5) Universalidad y puntos críticos

si S_0 es la acción de una teoría de campos que representa al punto crítico c

* S_0 es invariante de escala
* S_0 es un punto estable en algunas direcciones, e inestable en otras.

"fine tuning"

a S_0 se la distribuyen un conjunto de campos $\{\Phi_i(\vec{r})\}$ $\Longleftrightarrow$ exponentes críticos.
$i = 1, \ldots, ?$

invariancia de escala

$$\langle \Phi_i(\vec{r}) \, \Phi_i(\vec{r}\,') \rangle \sim \frac{c}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^{2x_i}}$$

$\vec{r}, \vec{r}' \to b\vec{r}, b\vec{r}' = \hat{\vec{r}}, \hat{\vec{r}}'$

$\Phi_i \to b^{x_i} \Phi_i = \hat{\Phi}_i$

$$\langle \hat{\Phi}_i(\hat{\vec{r}}) \hat{\Phi}_i(\hat{\vec{r}}') \rangle = \frac{C}{|\hat{\vec{r}} - \hat{\vec{r}}'|^{2x_i}}$$

inv. de escala.

$\Phi_i \to$ dimensión de escala: x_i

Salir del punto crítico.

$$S = S_0 + \int d^D\vec{r} \sum_i g_i \Phi_i(\vec{r})$$

Como caso particular, hay un solo de los Φ_i

$$\to S = S_0 + \int d^D\vec{r}\; g_i \Phi_i(\vec{r})$$

$[\Phi_i] = L^{-x_i}$ $\quad [g_i] = L^{x_i - D}$

a primer orden, R.G.

$$\boxed{\frac{dg_i}{dl} = (D - x_i) g_i}$$

si $x_i > D$ $\quad g_i(l) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$

perturbación irrelevante.

si $x_i < D$ $\quad g_i(l) \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$

perturbacion relevante.

ejemplo: Φ_E, que pasa si $T \overset{?}{\neq} T_c$

$$\rightarrow S = S_0 + \int d^D\vec{r}\ \underbrace{t}_{|T-T_c|}\ \Phi_E$$

$$x_E = D - \frac{1}{\nu}$$

⚠ Cuidado:

O.P.E.
$$\Phi_i(\vec{r}_1)\,\Phi_j(\vec{r}_2) \xrightarrow[|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\to 0]{} \sum_k \Phi_k(\vec{r}_1)$$

$$\Phi_i(\vec{r}_1)\,\Phi_j(\vec{r}_2) \xrightarrow[\vec{r}_1\to\vec{r}_2]{} \sum_k \Phi_k(\vec{r}_1)\,\frac{C_{ijk}}{\|\vec{r}_1-\vec{r}_2\|^{x_i+x_j-x_k}}$$

inv. por trasl. y rotación.

si Φ_i y Φ_j son invariantes bajo una acción de simetría:

por para Ising

$$\int d^D\vec{r}\left[\frac{K}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2+\frac{c}{2}\phi^2+u\phi^4+\dots\right]+\cancel{h\phi}$$

simetría. $\phi \to -\phi$

$$\Phi_i=\phi^2\ ,\ \Phi_j=\phi^4$$

inv. bajo $\phi \to -\phi$

$$\phi^2\cdot\phi^4=\sum_k \cancel{\phi^3},\ \cancel{\phi},\ \cancel{\phi^5}\dots$$

$$\phi^2,\ \phi^4,\ \phi^6\dots$$

redefinición $\boxed{g_i \to \frac{2}{S_d}g_i}$

$$S_0 \to S_0+\int\sum_i g_i\Phi_i(\vec{r})\,d^D\vec{r}$$

R.G. al segundo orden.

$$\forall k:\ \boxed{\frac{dg_k}{dl}=(D-x_k)g_k-\frac{1}{2}\sum_{ij}{}' c_{ijk}\,g_ig_j+\mathcal{O}(g^3)}$$

fórmula de Polyakov

ojo que si $i=1, j=2$

$\to$ 2 veces $C_{12k} g_1 g_2 + C_{21k} g_k g_1$

$C_{12k} = C_{21k}$

$= 2C_{12k} g_1 g_2$

pero $C_{11k} g_1^2$ una vez nada más.

