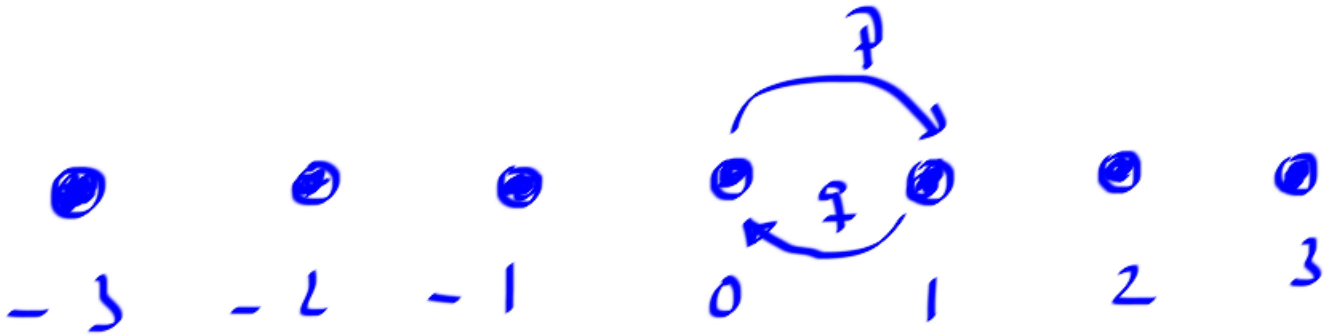
Buenas tardes!

Proyectos MC + DM

Clase 5

Ernesto Medina



en tiempo

$$\pi^{(t)} = \left(P(X_t = 1), P(X_t = 2) \dots P(X_t = n) \right)$$

$$\pi^{(t)} = \pi^{(0)} P^t$$

$$=$$

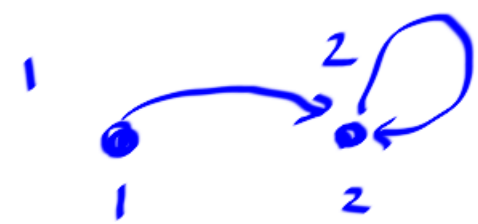
$$= \left(P(X_0=1), P(X_0=2)\right) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

$$\pi^{(1)} = \left(P(X_0=1) P_{11} + P(X_0=2) P_{21},\ P(X_0=1) P_{12} + P(X_0=2) P_{22} \right)$$

$(\pi^{(1)})_1 =$

diagramática

$(\pi^{(1)})_2 =$



Prueba:

$$\pi^{(t)} = \pi^{(0)} P^t \longleftarrow$$

$$P(X_{t+1}=k) = \sum_{i=1}^{m} P(X_{t+1}=k \mid X_t=i)\, P(X_t=i)$$

prob. de estar en k en el tiempo $t+1$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{P(X_{t+1}=k \mid X_t=i)}_{P_{ik}} (\pi^{(0)} P^t)_{(i)}$$

prueba por inducción

$$= \sum_{i=1}^{m} P_{ik}\, (\pi^{(0)} P^t)(i)$$

$$\pi^{(0)} P^{t+1}$$

$$\longrightarrow \pi^{(t+1)} =$$

Ej evolucionar el camino aleatorio en 2 pasos de tiempo y escribir procesos de forma diagramática

Clasificación de Clases de equivalencia:

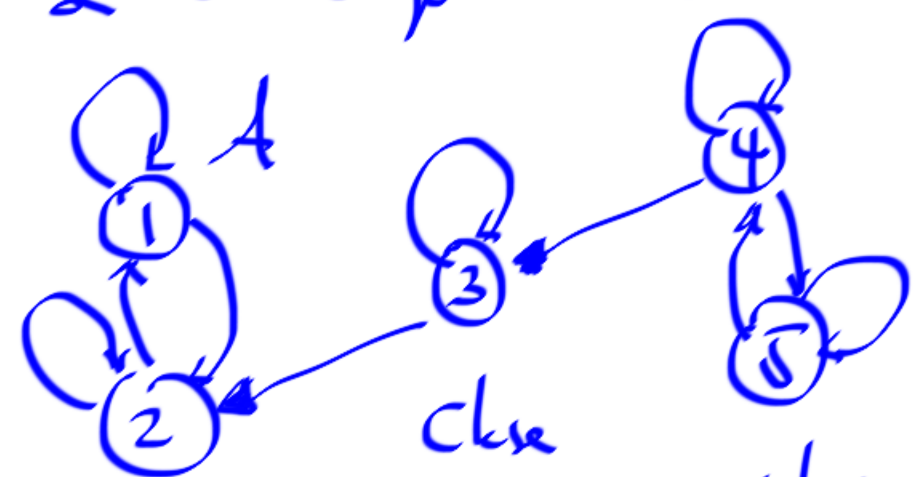
Clases de equivalencia: Estados comunicados

