Tarea N. 2
Teoría estadística de campos

1. Puntos bi-críticos y tetra-críticos

Consideremos una action de Ginzburg-Landau generalizada con dos campos :

$$\begin{aligned} S &= \int d\vec{r}\left[K_1\left(\nabla\phi_1(\vec{r})\right)^2 + K_2\left(\nabla\phi_2(\vec{r})\right)^2\right] \\ &+ \left[t\left(\phi(\vec{r})_1^2+\phi(\vec{r})_2^2\right) + r\left(\phi(\vec{r})_1^2-\phi(\vec{r})_2^2\right) + \lambda_1\phi_1^4(\vec{r}) + \lambda_2\phi_2^4(\vec{r}) + 2g\phi_1^2\phi_2^2\right] \end{aligned}$$

con K_1, K_2, λ_1, λ_2 y g estrictamente positivos.

1. Para valores genéricos de las constantes, diga cuales son la simetrías del sistema
2. Misma pregunta si se toma el caso particular $K_1 = K_2$, $r = 0$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = g$
3. Explique porqué el mínimo de la de energía libre es obtenido para una configuración de ϕ_1 y ϕ_2 homogéneas.
4. Muestre que el diagrama de fases variando las constantes t y r tiene tres fases diferentes que coinciden en un punto bi-crítico para el caso $\lambda_1\lambda_2 < g^2$ y tiene cuatro fases distintas que coinciden en un punto tetra-crítico para el caso $\lambda_1\lambda_2 > g^2$

2. Modelo gaussiano discreto

Consideremos la función de partición de n variables reales x_i, con un Hamiltoniano $H(x_j)$, dada por

$$Z[h_i] = \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{N} dx_i\, e^{-H(x_j)+\sum_{k=1}^{N} h_k x_k} \tag{1}$$

Y se definen las funciones de correlación disconexas como:

$$< x_m\ x_n\ ... >= \frac{1}{Z[h_i]}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{N} dx_i\, e^{-H(x_j)+\sum_{k=1}^{N} h_k x_k}\ x_m\ x_n\ ... \tag{2}$$

1. Expresar $< x_m\ x_n\ ... >$ en términos de derivadas con respecto a $h_m,\ h_n$ ... de $Z[h_i]$.

2. Se definen ahora la funciones de correlación a k puntos conexas como

$$< x_{n_1}\ x_{n_2}\ ...\ x_{n_k} >_c = \frac{\partial^k \ln(Z)}{\partial h_{n_1} \partial h_{n_1} ... \partial h_{n_k}} \tag{3}$$

3. Exprese las funciones conexas de uno y dos puntos

$$< x_n >_c = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial h_n} \quad ; \quad < x_n\ x_m >_c = \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial h_n \partial h_m} \tag{4}$$

   en términos de las funciones a uno y dos puntos disconexas.

4. Consideremos ahora el caso gaussiano dado por el Hamiltoniano :

$$H(x_l) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{i,j} x_j = \frac{1}{2} x^T A x \tag{5}$$

   Donde para la parte final de la igualdad se usa la notacion matricial. Se supone que $A = A^T$ es una matriz simétrica y real de autovalores todos reales y estrictamente positivos. Muestre que

$$Z[h_i] = Z[0]\ e^{\frac{1}{2} h^T A^{-1} h} \tag{6}$$

   donde $A^{-1} = A^{-1^T}$ es la inversa de A. Será útil de hacer el cambio de variables dado por $x = \tilde{x} + A^{-1} h$ o escrito en componentes $x_i = \tilde{x}_i + \sum_{j=1}^{N} (A^{-1})_{ij} h_j$.

5. Se sabe que existe una matriz orthogonal O ($O^T O = Id$), tal que $O^T A O = D$ donde D es diagonal. Haciendo un nuevo cambio de variables $\tilde{x} = Oy$, muestre que

$$Z[0] = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{Det(A)}} \tag{7}$$

6. Calcule las funciones de correlation conexas $< x_n >_c$ et $< x_n\ x_m >_c$.

7. Que se puede decir de las funciones de correlation conexas a mas de dos puntos ?

8. Muestre que, cuando se ponen todos los campos h_k iguales a zero, las funciones de correlación de un numero impar de puntos se anulan, y las funciones disconexas de 4 o mas puntos son iguales a la suma de todas las combinaciones posibles de productos de funciones de dos puntos (otra versión del teorema de Wick).

3. Modelo gaussiano contínuo

Consideremos el modelo gaussiano continuo dado por la acción:

$$S\{h\} = \int d\vec{r}\left[(\nabla\phi(\vec{r}))^2 + m^2\phi(\vec{r})^2 + h(\vec{r})\phi(\vec{r})\right] \tag{8}$$

ϕ y h siendo dos campos reales. A partir de esa acción se puede definir la función de partición:

$$Z\{h\} = \int \{D\phi\} e^{-S\{h\}} \tag{9}$$

y definimos las transformadas de Fourier de los campos:

$$\hat{\phi}(\vec{k}) = \int d\vec{r} e^{i\vec{k}\vec{r}}\phi(\vec{r}) \quad ; \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\vec{k} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\hat{\phi}(\vec{k})$$
$$\hat{h}(\vec{k}) = \int d\vec{r} e^{i\vec{k}\vec{r}}h(\vec{r}) \quad ; \quad h(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\vec{k} e^{-i\vec{k}\vec{r}}\hat{h}(\vec{k})$$

(Obsérvese que $\hat{\phi}^*(\vec{k}) = \hat{\phi}(-\vec{k})$ y $\hat{h}^*(\vec{k}) = \hat{h}(-\vec{k})$).

