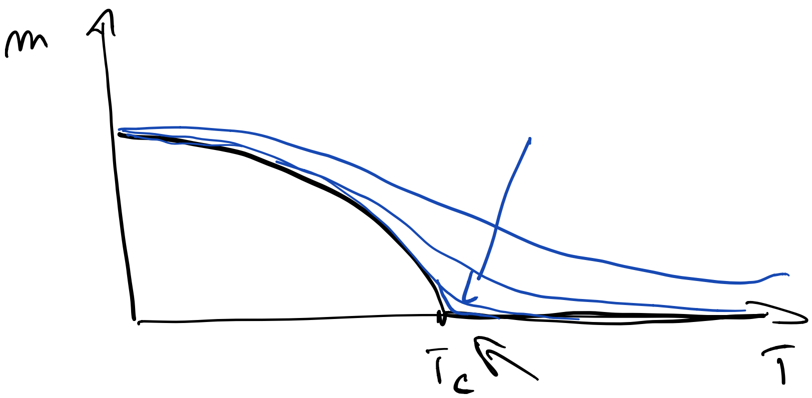
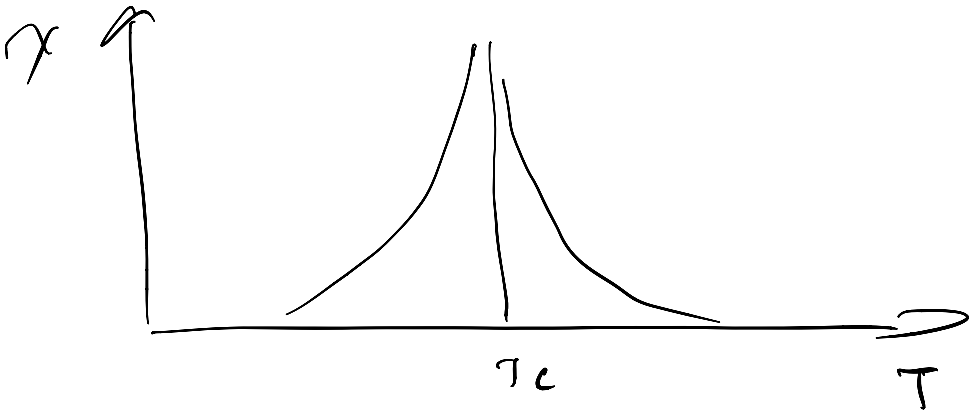
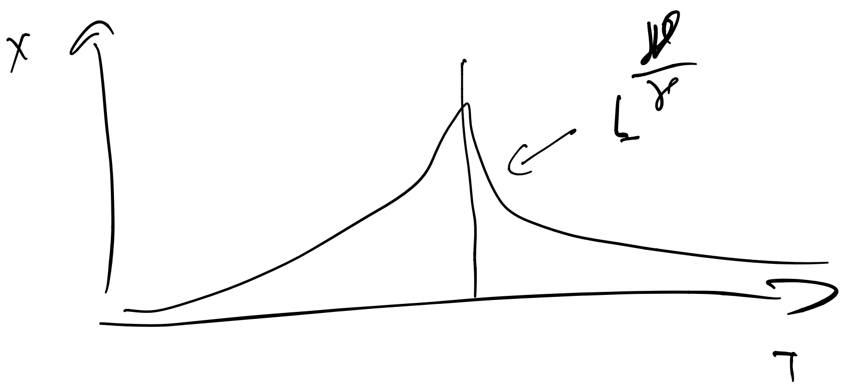
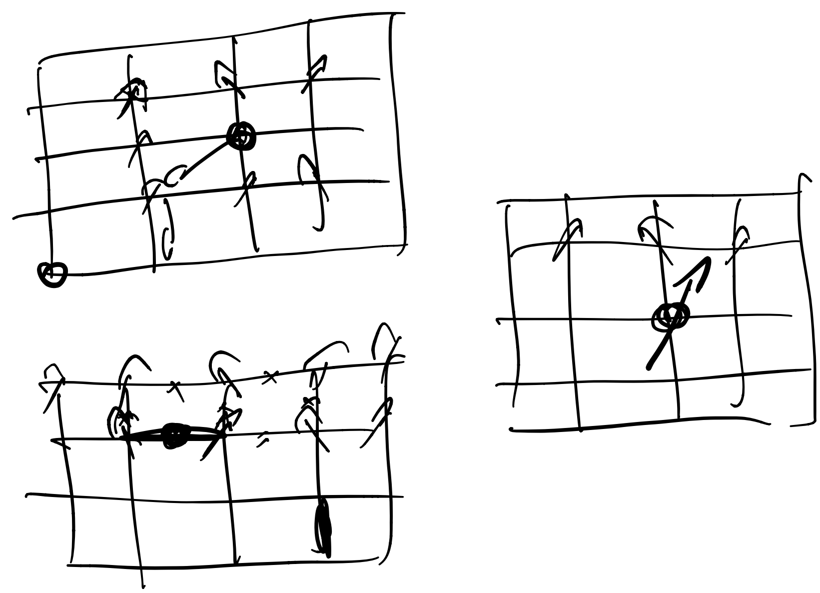

