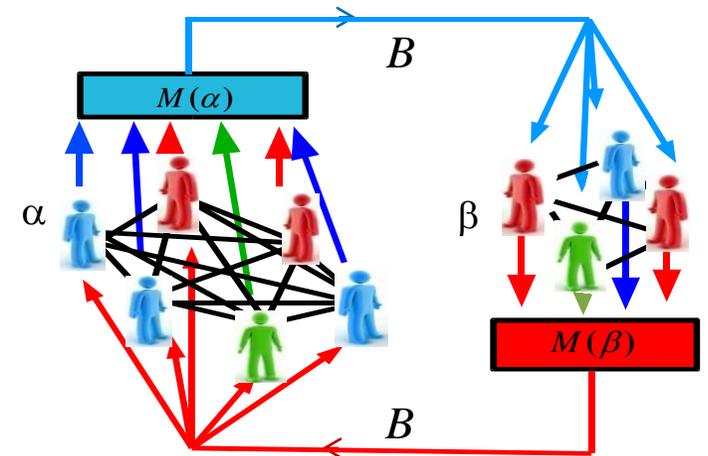


Estados quiméricos en modelo de dos sociedades acopladas

Dos poblaciones α y β con tamaños N_α y N_β , tales que $N_\alpha + N_\beta = N$
Cada población: red completamente conexas (todos con todos).

Estado de agente $i \in \alpha$ está dado por un vector F -componentes (modelo de interacción cultural de Axelrod):

$$x_i(\alpha) = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^F) \quad \text{Similarmente, } j \in \beta \rightarrow x_j(\beta)$$



Campo global de α : $M(\alpha) = (M^1, M^2, \dots, M^F)$

$M^f(\alpha)$ = Moda estadística de los estados en α , en un tiempo dado:
vector con f -componente más abundante de vectores $x_i(\alpha)$, $\forall i$

$B \in [0, 1]$: parámetro de intensidad de campos globales; probabilidad.

Interacción agente-campo con probabilidad B :

- probabilidad interacción = similitud entre $x_i(\alpha)$, $M(\beta)$
- i adopta un atributo no compartido de $M(\beta)$

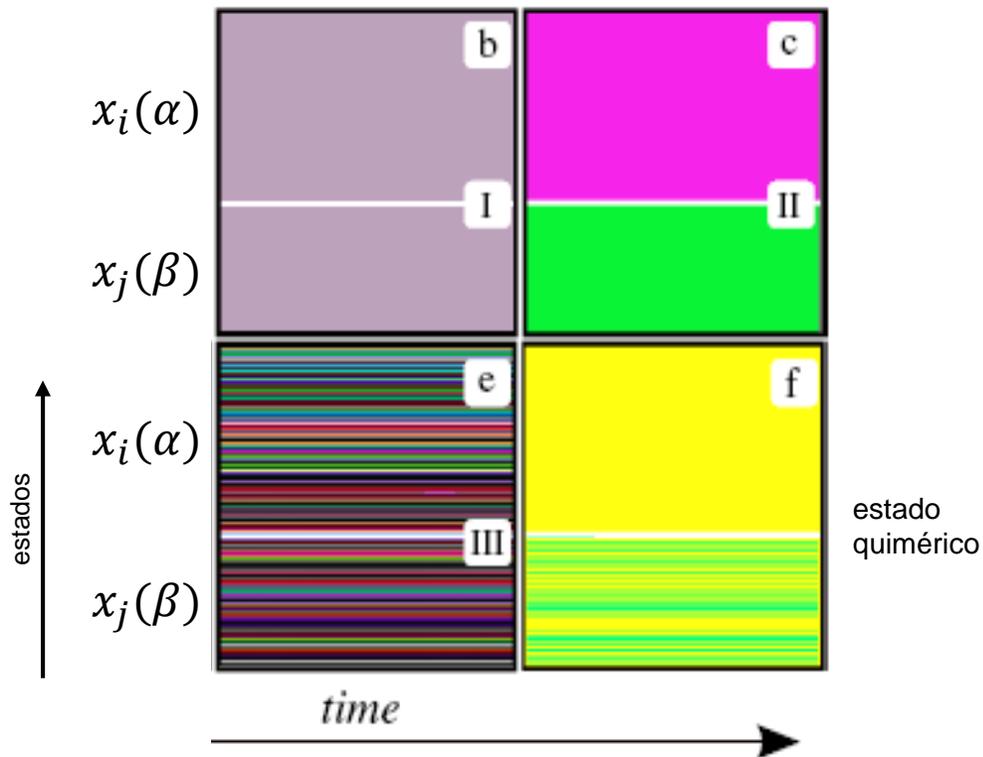
Interacción agente-agente con probabilidad $1-B$:

- probabilidad interacción = similitud entre $x_i(\alpha)$, $x_j(\alpha)$
- i adopta un atributo no compartido de j



Estados quiméricos en dinámica social

$$N^\alpha = 0.6N, \quad N^\beta = 0.4N, \quad F = 5$$



Estados colectivos variando B, q :

- (b) Ambas poblaciones en mismo estado homogéneo (coherente).
- (c) Ambas poblaciones en estado homogéneo, pero distinto.
- (e) Ambas poblaciones en estado desordenado (incoherentes).
- (f) Una población en estado coherente, otra incoherente.
→ **Coherencia localizada: estado quimérico en dinámica social.**

➤ JC González-Avella, MG Cosenza, M San Miguel, Physica A, 399, 24 (2014).

Estados colectivos con 2 poblaciones ocurren también con dinámica de opinión de Deffuant
→ condición de umbral de interacción es importante.



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.