

Electrodinámica perturbativa

Algunos elementos

J. Stephany¹

¹Departamento de Física
Universidad Simón Bolívar
Caracas, Venezuela

LA-CoNGA, Módulo de Teoría, Clase 21



Table of Contents

- 1 Campos Libres
- 2 Electrodinámica cuántica
- 3 Reglas de Feynman
- 4 Aplicaciones



Comencemos recordando de la clase 19 la notación y convenciones para el campo de Dirac (los números corresponden a las notas de esa clase):
La ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (1.9)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (1.11)$$

El Lagrangiano libre

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (1.42)$$



La representación de las matrices γ

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho$$

El proyector de espín en el sistema en reposo

$$P(\mathbf{e}_z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} + \sigma_z & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} - \sigma_z \end{pmatrix}$$



Soluciones libres

Después del cambio de notación $\omega \rightarrow u, v$ las soluciones libres de energía positiva y proyección definida del espín son

$$u(p, +) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u(p, -) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Las soluciones libres de energía negativa son

$$v(p, -) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(p, +) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{+s} = e^{-ipx} u(p, s), \quad \psi_{-s} = e^{ipx} v(p, s), \quad E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$



El campo de Dirac

Con estos elementos se construye el campo de Dirac.

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{s}} \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \left(\hat{b}(\vec{p}, \mathbf{s}) u(\vec{p}, \mathbf{s}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + \hat{d}^{\dagger}(\vec{p}, \mathbf{s}) v(\vec{p}, \mathbf{s}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} \right)$$

Llamamos $\hat{b}(\vec{p}, \mathbf{s})$ al operador de aniquilación de electrones para que la notación y convenciones coincida con la de los libros de Schweber, Bjorken & Drell y Kaku entre otros. Peskin & Schroeder y Schwartz usan una representación diferente de las matrices γ y una normalización diferente de las soluciones.

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{\mathbf{s}} \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E}} \left(\hat{b}^{\dagger}(\vec{p}, \mathbf{s}) \bar{u}(\vec{p}, \mathbf{s}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + \hat{d}(\vec{p}, \mathbf{s}) \bar{v}(\vec{p}, \mathbf{s}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} \right)$$



Anticonmutadores

El anticonmutador a tiempos iguales,

$$\{\hat{\psi}(x^0, \vec{x}), \hat{\psi}^\dagger(x^0, \vec{x}')\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (1.62)$$

Para los modos

$$\{\hat{b}(\vec{p}, s), \hat{b}^\dagger(\vec{p}', s')\} = \delta_{ss'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad , \quad \{\hat{d}(\vec{p}, s), \hat{d}^\dagger(\vec{p}', s')\} = \delta_{ss'} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$

El anticonmutador

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)\} = iS(x - y) = i(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Delta(x),$$

Ordenamiento temporal

$$T\{\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y)\} = \begin{cases} \hat{\psi}(x)\hat{\psi}(y) & \text{for } x^0 > y^0 \\ -\hat{\psi}(y)\hat{\psi}(x) & \text{for } x^0 < y^0 \end{cases}$$



El propagador de Dirac,

$$\langle 0|T\{\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x')\}|0\rangle = iS_F(x-x'). \quad (1.94)$$

En el espacio de momentos

$$iS_F(x) = i \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = i \frac{(\not{p} - m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



$$iS_F(x) = i \frac{(\not{p} - m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



El campo de Maxwell

Las soluciones clásicas

$$A_\mu(x) = \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) e^{-ik_\nu x^\nu} \quad , \quad k_0 = E = |\vec{k}|$$

El campo de Maxwell.

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_\lambda \int d^3k \frac{\varepsilon_\lambda^\mu(\vec{k})}{\sqrt{2E}} \left(\hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-ik_\nu x^\nu} + \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k}) e^{ik_\nu x^\nu} \right) \quad (2.34)$$

Las relaciones de conmutación

$$\left[\hat{a}_{\lambda\vec{k}}, \hat{a}_{\tau\vec{k}'}^\dagger \right] = \eta_{\lambda\tau} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$



El propagador de Maxwell

Restricción en el espacio de estados

$$\partial^\mu \hat{A}_\mu^+ |\Psi\rangle = 0 \longrightarrow \langle \Psi | \partial^\mu \hat{A}_\mu | \Psi \rangle = 0$$