m
T
Tc


χ
Tc
T


χ
L
T

3] Sistemas con impurezas y desordenados

→ impurezas dinámicas vs estáticas o "congelados".



Si la escala de tiempo de los espines y las impurezas son comparables.

→ impurezas dinámicas.

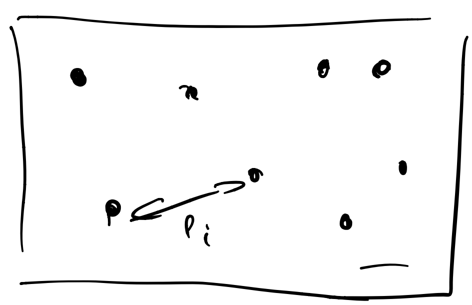
$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{imp\}} e^{-\beta H(\{\sigma\},\{imp\})}$$

Típicamente, hay una gran separación

entre las escalas de tiempo.

→ impurezas estáticas ó "congelados".

→ Aquí, iremos a estudiar estas impurezas "quenched".



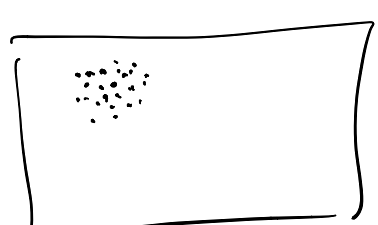
densidad finita y no nula de impurezas.

→ No hay más las simetrías espaciales (translación, rotación . .)

→ escala característica ℓ_i : espaciamiento típico entre impurezas.

a_0 y ℓ_i

Si estudiamos el sistema a escalas $L \gg \ell_i$



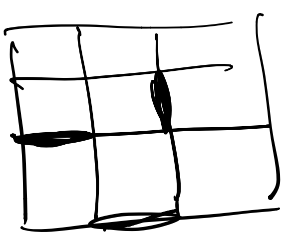
→ "De lejos", las impurezas "se promedian".

→ impurezas ⇒ una componente aleatoria en el H microscópico.

Para las cantidades termodinámicas se promedian.

Por ejemplo, en modelo de Ising.

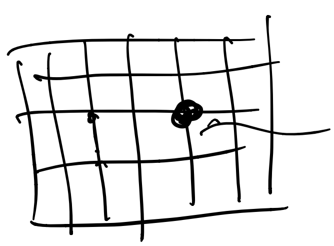
impurezas que preservan la simetría del parámetro de orden:



variable aleatoria

$$H = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij}\, \sigma_i \sigma_j$$

Sim. $\mathbb{Z}_2$



$$H = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij}\, \sigma_i \sigma_j \epsilon_i \epsilon_j$$

Sim. $\mathbb{Z}_2$

$$\forall i : \epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{con proba } 1-p \\ 0 & \text{" " } p \end{cases}$$

q

J_{ij} o ϵ_i son variables aleatorias.

$\rightarrow P(J)$ ó $P(\epsilon)$

$\mathcal{P}(\{J_{ij}\})$ ó $\mathcal{P}(\{\epsilon_i\})$

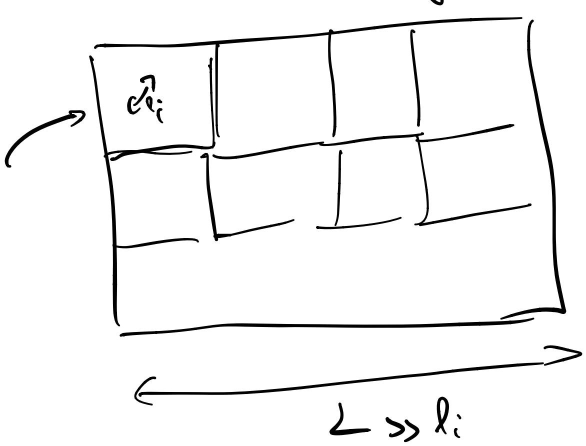
$$\mathcal{P}(\{J_{ij}\}) = \prod_{\langle ij \rangle} P(J_{ij}) \qquad \mathcal{P}(\{\epsilon_i\}) = \prod_i P(\epsilon_i)$$

