

Clase 22: El péndulo doble

1. Ecuaciones de movimiento

Un péndulo doble consiste en un péndulo de longitud l_1 y masa m_1 , del cual cuelga un segundo péndulo de longitud l_2 y masa m_2 , tal que el sistema puede oscilar en un plano vertical fijo.

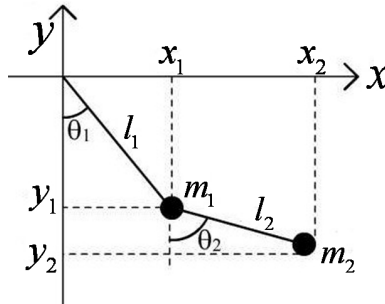


Figura 1: Péndulo doble.

Coordenadas generalizadas son $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$. Luego,

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta & \Rightarrow \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta & \Rightarrow \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin \theta + l_2 \sin \theta_2 & \Rightarrow \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos \theta - l_2 \cos \theta_2 & \Rightarrow \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2)$$

La energía cinética de partícula 1 es

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2. \quad (3)$$

La energía cinética de partícula 2 es

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Las energías potenciales de las partículas se pueden expresar como

$$V_1 = m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad (5)$$

$$V_2 = m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2). \quad (6)$$

La energía cinética del sistema es $T = T_1 + T_2$ y la energía potencial es $V = V_1 + V_2$. El Lagrangiano del sistema es $L = T - V$, lo que conduce a

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2. \quad (7)$$

Ecuación de Lagrange para θ_1 ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de Lagrange para θ_1 queda

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 = 0. \quad (9)$$

Ecuación de Lagrange para θ_2 es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0, \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2gl_2 \sin \theta_2, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2[\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de Lagrange para θ_2 queda

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2gl_2 \sin \theta_2 = 0. \quad (11)$$

Despejando $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$ de las Ecs. (9) y (11), las ecuaciones de Lagrange se pueden expresar como

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin \theta_2 \cos \Delta\theta - M \sin \theta_1) - (l_2\dot{\theta}_2^2 + l_1\dot{\theta}_1^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_1(\mu - \cos^2 \Delta\theta)}, \quad (12)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{gM(\sin \theta_1 \cos \Delta\theta - \sin \theta_2) - (Ml_1\dot{\theta}_1^2 + l_2\dot{\theta}_2^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_2(M - \cos^2 \Delta\theta)}, \quad (13)$$

donde $\Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_2$, y $M \equiv 1 + m_1/m_2$.

2. Sistemas integrables y sistemas caóticos

En la formulación Lagrangiana, un sistema mecánico puede ser caracterizado por una función $L(q_j, \dot{q}_j, t) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, \dot{q}_j, t)$. Las ecuaciones de movimiento que describen la evolución del sistema en el tiempo son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, s. \quad (14)$$

Las ecuaciones de Lagrange (14) constituyen un conjunto de s ecuaciones diferenciales de segundo orden para las s coordenadas generalizadas $\{q_j(t)\}$. El momento conjugado asociado con la coordenada q_j se define como

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(q_j, \dot{q}_j, t). \quad (15)$$

Una coordenada q_i se llama *cíclica* si no aparece explícitamente en el Lagrangiano; es decir, si

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (16)$$

La existencia de una coordenada cíclica q_i en el Lagrangiano implica que el sistema presenta una simetría relacionada con esa coordenada. Por ejemplo, si q_i es una dimensión espacial, existe una simetría de traslación del sistema asociada a la dirección del espacio q_i ; o si la coordenada q_i describe un ángulo de rotación alrededor de un eje en el espacio, existe una simetría rotacional del sistema asociada a ese eje.

Si una coordenada q_i es cíclica, la ecuación de Lagrange para q_i implica que el momento conjugado $p_i(q_j, \dot{q}_j)$ asociado a q_i es constante. Es decir, la simetría está relacionada con una cantidad conservada. Por otro lado, se puede demostrar que, si el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la energía del sistema E se conserva. La conservación de la energía total E es la simetría correspondiente a la homogeneidad del tiempo. Un sistema puede poseer diversas simetrías que se manifiestan a través de su Lagrangiano. El teorema de Noether establece que, en general, cada simetría en un sistema está asociada a una cantidad conservada.