El propagador de Feynman

$$\langle 0 | T \{ \hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x') \} | 0 \rangle = \lim_{m \rightarrow 0} (-\eta^{\mu\nu} \Delta_F(x - x')) = iD_F^{\mu\nu}(x - x')$$

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{-\eta^{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} \quad (2.43)$$

En el espacio de momentos

$\mu \sim \text{~~~~~} \nu$

$$iD_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{i\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$



Invariancia de calibre

La conservación de la carga eléctrica requiere que la interacción entre el campo electromagnético y el campo de Dirac se haga en forma invariante bajo la transformaciones de calibre

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$
$$\psi' = e^{-ie\Lambda} \psi \quad , \quad \bar{\psi}' = e^{ie\Lambda} \bar{\psi},$$

Como en el caso escalar esto se logra haciendo el acoplamiento mínimo

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

El lagrangiano de electrodinámica cuántica es

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi,$$

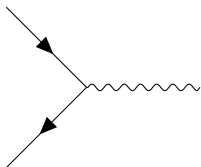


El hamiltoniano de interacción

El hamiltoniano de interacción es

$$H_I = e \int d^3x \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$$

El vertice de interacción



$$-ie\gamma_\mu$$



Clase 10

Recap clases 8,9

Funciones de correlación de n-puntos

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle \quad , \quad \phi(x) = \phi_H(x)$$
$$= \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \exp(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I) \} | 0 \rangle}$$

= suma de todos los diagramas
conectados con n puntos externos
sin burbujas de vacío

Clase 10

Scattering $A+B \rightarrow 1+2+\dots+n$

matriz S

$$S_{fi} = \langle f | i \rangle_{out}$$

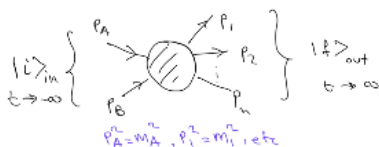
$$S_{fi} = S_{fi} + i \mathcal{E}_{fi}, \quad \mathcal{E}_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_i) M_{fi}$$

sección eficaz diferencial

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{(2E_A)(2E_B)|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} d\mathcal{T}_{LIPS}$$

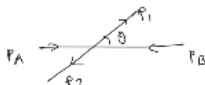
$$d\mathcal{T}_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_i) \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n}$$

invariante de Lorentz



$A+B \rightarrow 1+2$ en CM
si $m_1 = m_2 = m_A = m_B$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}$$



Clase 10

Fórmula de reducción de LSZ (Lehman-Symanzik-Zimmermann)

$i\tilde{\mathcal{E}}_f$ se obtiene a partir de

$$G^{(n+2)}(\underbrace{x_A, x_B}_i, \underbrace{x_1, \dots, x_n}_f) = \langle \Omega | T \{ \phi(x_A) \phi(x_B) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

$$\langle \bar{p}_1 \bar{p}_2 \dots \bar{p}_n | i\tilde{\mathcal{E}} | \bar{p}_A \bar{p}_B \rangle$$

$$= (i \int d^4 x_1 e^{i p_1 x_1} (\Box_1 + m^2)) (i \int d^4 x_2 e^{i p_2 x_2} (\Box_2 + m^2)) \dots (i \int d^4 x_n e^{i p_n x_n} (\Box_n + m^2))$$

$$(-i \int d^4 x_A e^{-i p_A x_A} (\Box_A + m^2)) (-i \int d^4 x_B e^{-i p_B x_B} (\Box_B + m^2)) G^{(n+2)}(x_A, x_B, x_1, \dots, x_n)$$

demo: ver Schwartz, sec. 6.1

Clase 10

En conclusión

$$i \mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_A + P_B - \sum P_f)$$

= suma de todos los diagramas de Feynman completamente conectados y amputados, con P_A, P_B entrantes, P_1, \dots, P_n salientes

Reglas (para $\lambda \phi^4$)

1) por cada propagador $\xrightarrow{p} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

2) por cada vértice $\begin{matrix} p_1 \swarrow & p_2 \swarrow \\ \nearrow & \nearrow \\ p_3 & p_4 \end{matrix} (-i\lambda)$, se impone conservación de momento