las cantidades termodinámicas:

a partir F , $\frac{\partial F}{\partial \dots}$,

$\overline{F}$ ← esto es lo que hay que calcular

criterio de "Self-averaging" o "Auto-promediado"



Cada bloque lo veo como un sistema con una representación particular de impurezas.

$$\int \prod_{i<j} dJ_{ij}\, \mathcal{P}(\{J_{ij}\})\ F$$

Lamentablemente no es $\overline{Z}$ lo que tenemos que calcular sino $\overline{\ln Z}$ ¡!

¿Cómo vamos a hacer?

$$\boxed{\ln Z = \lim_{n\to 0} \frac{Z^n - 1}{n}}$$

→ El método de las réplicas.

Se estudia n copias del mismo sistema (n es entero)

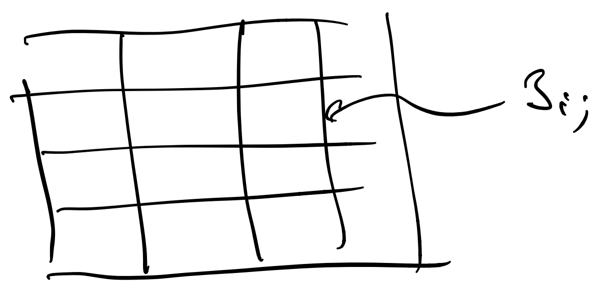
→ Z^n y luego se calcula

$\overline{Z^n}$ → se calculan las cantidades físicas $\mathcal{O}(n)$ y si la dependencia en n es analítica, se toma el límite $\lim_{n\to 0} \mathcal{O}(n)$

ejemplo $\Gamma(n) = (n-1)!$

→ A veces hay problemas: $\Theta(n)$ no es analítica en n → el método de las réplicas no es válido.

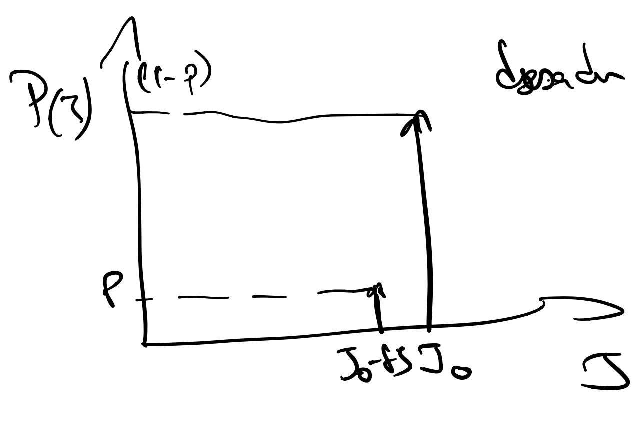
Ejemplo: Modelo de Ising con acoples aleatorios



$$H = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij}\, \sigma_i \sigma_j$$

variable aleatoria dada por $P(J)$

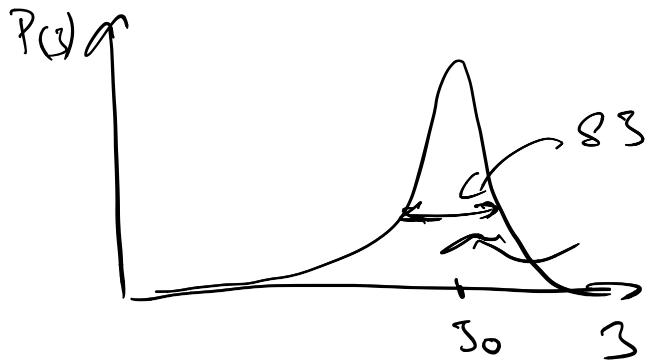
desorden "débil"