$$S_0 + \underline{\int d^D\vec{r}\, \left[g_1 \Phi_1(\vec{r}) + g_2 \Phi_2(\vec{r}) \right]}$$

O.P.E

$$\underline{\underline{\Phi_1(\vec{r}_1)} \, \Phi_2(\vec{r}_2)} \to \underline{\frac{C\, \Phi_3(\vec{r})}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{x_1 + x_2 - x_3}}}$$

$\to$ va a aparecer un término $\int g_3 \Phi_3(\vec{r})\, d^D\vec{r}$

$\to$ en general, así se pone

$$S_0 + \underline{\int d^D\vec{r}\, \Phi_\alpha(\vec{r}) g_\alpha + g_\beta \Phi_\beta + \underline{g_\gamma \Phi_\gamma + g_\delta \Phi_\delta} + \ldots}$$

$\to$ hay que poner todos los otros campos generados por Φ_α $\quad \Phi_\alpha \Phi_\alpha \to \Phi_\beta$

luego $\Phi_\alpha \Phi_\beta \to \Phi_\gamma$

$\Phi_B \Phi_R \to \Phi_S$

ejemplo

$t \sim |T-T_c|$

$S_{GL} = \int d^D\vec{r} \left[\frac{K}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + u\phi^4 \right] + t\phi^2 + \phi^6 + \phi^8 + \dots$

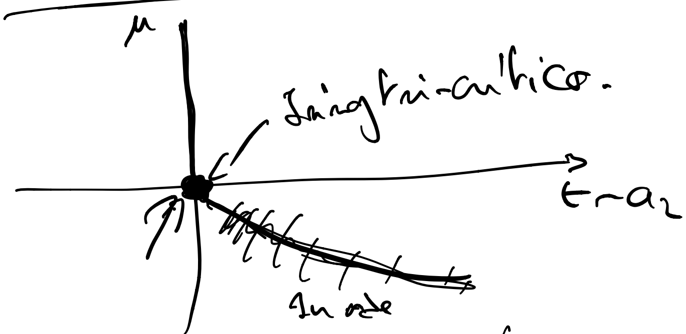
$D<4$: irrelevantes.

$\phi^4 \cdot \phi^4 \to \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \dots$

$\phi^4 \phi^6 \to \phi^2, \phi^4, \phi^6, \phi^8, \dots$

ejemplo, Ising tri-crítico

$S_{GL} = \boxed{\int d^D\vec{r} \left[\frac{K}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + u_6\phi^6 \right]} + \cancel{\phi^4} + \cancel{\phi^2}$



$\phi^6 \cdot \phi^6 \to \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \dots$

ejemplo el modelo O(n)

$$S = \int d^D \vec{r} \left[\frac{1}{2} \sum_{\mu}^{d} (\partial_\mu \vec{\phi})^2 + \frac{t}{2} \vec{\phi}^2 + u (\vec{\phi}^2)^2 \right]$$

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \Leftarrow n = 1 = \text{Ising.}$$

$$(\vec{\phi}^2)^2 \; (\vec{\phi}^2)^2 \longrightarrow (\vec{\phi}^2)^2$$

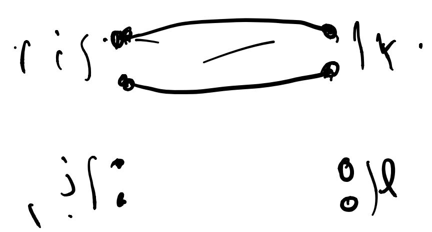
$$\left(\sum_i \phi_i^2\right)\left(\sum_j \phi_j^2\right) \quad \left(\sum_k \phi_k^2\right)\left(\sum_l \phi_l^2\right)$$

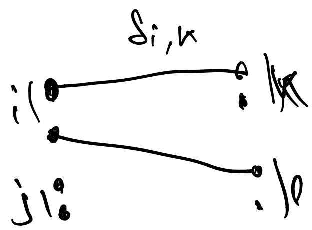
$\langle \phi_i(\vec{r}) \phi_k(\vec{r}') \rangle \neq 0$ si $i = k$

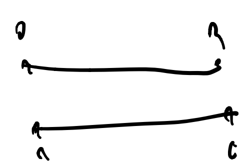
$i = k = 1, \dots, n$

$2 \times 2 \times 2 \times n$

$\rightarrow 8n$ termes.