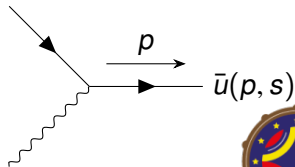
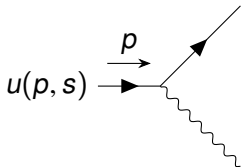
3) por cada pata externa $\begin{matrix} \rightarrow & \leftarrow \end{matrix} = 1$

4) se integra sobre el momento (indeterminado) de cada lazo $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

5) se divide por el factor de simetría

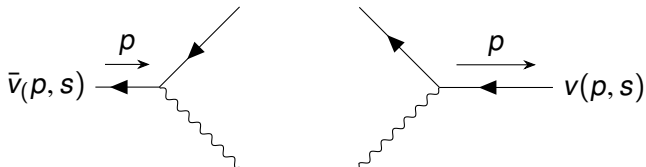
Reglas de Feynman

- Para calcular la amplitud a orden n de un proceso se parte de los trazos que representan los propagadores y del vertice que representa la interacción y se dibujan todos los diagramas de n vértices completamente conectados y amputados con los momentos entrantes y salientes que nos interesan.
- Las líneas externas de electrones que entran en un gráfico llevan un factor $u(p, s)$ correspondiente a su momento y a su espín y las que salen un factor $\bar{u}(p, s)$.



Reglas de Feynman

- Las líneas externas de positrones que entran en un gráfico llevan un factor $\bar{v}(p, s)$ y las que salen un factor $v(p, s)$. La dirección de las líneas de los positrones es opuesta a la de los electrones. Un positrón que entra en el diagrama tiene un momento saliente



- Las líneas externas de los fotones van multiplicadas por el vector de polarización $\varepsilon^\lambda(p)$

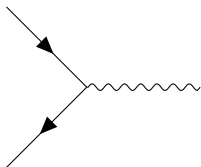


Reglas de Feynman

- Un factor relativo -1 aparece entre gráficos que solo difieren por el intercambio de dos líneas externas
- Por cada lazo fermiónico se incluye un factor -1 (Teorema de Wick)
- Por cada lazo interno se integra sobre el momentum

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

- Por cada vértice se incluye un factor $-ie\gamma_\mu$ y se impone la conservación del momentum



$$-ie\gamma_\mu$$



- Por cada línea interna fermiónica



$$iS_F(x) = i \frac{(\not{p} - m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

- Por cada línea interna fotónica



$$iD_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{i\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$



Scattering electrón electrón

Consideremos el proceso (scattering de Møller)

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-.$$

La contribución de menor orden a la amplitud proviene de dos diagramas

$$i\mathcal{M}_M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p, s \longrightarrow & \mu & \longrightarrow p', s' \\ & | & \\ & \text{wavy} & \\ & | & \\ q, r \longrightarrow & \nu & \longrightarrow q', r' \end{array} \\ + \\ \begin{array}{ccc} p, s \longrightarrow & \mu & \longrightarrow p', s' \\ & | & \\ & \text{wavy} & \\ & | & \\ q, r \longrightarrow & \nu & \longrightarrow q', r' \end{array} \end{array}$$

Las variables de Mandelstam son

$$s = (p + q)^2 = (p' + q')^2, \quad t = (p - p')^2 = (q' - q)^2 \\ u = (p - q')^2 = (p' - q)^2$$



Usando las reglas de Feynman

$$\begin{aligned}i\mathcal{M}_M &= -(-ie)^2[\bar{u}(p', s')\gamma^\mu u(p, s)]iD_{\mu\nu}(p - p')[\bar{u}(q', r')\gamma^\nu u(q, r)] \\ &+ (-ie)^2[\bar{u}(q', r')\gamma^\mu u(p, s)]iD_{\mu\nu}(p - q')[\bar{u}(p', s')\gamma^\nu u(q, r)] \\ &= ie^2 \frac{[\bar{u}(p', s')\gamma^\mu u(p, s)][\bar{u}(q', r')\gamma_\mu u(q, r)]}{(p - p')^2} \\ &- ie^2 \frac{[\bar{u}(q', r')\gamma^\mu u(p, s)][\bar{u}(p', s')\gamma_\mu u(q, r)]}{(p - q')^2}\end{aligned}$$

Se dice que el primer diagrama está en el canal t y el segundo está en el canal u



Potencial de Coulomb

Antes de continuar con el cálculo veamos un momento el límite no relativista.