$p \ll 1$

$\delta J \ll J_0$

$$\frac{J}{k_B T}$$



$\delta\xi \ll \xi_0$

$$S_{GL} = \int d^d\vec{r}\left[\frac{K}{2}(\nabla\phi)^2 + \left(\frac{a_2 + h(\vec{r})}{2}\right)\phi^2 + \frac{a_4}{4}\phi^4 + \dots\right]$$

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \; e^{-S_{GL}}$$

$$Z^n = \int \prod_a \mathcal{D}\phi_a \; e^{-\int d^d\vec{r}\sum_a\left[\frac{K}{2}(\nabla\phi^a)^2 + \left(\frac{a_2 + h(\vec{r})}{2}\right)\phi^{a\,2} + \frac{a_4}{4}(\phi^a)^4\right]}$$

$a = 1, \dots, n$

aquí el desorden, viene representado por $h(\vec{r})$

$\rightarrow P(h(\vec{r}))$ $\qquad \overline{h(\vec{r})} = 0$

$$\overline{h(\vec{r})\,h(\vec{r}')} = \sigma\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

Y calculamos

$$\overline{Z^n} = \int \mathcal{D}\phi_a \, e^{-\int d^D r \sum_a \left[\frac{K}{2}(\nabla\phi^a)^2 + \frac{a_2}{2}\phi^{a^2} + \frac{a_4}{4}\phi^{a^4}\right]} \cdots$$

$$\cdots \int \prod_{\vec r} d d(\vec r)\, P(d(\vec r))\, e^{-\int d^D r \frac{d(\vec r)}{2}\sum_a \phi^{a2}(\vec r)}$$

$$\int dx\, P(x)\, e^{-\frac{1}{2} x A} = e^{-\frac{1}{2}\cancel{\bar x} A + \frac{1}{8}\underbrace{(\overline{x^2} - \cancel{\bar x^2})}_{\sigma} A^2 + \cdots} \qquad A = \sum_a \phi^a(\vec r)^2$$

$$\Rightarrow \overline{Z^n} = \int \prod_{a=1}^{n} \mathcal{D}\phi_a \, e^{-S^R_{GL}}$$

donde

$$S^R_{GL} = \int d^D r \left\{ \sum_a \frac{K}{2}(\nabla\phi^a)^2 + \frac{a_2}{2}\phi^{a^2} + \frac{a_4}{4}\phi^{a^4} - \frac{\sigma}{8}\sum_{a,b}\phi^{a^2}\phi^{b^2} + O(\phi^6) \right\}$$

$\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n$

$\phi^2, \phi^3, \dots, \phi^n, \phi^1, \dots$

Sim de permutación de n elementos.

acopla los diferentes réplicas

→ se parece al modelo $O(n)$

$$\int d^D\vec{r} \left\{ \sum_a (\vec{\nabla}\phi^a)^2 + \frac{a_2}{2}\vec{\phi}^2 + \frac{a_4}{4}\underbrace{\left(\vec{\phi}^2\right)^2}_{= \sum_a \phi^{a2} \text{ sin } O(n)} \right\}$$

El criterio de Harris:

Para desordenes que preservan la simetría del param. de orden.

Si S_0 representa la acción de un punto crítico.

$\to$ desorden

$$S = S_0 + \int d^D\vec{r}\, g(\vec{r})\, \phi_E(\vec{r})$$

$\uparrow$ operador térmico.

$$[\phi_E] = L^{-x_E}, \quad x_E = D - \frac{1}{\nu}$$

y aquí $g(\vec{r})$ $\quad \overline{g(\vec{r})} = 0$ y $\overline{g(\vec{r})\, g(\vec{r}')} = \Delta\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

(réplicas

$$Z^n = \int \mathcal{D}\phi_a\, e^{-\sum_{a=1}^{n} S_0^a - \int d^D\vec{r}\, g(\vec{r}) \sum_a \phi_E^a(\vec{r})}$$

$$\overline{Z^n} = \int \prod_a \mathcal{D}\phi_0 \, e^{-\sum_{a=1}^{n} S_0^a} \int \prod_{\vec{r}} dg(\vec{r}) \, P(g(\vec{r})) \, e^{-\int d^D\vec{r}\, g(\vec{r}) \sum_a \phi_\varepsilon^a(\vec{r})}$$

$$\overline{Z^n} = \int \prod_a \mathcal{D}\phi_a \, e^{\underline{-\sum_a S_0^a + \frac{1}{2}\sigma \sum_{a,b} \int d^D\vec{r}\, \phi_\varepsilon^a(\vec{r})\, \phi_\varepsilon^b(\vec{r})}}$$

hacer R.G. para $\sum_a S_a^0 - \frac{1}{2}\sigma \underbrace{\sum_{a,b} \int d^D\vec{r}\, \phi_\varepsilon^a(\vec{r})\, \phi_\varepsilon^b(\vec{r})}_{\Phi_{pert.}}$