Las cantidades conservadas constituyen *primeras integrales* del movimiento de un sistema; son funciones de las coordenadas y de sus velocidades (i. e. primera derivadas temporales). Denotamos el conjunto de cantidades conservadas en un sistema como funciones $I_k(q_j, \dot{q}_j) = C_k$, donde $C_k = \text{constante}$, y $k = 1, \dots, n$. En general, estas cantidades se pueden emplear para reducir el número de ecuaciones de Lagrange a integrar en el sistema.

Un sistema con s grados de libertad es *integrable* si posee s cantidades conservadas; es decir, si $n = s$.

Las s cantidades conservadas de un sistema integrable constituyen un conjunto de s ecuaciones para las s velocidades generalizadas $\dot{q}_j(t)$, las cuales se pueden reducir, en principio, a una ecuación diferencial de primer orden con respecto al tiempo para una coordenada generalizada. Esta, a su vez, en principio puede ser integrada. A partir de la integración de esa coordenada, las demás coordenadas pueden, en principio, ser integradas.

Las soluciones para todas las coordenadas $q_j(t)$ pueden ser expresadas en términos de *cuadraturas*; es decir, integrales explícitas que generalmente contienen raíces cuadradas de funciones conocidas. Sin embargo, aunque las coordenadas en sistemas integrables son susceptibles de ser determinadas completamente en función de integrales, el cálculo exacto de éstas, en muchos casos, puede resultar no trivial.

Si un sistema con s grados de libertad tiene menos de s cantidades conservadas ($n < s$), se denomina *no integrable*. Un sistema para el cual existen más cantidades conservadas que grados de libertad ($n > s$) se llama *superintegrable*. Existen pocos sistemas superintegrables conocidos; el ejemplo más simple es una partícula libre; otro ejemplo es el problema de dos cuerpos sujetos a interacción gravitacional.

Ejemplos.

Consideremos algunos sistemas mecánicos típicos:

1. Oscilador armónico simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
2. Péndulo simple: $s = 1$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; es integrable.
3. Partícula sobre un cono: $s = 2$, $C_1 = l_z = \text{cte}$, $C_2 = E = \text{cte}$, $n = 2$; es integrable.
4. Péndulo doble: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
5. Péndulo cuyo soporte gira en un círculo en plano vertical con velocidad angular constante: $s = 1$, $n = 0$; no es integrable.
6. Péndulo de resorte: $s = 2$; $C_1 = E = \text{cte}$, $n = 1$; no es integrable.
7. Péndulo paramétrico cuya longitud varía en el tiempo: $s = 1$, $n = 0$; no es integrable.
8. Partícula libre es superintegrable: $s = 3$; $n = 4$: $C_1 = E = \text{cte}$, $C_2 = p_x = \text{cte}$, $C_3 = p_y = \text{cte}$, $C_4 = p_z = \text{cte}$.
9. El problema de dos cuerpos sujeto a interacción gravitacional es superintegrable: $s = 6$ (tres coordenadas para cada partícula); $n = 7$: $C_1 = E$ energía total, C_2, C_3, C_4 = cantidad de movimiento total (3 componentes), C_5, C_6 = momento angular total (magnitud y dirección), y C_7 = dirección del vector de Laplace-Runge-Lenz (dirección del perihelio).

La integrabilidad puede ser considerada como un tipo de simetría que puede estar presente en un sistema dinámico, y que conduce a una evolución regular (periódica o estacionaria) de las variables del sistema en el tiempo. Sin embargo, la existencia de integrabilidad no es lo más común; muchos sistemas dinámicos no son integrables.

Un sistema no integrable puede exhibir comportamiento *caótico* para ciertos rangos de valores de sus parámetros. El fenómeno de *caos* consiste en la evolución irregular e impredecible de las variables de un sistema dinámico determinista, debido a la extrema sensibilidad de esas variables ante pequeños cambios en sus condiciones iniciales.

La no integrabilidad es una condición necesaria, pero no suficiente, para la existencia de caos en un sistema.

Los sistemas caóticos se caracterizan porque las ecuaciones que rigen su dinámica poseen funciones *no lineales* de las variables. El péndulo doble constituye un ejemplo de un sistema no lineal y no integrable que muestra comportamiento caótico. Anteriormente obtuvimos las ecuaciones de Lagrange para los ángulos θ_1 y θ_2 que describen los grados de libertad de este sistema,

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin \theta_2 \cos \Delta\theta - M \sin \theta_1) - (l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_1(M - \cos^2 \Delta\theta)} \quad (17)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{gM(\sin \theta_1 \cos \Delta\theta - \sin \theta_2) - (Ml_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_2(M - \cos^2 \Delta\theta)}, \quad (18)$$

donde $\Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_2$, y $M \equiv 1 + m_1/m_2$. Para valores suficientemente grandes de la energía del sistema, el movimiento de ambas coordenadas θ_1 y θ_2 es irregular (no periódico), como se muestra en la Fig. 2.