Límite no relativista

La amplitud de scattering de dos fermiones a bajas energías reproduce el resultado no relativista del potencial de Coulomb

La amplitud para el scattering de electrones por un potencial en mecánica cuántica no relativista es

$$f^{(1)}(p, p') == -\frac{m}{2\pi} \tilde{V}(\mathbf{q})$$

donde \mathbf{q} es el momento transferido y

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})$$



Potencial de Coulomb

Si los fermiones son distinguibles solo contribuye un diagrama

$$\begin{aligned}i\mathcal{M}_D &= (-ie)^2 [\bar{u}(p', s') \gamma^\mu u(p, s)] D_{\mu\nu}(p - p') [\bar{u}(q', r') \gamma^\nu u(q, r)] \\ &= i(e)^2 \frac{[\bar{u}(p', s') \gamma^\mu u(p, s)] [\bar{u}(q', r') \gamma_\mu u(q, r)]}{(p - p')^2}\end{aligned}$$

A bajas energías ($|\mathbf{p}|^2 \ll m$, $|\mathbf{p}'|^2 \ll m$)

$$\bar{u}(p', s') \gamma^j u(p, s) = 0$$

$$\bar{u}(p', s) \gamma^0 u(p, s) = u^\dagger(p, s) u(p, s) = \delta_{ss'}$$

Cada fermión debe conservar su espín independientemente.

$$i\mathcal{M}_{DNR} = \frac{i(e)^2}{(p - p')^2} \delta_{ss'} \delta_{rr'} \eta_{00}$$



Comparando con el resultado no relativista

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \frac{(e)^2}{(p - p')^2}$$

Por lo tanto se encuentra

$$V(\mathbf{x}) = \frac{e^2}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

que es un potencial coulombiano repulsivo



Scattering electrón electrón

Volviendo al scattering electrón- electrón

$$i\mathcal{M}_M =$$

escribimos la amplitud colocando los índices espinoriales (que escojemos sean latinos del comienzo del alfabeto) en forma explícita

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_M &= (-ie)^2 [\bar{u}_a(p', s') \gamma_{ab}^\mu u_b(p, s)] D_{\mu\nu}(p - p') [\bar{u}_c(q', r') \gamma_{cd}^\nu u_d(q, r)] \\
 &- (-ie)^2 [\bar{u}_a(q', r') \gamma_{ab}^\mu u_b(p, s)] D_{\mu\nu}(p - q') [\bar{u}_b(p', s') \gamma_{bd}^\nu u_d(q, r)] \\
 &= ie^2 \frac{[\bar{u}_a(p', s') \gamma_{ab}^\mu u_b(p, s)] [\bar{u}_c(q', r') \gamma_{\mu cd} u_d(q, r)]}{(p - p')^2 + i\epsilon} \\
 &- ie^2 \frac{[\bar{u}_a(q', r') \gamma_{ab}^\mu u_b(p, s)] [\bar{u}_c(p', s') \gamma_{\mu cd} u_d(q, r)]}{(p - q')^2 + i\epsilon}
 \end{aligned}$$



El cuadrado de la amplitud

Para calcular la sección de choque requerimos encontrar el cuadrado de esta expresión $[(\bar{u}(q', r')\gamma^\mu u(p, s))^* = [\bar{u}(p, s)\gamma^\mu u(q', r')]]$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_M|^2 &= \frac{e^4}{[(p - p')^2]^2} \times \\ & [\bar{u}_d(p', s')\gamma_{ab}^\mu u_b(p, s)][\bar{u}_c(q', r')\gamma_{\mu cd} u_d(q, r)] \times \\ & [\bar{u}_e(q, r)\gamma_{ef}^\nu u_f(q', r')][\bar{u}_g(p, s)\gamma_{vgh} u_h(p', s')] \\ - & \frac{e^4}{[(p - p')^2(p - q')^2]} \times \\ & [\bar{u}_d(p', s')\gamma_{ab}^\mu u_b(p, s)][\bar{u}_c(q', r')\gamma_{\mu cd} u_d(q, r)] \times \\ & [\bar{u}_e(q, r)\gamma_{ef}^\nu u_f(p', s')][\bar{u}_g(p, s)\gamma_{vgh} u_h(q', r')] \\ + & p' \longleftrightarrow q' \end{aligned}$$