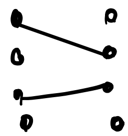




c indep de n.

$$\boxed{C_{\mu\mu\mu}} = 8n + c \qquad c?$$

Caso particular de Ising $(n=1)$



$$\frac{(4.3.)^2}{2} = 72$$

C_{uuu} para $n=1$ vale $72 \Rightarrow C = 64$

$$C_{uuu} = 8(n+8)$$

→ R.G. en la línea crítica $t_{eff} = 0$

$$\frac{du}{dl} = (D - x_{\phi^4})u - \frac{1}{2} C_{uuu}\, u^2$$

$$D - x_{\phi^4} = \epsilon$$

$$\frac{du}{dl} = \epsilon u - 4(n+8)\, u^2$$

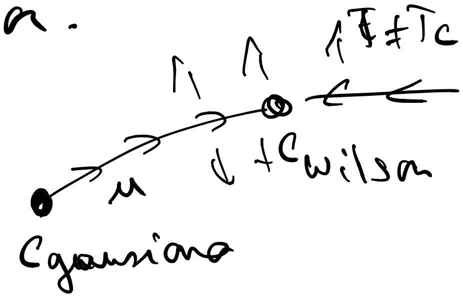
punto fijo $u^* = \dfrac{\epsilon}{4(n+8)}$

escribimos $u = u^* + \delta u$

$$\frac{d\delta u}{dl} = \epsilon\, \delta u - 8(n+8)\, u^* \delta u$$
$$= \epsilon\, \delta u - 2\epsilon\, \delta u$$
$$= -\epsilon\, \delta u$$

$$\delta u \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

u^* es un punto fijo atractivo en esa dirección.



Si hay varias constantes:

$$\frac{dg_k}{dl} = (D-x_k)g_k - \frac{1}{2}\sum_{ijk} g_i g_j c_{ijk}$$

→ punto fijo g_i^* $\forall q$

$$\forall k \quad (D-x_k)g_k^* - \frac{1}{2}\sum_{ijk} g_i^* g_j^* c_{ijk} = 0$$

si $g_i = g_i^* + \delta g_i$ y linealizamos.

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix}\delta g_1\\ \vdots\\ \delta g_N\end{pmatrix} = M^*\begin{pmatrix}\delta g_1\\ \vdots\\ \delta g_N\end{pmatrix}$$

$$M_{ij}^* = (D - x_i)\,\delta_{ij} - \sum_l C_{lji}\, g_l^*$$

→ se ven los autovales de M^*

→ los autovales negativos

→ perturbacions irrelevantes

→ los positivos

→ perturbacions relevantes.

para Ising : ajustan a_2 ó t

" Ising tri-crítico : ajustan a_2/t y μ/a_4

Isin multi-crítico :

$$\int d^d r \left[\frac{k}{c} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \mu_{2n}\, \phi^{2n} \right]$$

$n = 2$ Ising.

$n = 3$ Isin-tri.

$n = 4$ Isin tetra

⋮

Propiedades de los puntos críticos de reacciones locales. (Polyakov 1969 - 1970)

un sistema homogéneo, isotrópico.

→ inv. por translación, y por rotación.

- inv. tras $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{u}$
- inv. rotaciones $\vec{r} \to R\vec{r}$

punto crítico
- dilataciones $\vec{r} \to b\vec{r}$

→ invariancia : transf. conforme espacial

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2} \; ; \; \vec{r}' \to \vec{r}'' = \vec{r}' + \vec{u}$$

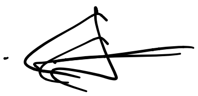
$$\vec{r}'' \to \vec{r}''' = \frac{\vec{r}''}{\|\vec{r}''\|^2} \; ; \; \vec{r} \to \frac{\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2} + \vec{u}}{\left\| \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2} + \vec{u} \right\|^2}$$

esto implica que:

$S_0 \to \{ \Phi_i(\vec{r}) \}$

δ de Kronecker

$$\langle \Phi_i(\vec{r}_1) \, \Phi_j(\vec{r}_2) \rangle = \frac{\delta_{x_i, x_j}}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^{2x_i}} \quad (1)$$

$$\left\langle \Phi_i(\vec r_1)\,\Phi_j(\vec r_2)\,\Phi_k(\vec r_3)\right\rangle$$ 

