

Repasos y conceptos generales en Teoría *LA-CoNGA*

José Ocariz

LA-CoNGA-physics

ocariz@in2p3.fr

28 de enero de 2021



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Preliminares, consideraciones generales

Consideremos un sistema físico sencillo:

- ▶ compuesto por dos partículas neutras, P^0 y $\overline{P^0}$, de misma masa m ,
- ▶ solamente difieren entre ellas por un único número cuántico discreto, el “sabor”:
 - ▶ S es un operador que tiene dos autovalores, ± 1

Dos tipos de procesos en acción sobre el sistema:

- ▶ transiciones $P^0 \longleftrightarrow \overline{P^0}$,
- ▶ desintegraciones de P^0 y/o $\overline{P^0}$, dando lugar a una paleta de estados finales $|\psi_\beta \rangle$.

La evolución en tiempo del sistema viene dada por

$$|\psi(t)\rangle = c(t)|P^0\rangle + \bar{c}(t)|\overline{P^0}\rangle + \sum_{\beta} c_{\beta}(t)|\psi_{\beta}\rangle, \quad (1)$$

que para simplificar, resumimos de la manera siguiente:

- ▶ al tiempo $t = 0$, se tiene solamente $c(t = 0) \neq 0$ y $\bar{c}(t = 0) \neq 0$ no nulos (estado inicial compuesto únicamente por P^0 y/o $\overline{P^0}$);
- ▶ a un tiempo posterior t , nos interesamos solamente en $c(t)$ y $\bar{c}(t)$, dejamos de lado las razones y las características de la desintegración a estados $|\psi_\beta \rangle$;

en otras palabras, nos situamos en un espacio de Hilbert efectivo a dos dimensiones, en el cual podemos utilizar la base de autovectores de sabor $[|P^0\rangle, |\overline{P^0}\rangle]$.



Admitiremos el resultado siguiente (se puede derivar en un ejercicio basado en el formalismo de Wigner-Weisskopf): la evolución en tiempo y posterior desintegración de un estado físico $|\psi(t)\rangle$ viene dada por

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \left[M - \frac{i}{2} \Gamma \right] |\psi(t)\rangle .$$

Si a $t = 0$ el sistema se encontraba en el estado $|\psi_0\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \psi(t) \rangle &= \exp(-iMt) \exp\left(-\frac{1}{2}\Gamma t\right) , \\ P(t) &= \|\langle \psi_0 | \psi(t) \rangle\|^2 , \\ &= \exp(-\Gamma t) , \end{aligned}$$

que es la expresión de la probabilidad exponencial de desintegración, con $1/\Gamma = \tau = T_{1/2} \ln 2$.
Para un sistema compuesto de dos estados *neutros* $|\psi_{1,2}\rangle$, la generalización es la siguiente:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |\psi_1(t)\rangle \\ |\psi_2(t)\rangle \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} |\psi_1(t)\rangle \\ |\psi_2(t)\rangle \end{pmatrix} , \\ &= \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi_1(t)\rangle \\ |\psi_2(t)\rangle \end{pmatrix} . \end{aligned}$$



El Hamiltoniano H previamente obtenido no es hermítico, pero sus componentes M y Γ sí lo son:

$$M = \frac{1}{2}(H + H^\dagger), \quad \frac{1}{2}\Gamma = \frac{i}{2}(H - H^\dagger).$$

(notación: la matriz M est también llamada “parte dispersiva”, y Γ “parte absortiva”).

Los autovalores λ_+ y λ_- de H vienen dados por:

$$2\lambda_{\pm} = (H_{11} + H_{22}) \pm \sqrt{4H_{21}H_{12} + (H_{11} - H_{22})^2}, \quad (2)$$

sin embargo, es más útil identificar los autovalores en términos de propiedades físicas, utilizando una base $|\psi_{L,H}\rangle$ en vez de $|\psi_{1,2}\rangle$

$$\lambda_{H,L} = m_{H,L} - \frac{i}{2}\Gamma_{H,L}. \quad (3)$$

Los términos L, H se refieren a “liviano”, “pesado” (Light, Heavy)

- ▶ corresponden a elegir $\Delta m = m_H - m_L > 0$ positivo por definición
- ▶ sin embargo $\Delta\Gamma = \Gamma_H - \Gamma_L$ puede ser positivo o negativo
- ▶ el signo de $\Delta\Gamma$ tiene un sentido físico (corresponde a configuraciones físicas diferentes, como veremos).

Ejercicio : Mostrar que $m_{H,L}$ no son autovalores de M , ni $\Gamma_{H,L}$ de Γ , pero satisfacen las relaciones $\overline{Tr(M)} = m_H + m_L$ y $Tr(\Gamma) = \Gamma_H + \Gamma_L$.



Si el sistema se encontrase a $t = 0$ en un estado dado por alguna combinación de los autoestados $|P_L \rangle$ y $|P_H \rangle$, su evolución en tiempo vendría dada por

$$\begin{aligned}|P_H(t) \rangle &= e^{-im_H t} e^{-\frac{\Gamma_H}{2} t} |P_H \rangle , \\ |P_L(t) \rangle &= e^{-im_L t} e^{-\frac{\Gamma_L}{2} t} |P_L \rangle .\end{aligned}$$

Esta base $|P_L \rangle, |P_H \rangle$ es llamada “base de evolución”, un sistema “preparado” a $t = 0$ en un autoestado de esta base, se mantendrá sobre esa base a lo largo del tiempo.