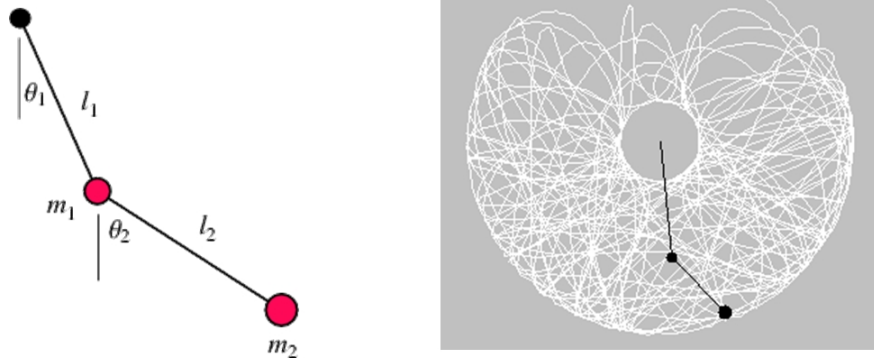


Figura 2: Izquierda: Coordenadas y parámetros del péndulo doble. Derecha: Movimiento caótico trazado por la partícula m_2 en el espacio.

Dos trayectorias $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ y $(\theta'_1(t), \theta'_2(t))$ que parten respectivamente de condiciones iniciales $(\theta_1(0), \theta_2(0))$ y $(\theta'_1(0), \theta'_2(0))$ arbitrariamente cercanas, no se mantienen cercanas en el tiempo, sino que pueden evolucionar de maneras irregulares y muy diferentes (Fig. 3). El conocimiento de la evolución de una trayectoria no implica la predicción del comportamiento de la otra, a pesar de que el sistema es determinista.

Un sistema caótico posee una extrema sensibilidad ante cambios infinitesimales en sus condiciones iniciales: una pequeña perturbación en las condiciones iniciales de una variable resulta amplificada por la dinámica del sistema durante su evolución, hasta que alcanza un tamaño comparable al intervalo de definición de la variable. Esto implica una limitación fundamental en la capacidad de predicción del comportamiento de sistemas caóticos, con consecuencias prácticas en una variedad de escenarios.

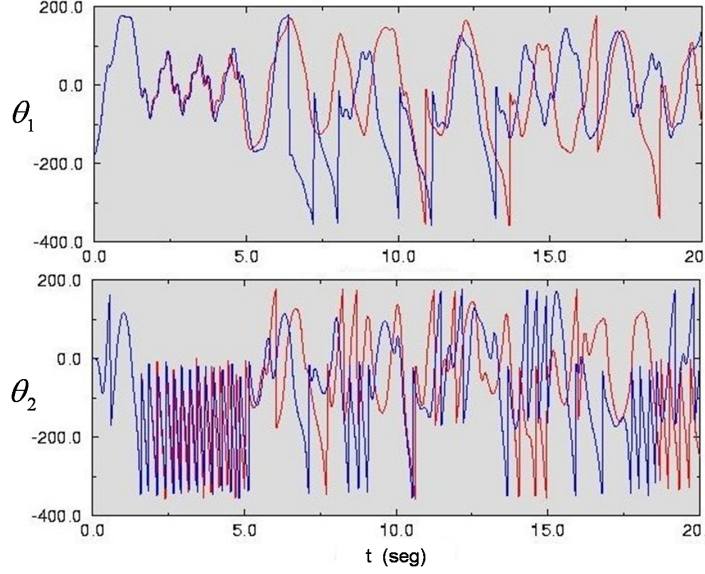


Figura 3: Realización experimental de caos en un péndulo doble. Arriba: θ_1 vs. t . Abajo: θ_2 vs. t . En cada gráfica, partiendo del reposo, se muestra la evolución del ángulo a partir de dos condiciones iniciales muy cercanas, $\Delta\theta_1(0) = \Delta\theta_2(0) \approx 10^{-3}$.