Proyectores

Para continuar recordemos que las soluciones libres de la ecuación de Dirac están normalizadas de forma que,

$$\bar{u}(p, s)u(p, s) = 1 \quad , \quad \bar{v}(p, s)v(p, s) = 1$$

y satisfacen las siguientes relaciones cuando se suma sobre las polarizaciones de espín,

$$\sum_s u_a(p, s)\bar{u}_a(p, s) - v_a(p, s)\bar{v}_a(p, s) = \delta_{ab}$$

$$\sum_s u_a(p, s)\bar{u}_b(p, s) = \left(\frac{\not{p} + m}{2m}\right)_{ab} = \Lambda_+$$

$$\sum_s v_a(p, s)\bar{v}_b(p, s) = \left(\frac{\not{p} - m}{2m}\right)_{ab} = -\Lambda_-$$

Los proyectores Λ_{\pm} cumplen $\Lambda_+ + \Lambda_- = \mathbb{1}$



Promedio sobre espín

Si promediamos sobre las polarizaciones de espín

$$\overline{|\mathcal{M}_M|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s,s',r,r'} |\mathcal{M}_M(s, s', r, r')|^2$$

podemos hacer aparecer los proyectores. Queda,

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_M|^2} &= \frac{e^4}{64m^4} \left\{ \frac{\text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p}' + m) \right] \text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{q} + m) \gamma_\nu (\not{q}' + m) \right]}{[(p - p')^2]^2} \right\} \\ &- \frac{e^4}{64m^4} \left\{ \frac{\text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{q}' + m) \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma_\nu (\not{p}' + m) \right]}{[(p - p')^2 (p - q')^2]} \right\} \\ &+ p' \longleftrightarrow q' \end{aligned}$$



Para poder seguir el cálculo necesitamos saber calcular las trazas,

- La traza de un número impar de γ 's es cero

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{n+1}] &= \text{Tr}[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{n+1} \gamma_5 \gamma_5] = \text{Tr}[\gamma_5 \not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{n+1} \gamma_5] \\ &= -\text{Tr}[\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{n+1}]\end{aligned}$$

- $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$
- $\text{Tr}[\not{a}\not{b}] = \text{Tr}[\not{b}\not{a}] = \frac{1}{2} \text{Tr}[\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a}] = \frac{1}{2} a_\mu b_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = a_\mu b^\nu \text{Tr} \mathbb{1} = 4a \cdot b$
- $\text{Tr}[\not{a}_1 \dots \not{a}_n] =$
 $a_1 \cdot a_2 \text{Tr}[\not{a}_3 \dots \not{a}_n] - a_1 \cdot a_3 \text{Tr}[\not{a}_2 \not{a}_4 \dots \not{a}_n] \dots + a_1 \cdot a_n \text{Tr}[\not{a}_2 \dots \not{a}_{n-1}]$
- $\text{Tr}[\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4] = 4[a_1 \cdot a_2 a_3 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_3 a_2 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4 a_2 \cdot a_3]$



Entonces,

- $\text{Tr} [\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{p}'] = 4 [p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - \eta^{\mu\nu} p \cdot p']$
- $\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p}' + m)] = 4 [p^\mu p'^\nu + p'^\mu p^\nu - \eta^{\mu\nu} p \cdot p' + m^2 \eta^{\mu\nu}]$
- etc etc. . .

$$\begin{aligned}
 \overline{|\mathcal{M}_M|^2} &= \frac{e^4}{2m^4} \left\{ \frac{(p \cdot q)^2 + (p \cdot q')^2 + 2m^2(p \cdot q' - p \cdot q)}{[(p - p')^2]^2} \right. \\
 &+ \frac{(p \cdot q)^2 + (p \cdot p')^2 + 2m^2(p \cdot p' - p \cdot q)}{[(p - q')^2]^2} \\
 &\left. + 2 \frac{(p \cdot q)^2 - 2m^2 p \cdot q}{(p - p')^2 (p - q')^2} \right\}
 \end{aligned}$$