NO comm. $i \to j$ o $i \leftarrow j$

$i \rightleftarrows j$ las dos transiciones existen $\Rightarrow$ comm

Puedo tener un conjunto de edos que se descomponen en clases

Sumidero de probabilidad



$t \to \infty$ todo estara en (1-2)

- si $\exists$ sólo una clase
  el sistema de estados es <u>irreducible</u>

- Conjunto cerrado A si

$$\sum_{j \in A} P(i,j) = 1 \quad \forall \; i \in A$$

- Cadena de Markov recurrente $\equiv$
  cualquier sitio j es visitado
  alguna vez

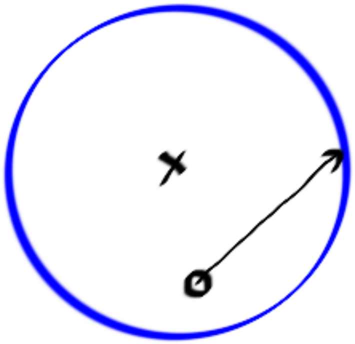
- Cadena de Markov periódica
  si j es visitado periódicamente

- Cadena de Markov aperiódica
  si no ∃ periodos en la frecuencia
  de visita del conjunto.

Ergodicidad Conjunto de fenomenos
$\Rightarrow$ en el curso del que pueden ocurrir
tiempo se visitan todos los estados

Ergodicidad: El tiempo de estadía del sistema en una región del espacio de estados $\propto$ volumen del espacio

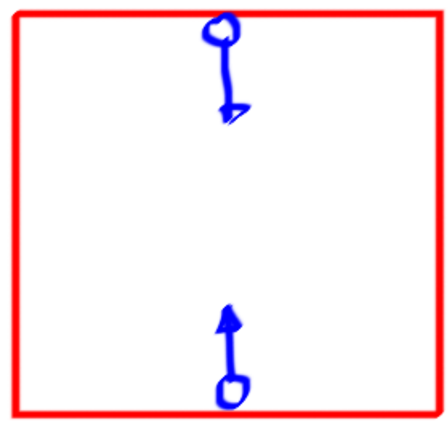
Promedio sobre tiempo. $\Longleftrightarrow$ Promedio sobre estados



hecho exp

Ergodicidad no
está garantizada

plano
fijo



Estados Límite de una cadena de Markov

Puede ser mostrado que una cadena de Markov irreducible, aperiódica con matriz de transición P, la probabilidad de t-pasos converge a una constante que no depende de las condiciones iniciales

$$\lim_{t \to \infty} \pi^{(0)} P^t = \pi_j \quad \text{constante indep de } \pi^{(0)}$$

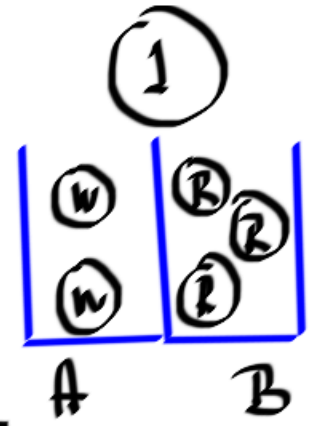
Teorema: Para una cadena de Markov irreducible y aperiódica con matriz transición P, si la distribución límite π $\exists$ entonces está unívocamente determinada