O.P.E.

si $a=b$ $\underline{\phi_\varepsilon^a \phi_\varepsilon^a} \to \underline{cte}\, \phi_\varepsilon^a + \dots$

corrimiento de T_c

y queda, si $a \neq b$

$$\underline{\sigma \sum_{a\neq b} \phi_\varepsilon^a \phi_\varepsilon^b = \Phi_{perturbación}}$$

$$[\Phi_{pert}] = L^{-2x_\varepsilon}$$

R.G. $\frac{d\sigma}{dl} = (D - 2x_\varepsilon)\, \sigma$

Pero $x_\varepsilon = D - \frac{1}{\nu}$

$\frac{2}{\nu} - D = \frac{\alpha}{\nu}$

$\nu d = 2 - \alpha$

$$\frac{d\sigma}{dl} \sim \frac{\alpha}{\nu}\sigma$$

El signo de α nos dice si la perturbación es relevante o irrelevante en el sentido de R.G.

* si $\alpha > 0$ → perturbación relevante → El desorden **cambia** la clase de universalidad con respecto al sistema puro.

* si $\alpha < 0$ → las impurezas no cambian la clase de universalidad.

Criterio de Harris.

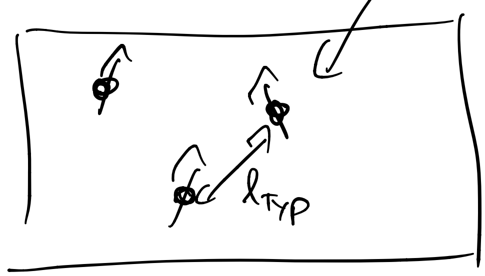
Por ejemplo

	2D	3D
Ising	$\alpha = 0$	$\alpha \simeq 0{,}11$ ⇐
xy O(2)	x K.T.W.	$\alpha \simeq -0{,}01$
Heisenberg O(3)	x	$\alpha \simeq -0{,}12$

4] Vidrios de Spin S.G.

→ Desorden fuerte.

momentos magnéticos en posiciones aleatorias

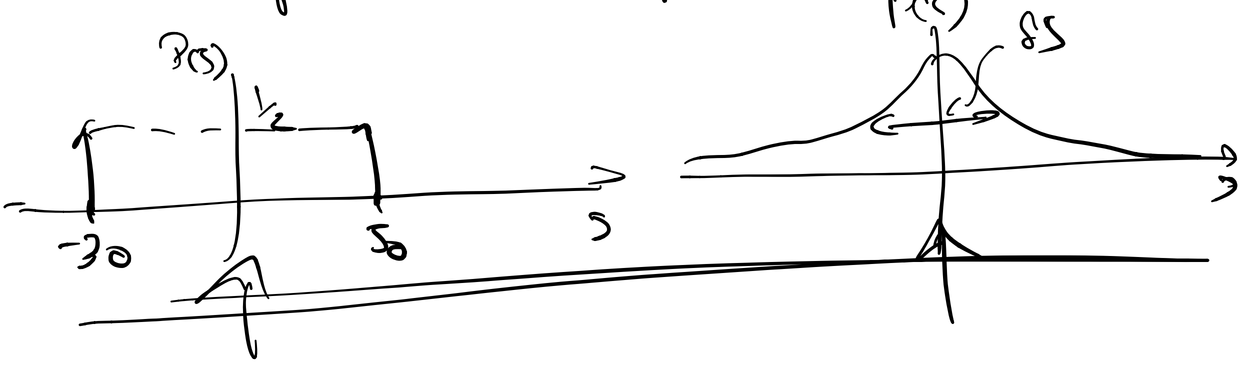


$$H = \sum_{i,j} J_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$$

$$J_{ij} \sim \frac{\cos(2k_F R)}{R^3} \quad > 0 \text{ o } < 0$$

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} \ll l_{typ}$$

→ $P(J)$ donde $J<0$ tiene + o - menos la misma probabilidad que $J>0$.