1. Muestre que

$$S\{h\} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\vec{k}\left[\left(k^2+m^2\right)|\hat{\phi}(\vec{k})|^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{h}(\vec{k})\hat{\phi}(-\vec{k}) + \hat{h}(-\vec{k})\hat{\phi}(\vec{k})\right)\right] \tag{10}$$

2. Haciendo el cambio de variables :

$$\hat{\Phi}(\vec{k}) = \hat{\phi}(\vec{k}) + \frac{1}{2}\frac{1}{k^2+m^2}\hat{h}(\vec{k})$$

Muestre que

$$\Phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \frac{1}{2}\int d\vec{r}'\ G(\vec{r}-\vec{r}')h(\vec{r}') \tag{11}$$

con $G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\vec{k}\frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}}}{k^2+m^2}$. Deduzca que :

$$\begin{aligned} S\{h\} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\vec{k}\left[\left(k^2+m^2\right)|\hat{\Phi}(\vec{k})|^2 - \frac{1}{2\left(k^2+m^2\right)}|\hat{h}(\vec{k})|^2\right] \\ &= \int d\vec{r}\left[(\nabla\Phi(\vec{r}))^2 + m^2\Phi(\vec{r})^2\right] - \frac{1}{2}\int d\vec{r}\ d\vec{r}'\ G(\vec{r}-\vec{r}')h(\vec{r})h(\vec{r}') \end{aligned}$$

3. Deduzca entonces que, si suponemos que la medida en la integral funcional queda igual bajo ese cambio de variables (se trata de una traslación del campo en cada punto)

$$\phi(\vec{r}) \to \Phi(\vec{r}) \quad ; \quad \{D\phi(\vec{r})\} = \{D\Phi(\vec{r})\}$$

entonces la función de partición toma la forma simple:

$$Z\{h\} = Z\{h=0\}\ e^{\frac{1}{2}\int d\vec{r}\ d\vec{r}'\ G(\vec{r}-\vec{r}')h(\vec{r})h(\vec{r}')} \tag{12}$$

4. Muestre que, en tres dimensiones se obtiene:

$$G(\vec{r}) = \frac{e^{-m|\vec{r}|}}{4\pi|\vec{r}|} \tag{13}$$

Ayuda : se hara la integral $d\vec{k}$ en coordenadas esféricas escogiendo el eje z según la dirección de $\vec{r}$ y se usara que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \ \frac{s \ e^{is\lambda}}{s^2 + m^2} = i \ \pi \ e^{-m|\lambda|} \tag{14}$$

resultado que se puede obtener con el teorema de los residuos y el lema de Jordan.

4. El modelo de Ginzburg-Landau para la superconductividad y las ecuaciones de London

Ginzburg y Landau propusieron en 1950 un modelo fenomenológico para estudiar la transición de fases entre un estado normal y un estado superconductor. Propusieron una energía libre de la forma:

$$F = \int d^d r \left[\frac{1}{2m} |\vec{\nabla}\Psi|^2 + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 \right] \tag{15}$$

Suponemos que β y m son dos parámetros positivos y Ψ es un campo complejo que représenta el condensado superconductor.

1. Argumentar que el mínimo de la de energía libre es obtenido para una configuración de Ψ homogénea.

2. Dar el valor de Ψ_0 que minimiza la energía libre para los casos $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$.

3. Si el superconductor está en presencia de un campo magnético $\vec{B}$, la energía libre total será:

$$F = \int d^d r \left[\frac{1}{2m} |(\vec{\nabla} - i2e\vec{A})\Psi|^2 + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} \right] \tag{16}$$

donde $\vec{A}$ es el potencial vector *i.e.* $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Imagine que se hace la transformation de calibre $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla} f$. Cómo debe transformar Ψ para que la energía libre quede invariante?

4. Mostrar que minimizando la energía libre con respecto a A^μ:

$$\frac{\delta F}{\delta A^\mu} = 0 \tag{17}$$

Se obtiene la ecuación de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{j}$, donde la corriente viene dada por

$$\vec{j} = -\frac{e}{im}\left[\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right] - \frac{4e^2}{m}\vec{A}|\Psi|^2 \tag{18}$$

5. Qué ocurre con esa expresión si $\Psi(\vec{r})$ toma el valor Ψ_0 del mínimo de la energía libre para el caso $\alpha < 0$?

6. A partir de $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{j}$ muestre que, poniendo $\Psi(\vec{r}) = \Psi_0$, se obtiene una ecuación para el campo magnético

$$-\triangle\vec{B} = -\frac{1}{\lambda^2}\vec{B} \tag{19}$$

donde se dará la expresión de λ. Se podrá usar la identidad

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{U}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - \triangle\vec{U} \tag{20}$$

7. En el espacio tri-dimensional de coordenadas x, y, z se imagina que el superconductor esta présente en el semi-volumen $x > 0$. En la región correspondiente al vacío ($x < 0$) hay un campo magnético no-nulo. Se quiere calcular la forma del campo magnético en el interior del superconductor $x > 0$. Se supone que $\vec{B}$ dépende únicamente de la coordenada x. Se impone como condiciones de borde $\vec{B}(x = 0) = \vec{B}_0$ y $\vec{B} \to \vec{0}$ para $x \to \infty$. Obtener la forma de $\vec{B}(x)$ para todo $x > 0$ et deducir la interpretación física de λ.