Clase 10

Scattering $A+B \rightarrow 1+2+\dots+n$

matriz S

$$S_{fi} = \langle f | i \rangle_{out}$$

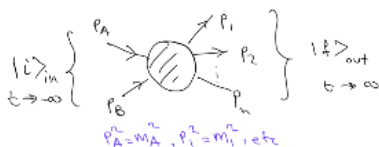
$$S_{fi} = S_{fi} + i \mathcal{E}_{fi}, \quad \mathcal{E}_{fi} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_i) M_{fi}$$

sección eficaz diferencial

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{(2E_A)(2E_B)|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} d\mathcal{T}_{LIPS}$$

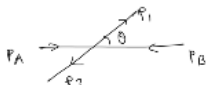
$$d\mathcal{T}_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_i) \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n}$$

invariante de Lorentz



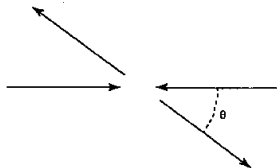
$A+B \rightarrow 1+2$ en CM
si $m_1 = m_2 = m_A = m_B$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{|M|^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}$$



Sección de choque

Hay que expresar las cantidades cinemáticas en el sistema del centro de masas



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2} |\mathcal{M}_M|^2$$

En ese sistema :

- $p = (E, \mathbf{p}), \quad q = (E, -\mathbf{p}),$
- $p' = (E, \mathbf{p}'), \quad q' = (E, -\mathbf{p}')$
- $|\mathbf{p}|^2 = |\mathbf{p}'|^2 \quad |\mathbf{p}|^2 = E^2 - m^2$
- $p \cdot q = E^2 + |\mathbf{p}|^2 \quad p' \cdot q' = E^2 + |\mathbf{p}|^2$
- $p \cdot p' = E^2 - |\mathbf{p}|^2 \cos \theta \quad p \cdot q' = E^2 + |\mathbf{p}|^2 \cos \theta$
- $q \cdot p' = E^2 + |\mathbf{p}|^2 \cos \theta \quad q \cdot q' = E^2 - |\mathbf{p}|^2 \cos \theta$



Sección de choque

Con $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ la sección de choque de Møller es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(2E^2 - m^2)^2}{4E^2(E^2 - m^2)^2} \left[\frac{4}{\text{sen}^4 \theta} - \frac{3}{\text{sen}^2 \theta} + \frac{(E^2 - m^2)^2}{(2E^2 - m^2)^2} \left(1 + \frac{4}{\text{sen}^2 \theta} \right) \right]$$

En el límite relativista $E \rightarrow \infty$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{E^2} \left[\frac{4}{\text{sen}^4 \theta} - \frac{2}{\text{sen}^2 \theta} + \frac{1}{4} \right]$$

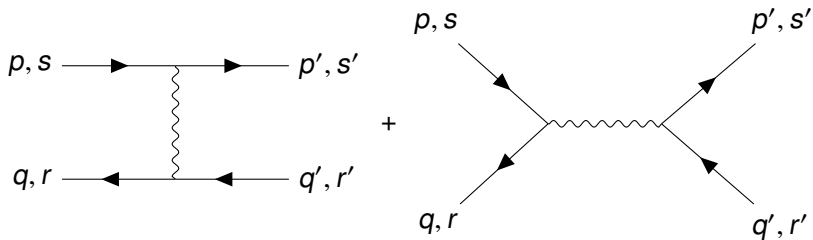


Scattering electron-positron

Consideremos ahora el llamado scattering de Bhabha

$$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$$

Aparecen los diagramas



Scattering electron-positron

La amplitud

$$i\mathcal{M}_M = -i(-ie)^2 \left(- \frac{[\bar{u}(p', s')\gamma^\mu u(s, p)][\bar{v}(q, r)\gamma_\mu v(q', r')]}{(p - p')^2} + \frac{[\bar{v}(q, r)\gamma^\mu u(p, s)][\bar{u}(s', p')\gamma_\mu v(q', r')]}{(p + q)^2} \right).$$

Por el mismo procedimiento la sección de choque en el limite de altas energías es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left(\frac{1 + \cos^4 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) - 2 \frac{\cos^4 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \right)$$