↳ Simetría $\mathbb{Z}_2$ local (de Gauge)

$$H = \sum_{i,j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

$\forall i \quad \sigma_i \to \epsilon_i \sigma_i \quad$ donde $\epsilon_i = \pm 1$

$$\hookrightarrow H = \sum_{i,j} J_{ij} \epsilon_i \epsilon_j \sigma_i \sigma_j = \underline{\sum_{i,j} \hat{J}_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

$$\underline{\hat{J}_{ij} = J_{ij} \epsilon_i \epsilon_j}$$

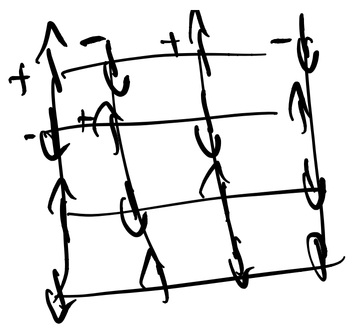
para $\hat{J} > 0$ o < 0 son igual de probables.

$$P(\hat{J}) = P(J) \qquad \underline{P(-J) = P(J)}$$

→ No puede haber orden Ferro.

$$\underline{m = \frac{1}{N} \sum_i \langle \sigma_i \rangle = 0}$$

Comparar con el caso de un A.F. en una red bi-partita orden de Néel



$$m_{AF} = \frac{1}{N}\sum_i (-1)^{\alpha_i} \langle \sigma_i \rangle \neq 0$$

$\alpha_i = 0$ si $i \in$ Subred A
$= 1$ si $i \in$ Subred B

→ nuevo parámetro de orden:

$$q = \frac{1}{N}\sum_i \langle \sigma_i \rangle^2$$

Parámetro de orden de Edwards-Anderson.

def **Fase Ferro**

$m \neq 0$ solamente si $\overline{J} \neq 0$
$q \neq 0$

Fase B.G.

$m = 0$
$q \neq 0$

Ejemplo, Aproximación de M.F.

Red con z vecinos.

$$H = -\sum_{\langle i,j\rangle} J_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$$

J_{ij} variables aleatorias con $P(J)$

t.q. $\overline{J} = J_0$ y $\overline{J^2} = z\tilde{J}^2$

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta H}$$

$$Z^n = \sum_{\{\sigma_i^a\}} e^{\beta \sum_{\langle ij\rangle}\sum_a \sigma_i^a \sigma_j^a J_{ij}}$$

$$\overline{Z^n} = \sum_{\{\sigma_i^a\}} e^{\beta J_0 \sum_a \sum_{\langle ij\rangle} \sigma_i^a \sigma_j^a + \beta^2 \tilde{J}^2 \sum_{\langle ij\rangle} \sum_{a,b} \sigma_i^a \sigma_j^a \sigma_i^b \sigma_j^b}$$

$$\rightarrow H_{eff} = -\sum_{\langle ij\rangle} \left(J_0 \sum_a \sigma_i^a \sigma_j^a + \beta \tilde{J}^2 \sum_{ab} \sigma_i^a \sigma_j^a \sigma_i^b \sigma_j^b \right)$$

$$m_i^a = \langle \sigma_i^a \rangle$$

$$q_i^{ab} = \langle \sigma_i^a \sigma_i^b \rangle \quad a \neq b$$

(E.A.)

$$\sigma_i^a = m_i^a + \delta\sigma_i^a$$

$$\cancel{\delta\sigma_i^a \, \delta\sigma_j^a}$$

$$\sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^a \sigma_j^a \rightarrow \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\sigma_i^a m_j^a - \frac{m_i^a m_j^a}{2} \right)$$

$$\sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i^a \sigma_j^a \sigma_i^b \sigma_j^b$$

$$\rightarrow \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\sigma_i^a \sigma_i^b q_j^{ab} - \frac{q_i^{ab} q_j^{ab}}{2} \right)$$

Si suponemos que los m_i^a y q_i^{ab} son indep. de la posición

$$\overline{Z^n_{MF}} = \overline{\sum_{\{\sigma_i^a\}}} e^{-\beta N H_{MF}}$$

donde $H_{MF} = -J_0 z \sum_a \sigma^a m^a - \frac{m^{a^2}}{2}$

$$-\beta \tilde{J}^2 z \sum_{a,b} \left(\sigma^a \sigma^b q^{ab} - \frac{q^{ab^2}}{2}\right)$$