Las ecuaciones de movimiento del péndulo doble, Ecs. (17)-(18), contienen funciones no lineales de θ_1 y θ_2 . Si consideramos el límite de pequeñas amplitudes de las oscilaciones, $\theta_1 \rightarrow 0$ y $\theta_2 \rightarrow 0$, estas ecuaciones pueden linealizarse usando las aproximaciones $\sin x \approx x$ y $\cos x \approx 1$, para $x \rightarrow 0$, quedando en la forma

$$\ddot{\theta}_1 \approx \frac{g(\theta_2 - M\theta_1)}{l_1(M-1)}, \quad (19)$$

$$\ddot{\theta}_2 \approx \frac{gM(\theta_1 - \theta_2)}{l_2(M-1)}. \quad (20)$$

En este caso no se observa caos; el movimiento del sistema consiste en la superposición de dos modos de oscilación periódica con sus correspondientes frecuencias: un modo en fase ($\theta_1 = \theta_2$) con frecuencia angular ω_1 y otro modo en antifase o fases opuestas ($\theta_1 = -\theta_2$) con una frecuencia $\omega_2 > \omega_1$, correspondientes a:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1l_1l_2} \left[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4m_1l_1l_2]} \right]. \quad (21)$$

El límite de pequeñas amplitudes equivale a valores pequeños de la energía del sistema. Luego, el comportamiento del péndulo doble puede ser regular para ciertas condiciones, a pesar de que el sistema es no integrable. Esto ilustra el hecho de que la condición de no integrabilidad es necesaria, pero no suficiente, para la existencia de caos en un sistema.

Otro ejemplo de un sistema no lineal, no integrable y caótico, es el péndulo de resorte, Fig. 4, cuyas ecuaciones de movimiento son

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0, \quad (22)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{k}{m}(r - l) - g\cos\theta = 0. \quad (23)$$

Este sistema exhibe comportamiento caótico para ciertos valores de su energía, Fig. 4.

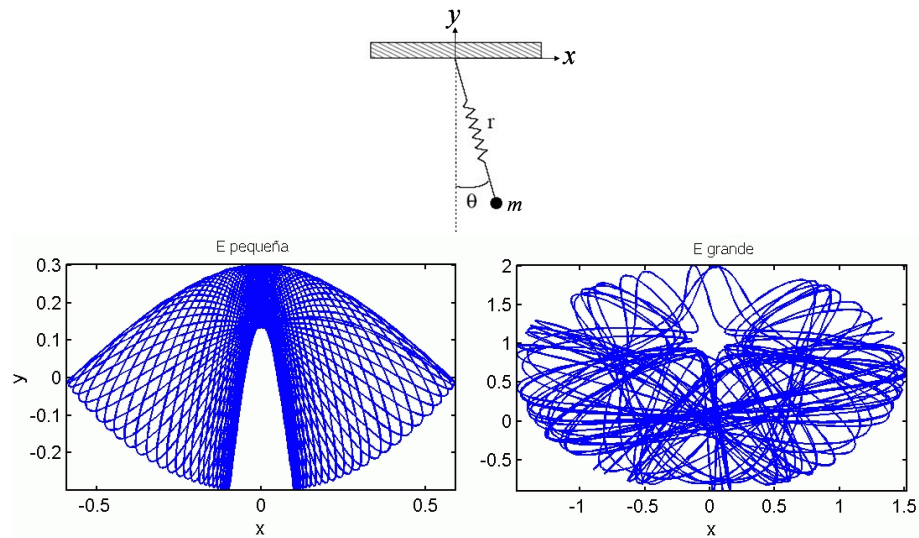


Figura 4: Movimiento en el plano (x, y) de la partícula en el péndulo de resorte, para diferentes valores de su energía E . Izquierda: comportamiento regular (periódico). Derecha: comportamiento caótico.

Cabe destacar que no se requieren muchas variables (hay solamente dos grados de libertad en el péndulo doble o en el péndulo de resorte) para la ocurrencia de caos en un sistema.

Se ha encontrado que el caos es un fenómeno ubicuo en la Naturaleza. Muchos sistemas no lineales físicos, químicos, biológicos, fisiológicos, económicos, sociales, etc. presentan comportamiento caótico. Se ha descubierto que el caos se manifiesta con propiedades universales en estos sistemas, independientemente del contexto.