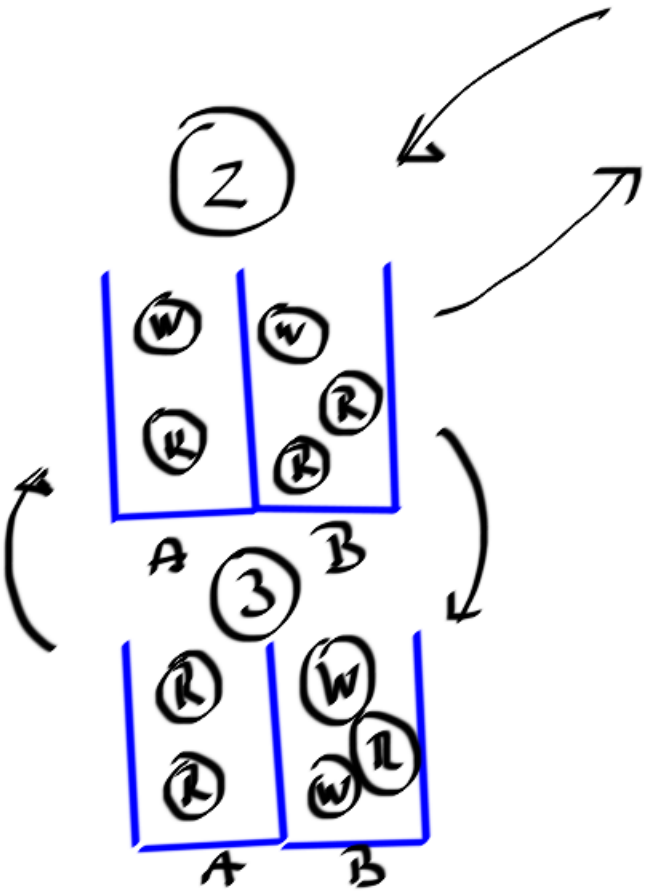
por

$$\vec{\pi} = \vec{\pi} P$$

con $\pi_j \geq 0$ $\quad \sum_j \pi_j = 1$ //

Ej:





i)- Tome al azar una pelota de la caja A

ii)- Tome al azar una pelota de B

iii)- las intercambia

Cuantas maneras hay de convertir 2 $\to$ 1

$$P_{1\to 2} = 1 \; //$$

1) Tomar w de A intercambiar → 2 (no 1)
Tomar w de B

2) T w de A intercambiar → 3 (no 1)
T R_1 de B

3) w de A intercambiar → 3 (no 1)
R_2 de B

4) R de A " → 1
w de B

5) R de A " → 2
R_1 de B

6) R de A → 2 (nº 1)
R₂ de B

$$P_{21} = \frac{1}{6}$$

Definición de la matriz de probabilidad

E_J

$P_{11} = 0$ $P_{13} = 0$ $P_{23} = 1/3$

$P_{12} = 1$ $P_{21} = 1/6$ $P_{31} = 0$

$P_{23} = 1/3$ $P_{22} = 1/2$ $P_{32} = 2/3$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{23}{36} & \frac{10}{36} \\ 1/9 & \frac{20}{36} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

P^N und. N große

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & 3/10 \\ \frac{1}{10} & 6/10 & 3/10 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{const}}}$$

$$\pi(\text{límite}) = \left(\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}\right) \leftarrow$$

$$\pi P = \pi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \left(\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}\right) \Leftarrow \boxed{\text{EJ}}$$

$\Rightarrow$ Conectado con modelo de Ising unidimensional

$T \neq 0 \quad H = 0$

$T = 0 \quad H \neq 0$

Notación de Dirac

$$P_{mn} = P(n,1|m,0)$$

tiempo

edo

y

tiempo

$$= P(n,t+1|m,t)$$

indep del tiempo

$$\langle m| P(t|t_0) |n\rangle \equiv P(n,t|m,t_0) = \left(P^{t-t_0}\right)_{m,n}$$

$$\Pi(n,t) \equiv \langle \Pi(t) | n \rangle$$

$|n\rangle$ una realización de la variable aleatoria

posibles valores de la variable aleatoria $\leftarrow$

$$\sum_{n=1}^{M} |n\rangle\langle n| = 1$$

$$P\pi = \lambda\pi$$

$$\pi P = \lambda'\pi$$

$$\langle m|n\rangle = \delta_{n,m}$$

P no es simétrica $\Rightarrow$ autovalores derechos e izquierdos

$$\vec{\pi} P = \lambda \vec{\pi}$$

$$\vec{\pi}(P - \lambda \mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \det(P - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

Siempre $\exists$ $\lambda = 1$ como autovalor y es el mayor autovalor

$$P(t|t_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{t-t_0} |\psi_i\rangle\langle\alpha_i|$$

y

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$1 > \lambda_2 > \lambda_3 \;\; //$

de regreso al problema:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \to \det(P - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

Ej. $\lambda = 1$ es un autovalor

$\lambda_2 = 1/6$

$\lambda_3 = -\frac{1}{3}$ $\qquad |\pi(0)\rangle = (1, 0, 0)$ $\quad //$

Transientes dep del edo inicial

$|\pi(t)\rangle \Rightarrow \left(\underline{1/10 \,,\, \frac{6}{10}} \,,\, 3/10 \right] \leftarrow$

Clase del Martes

$\Rightarrow$ Generación de #'s aleatorios