$\sigma^1 \; \sigma^2 \; \dots \; \sigma^n$

$$m^a = \frac{\sum_{\{\sigma^a = \pm 1\}} e^{-\beta H_{MF}} \sigma^a}{\sum_{\{\sigma^a = \pm 1\}} e^{-\beta H_{MF}}}$$

$$q^{ab} = \frac{\sum_{\{\sigma^a = \pm 1\}} e^{-\beta H_{MF}} \sigma^a \sigma^b}{\sum_{\{\sigma^a = \pm 1\}} e^{-\beta H_{MF}}}$$

Ansatz simétrico para las réplicas

$\forall a = 1, .., n \quad m^a = m, \quad q^{ab} = q \;\; \forall a, b$

$$\sum_{a,b} \sigma^a \sigma^b q^{ab} \to q\left(\sum_a \sigma^a\right)^2$$

y usando $$e^{\mu x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{\left(-\frac{y^2}{2} + (2\mu)^{1/2} x y\right)}$$

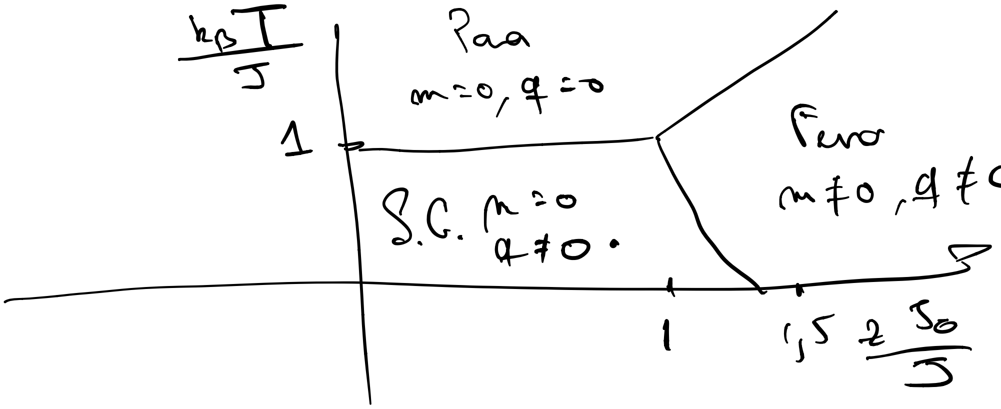
con $x = \sum_a \sigma^a$ y $\mu = \beta^2 \frac{J^2}{2} q$

$$\underline{\bar{F} = N\left[\frac{J m^2}{2} - \frac{\beta J^2}{4}(1-q)^2 - k_B T \int_{-\infty}^{+\infty} dh\, P(h) \ln(2\cosh\beta h)\right]}$$

con $$P(h) = (2\pi J q^2)^{-1/2}\, e^{-\frac{(h - J_0 m)^2}{2 J q^2}}$$

y las cond. de consistencia

$$\boxed{\begin{aligned} m &= \int_{-\infty}^{\infty} dh\, P(h) \tanh(\beta h) \\ q &= \int_{-\infty}^{\infty} dh\, P(h) \left(\tanh(\beta h)\right)^2 \end{aligned}}$$



Obs el Ansatz de simetría de réplicas

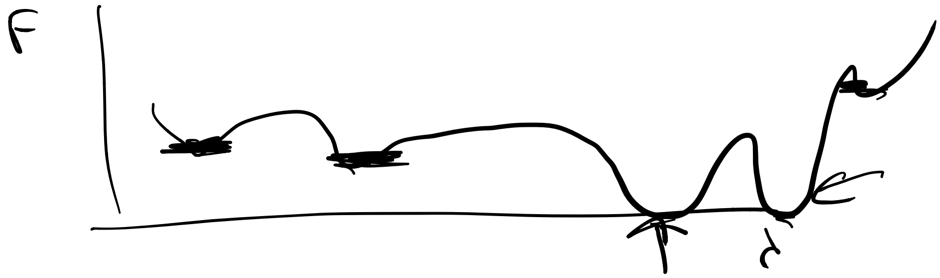
$$m^a = m \ \forall a \qquad \underline{q^{ab} = q} \ \forall a,b$$

→ la solución de M.F. no es estable bajo fluctuaciones.

→ Ansatz de ruptura de la simetría de las réplicas (Parisi)!

→ revelador de la presencia de muchos mínimos locales de la energía libre.

→ Dinámica fuera del equilibrio termodinámico



→ analogía con los vitrios estructurales.