(2)

$$= \frac{C_{ijk}}{\|\vec r_{12}\|^{x_i+x_j-x_k}\,\|\vec r_{23}\|^{x_j+x_k-x_i}\,\|\vec r_{13}\|^{x_i+x_k-x_j}}$$

$$\vec r_{\alpha\beta} = \vec r_\alpha - \vec r_\beta$$

para (1):

$$\vec r \to b\vec r \qquad \phi_i \to b^{x_i}\phi_i$$

para una T. C. esp. infinitesimal. ($\vec u$ infinit.)

$$\vec r''' = \vec r + \delta\vec r \quad \text{y} \quad \delta\vec r = r^2\vec u - 2(\vec u\cdot\vec r)\vec r + O(u^2)$$

una traslación infint. $\delta\vec r = \vec u$

una dilat infsin $b = (1+\delta\lambda)$ $\delta\vec r = \delta\lambda\,\vec r$

$$\delta\vec r = \underbrace{\vec r^2\vec u}_{\text{traslación local.}} - \underbrace{2(\vec u\cdot\vec r)\vec r}_{\text{dilatación local.}} + O(u^2)$$

$$(d\vec r''')^2 = \underline{\left(1-4(\vec u\cdot\vec r)\right)}\,d\vec r^2 + O(u^2)$$

$$b = \left(1 - 2(\vec{\mu}\cdot\vec{r})\right)$$

$$\langle \phi_i(\vec{r}_1)\, \phi_j(\vec{r}_2) \rangle = f(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|)$$

inv. por trasl. y rot.

$$\vec{r} \to b\vec{r} \quad \phi_i(\vec{r}) \to b^{x_i} \phi_i(b\vec{r})$$

por la T. C. Esp. infinit.

$$\phi_i(\vec{r}_1) \to \left[1 - 2x_i(\vec{\mu}\cdot\vec{r}_1)\right] \phi_i(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1)$$

idem $\phi_j(\vec{r}_2)$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad y \quad r = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|, \quad \delta\vec{r} = \delta\vec{r}_1 - \delta\vec{r}_2$$

$$f(r) \to \left(1 - 2x_i(\vec{\mu}\cdot\vec{r}_1)\right)\left(1 - 2x_j(\vec{\mu}\cdot\vec{r}_2)\right) f(\|\vec{r} + \delta\vec{r}\|)$$

$$f(r) \to f(r) + \delta f(r)$$

$$\delta f = \left[-2x_i(\vec{\mu}\cdot\vec{r}_1) - 2x_j(\vec{\mu}\cdot\vec{r}_2)\right] f + \delta\vec{r}\cdot\nabla f = 0$$

invariante

resulta que $\delta\vec{r} = -(\vec{\mu}\cdot\vec{r}_1 + \vec{\mu}\cdot\vec{r}_2)\,\vec{r}$

sea que $\delta\vec{r}\cdot\nabla f = -(\vec{\mu}_1\vec{r}_1 + \vec{\mu}_2\vec{r}_2)\, r\frac{\partial f}{\partial r}$

$\delta f = 0 \iff x_i = x_j$ y $f(r) = \frac{dre}{r^2 x_i}$

invariancia de escala:

$\forall D$ inv. de escala implica la invariancia por el grupo conforme.

$$(d\vec{r})^2 \to (d\vec{r}\,')^2 = f(\vec{r})\, d\vec{r}^2$$

$$\vec{r} \to \vec{r}\,'$$

métrica $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow f(\vec{r}) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

Pero, para $D=2$, el grupo conforme es de dim. ∞!

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to z = x + iy$$

$\forall f$ holomorfa.

$z \to f(z)$ es una T. C.

$$g \to |f'(z)|^2 g.$$

"en 2-D, los puntos críticos tienen una "infinidad" de simetrías

→ Teorías Conformes en 2-D.

→ informaciones exactas para un gran número de modelos (Ising, Ising multicrít..)

Modelo de Potts.

σ : puede tener $\underline{q}$ valores diferentes

$$H_{Potts} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \delta_{\sigma_i,\sigma_j}$$

$$q = 3$$

$$\bar{\phi} \to \Omega \bar{\phi}$$

$$\phi \to -\phi$$

simetrías espaciales.