Es interesante describir el sistema la base de sabores $|P^0 \rangle, |\overline{P^0} \rangle$, que se relaciona con la base $|P_H \rangle, |P_L \rangle$ como una combinación lineal:

$$\begin{aligned}|P_L \rangle &= p_L |P^0 \rangle + q_L |\overline{P^0} \rangle , \\ |P_H \rangle &= p_H |P^0 \rangle - q_H |\overline{P^0} \rangle ,\end{aligned}$$

que introduce cuatro parámetros complejos “de mezcla” que satisfacen las relaciones de normalización

$$|p_{L,H}|^2 + |q_{L,H}|^2 = 1 .$$



Ejercicio: obtener las ecuaciones de evolución en la base de sabores,

$$|P^0(t)\rangle = [g_+(t) - zg_-(t)]|P^0\rangle + \sqrt{1-z^2} \frac{q/p}{g_-(t)} |\overline{P^0}\rangle,$$

$$|\overline{P^0}(t)\rangle = [g_+(t) + zg_-(t)]|\overline{P^0}\rangle + \sqrt{1-z^2} \frac{p/q}{g_-(t)} |P^0\rangle,$$

usando las definiciones siguientes:

$$z = \frac{p_H q_L - p_L q_H}{p_H q_L + p_L q_H}, \quad \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{q_H q_L}{p_H p_L}, \quad g_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \left(e^{-i\lambda_+ t} \pm e^{-i\lambda_- t} \right).$$

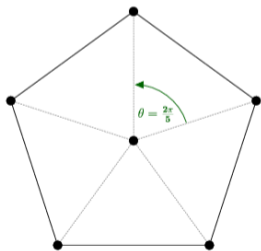
Más allá de las virtudes gimnásticas de este pequeño trabajo calculatorio, lo que importa retener es:

- ▶ hemos redefinido cuatro cantidades complejas $((p, q)_{L,H})$ en términos de otros cuatro complejos: la “asimetría compleja” z , el cociente q/p y los argumentos λ_{\pm} de las funciones $g_{\pm}(t)$.
- ▶ La base de los estados de sabor se diferencia de la base de evolución : un sistema “preparado” en autoestado de sabor a $t = 0$ tiene una evolución oscilatoria.
- ▶ Una fase global puede absorberse en las definiciones de los vectores de estado, con lo que solamente 7 parámetros determinan el Hamiltoniano.
- ▶ Los detalles precisos de la evolución en tiempo dependen de los valores de esos parámetros, como veremos con algunos casos particulares.



Ilustramos el concepto de simetría con un ejemplo sencillo: simetría de rotación en 2 dimensiones

- ▶ la *forma* de un círculo es invariante bajo rotación alrededor del eje ortogonal pasando por su centro
 - ▶ válido para todo ángulo de rotación
 - ▶ se trata de una simetría continua
- ▶ la *forma* de un polígono de orden N es invariante bajo rotación alrededor del eje ortogonal pasando por su centro
 - ▶ válido solamente para múltiplos enteros de $2\pi/N$
 - ▶ se trata de una simetría discreta



En física, tres transformaciones discretas juegan un papel fundamental :

- ▶ la *paridad* \mathcal{P} ,
- ▶ la *conjugación de carga* \mathcal{C} ,
- ▶ la *inversión temporal* \mathcal{T} .



La paridad \mathcal{P} es una transformación que consiste en invertir los signos de los ejes de coordenadas:

$$\mathcal{P} : \vec{x} \rightarrow -\vec{x}$$

El operador de paridad actúa sobre los vectores de posición \vec{r} y sus derivadas: velocidad y aceleración. Nota: el momento angular $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ es invariante bajo \mathcal{P} .

En mecánica cuántica, un estado $|\psi\rangle$ cambiará según la relación

$$|\psi_P\rangle = \mathcal{P}|\psi(\vec{x}, t)\rangle = \xi_P|\psi(-\vec{x}, t)\rangle$$

- ▶ La relación $\mathcal{P}^2 = \mathbb{I}$ implica que el parámetro ξ_P satisface $\xi_P^2 = \pm 1$.
- ▶ Notar también que el operador \mathcal{P} es unitario: $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}$.
- ▶ Un sistema físico será invariante bajo la transformación de paridad si su Hamiltoniano satisface $H_P = \mathcal{P}H\mathcal{P}^{-1} = H$, o de manera equivalente, $[H, \mathcal{P}] = 0$.



La conjugación de carga

La acción del operador \mathcal{C} es cambiar el signo de todos los números cuánticos discretos de un sistema: p.e. la carga eléctrica o, en nuestro caso, los números cuánticos de sabor:

$$\mathcal{C} : \vec{Q} \rightarrow -\vec{Q}, \quad \vec{Q} = \{q, \text{sabor(es), color, \dots}\}.$$

El operador \mathcal{C} es también unitario: $\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}$. Su acción sobre un estado cuántico ψ es

$$|\psi_{\mathcal{C}}\rangle = \mathcal{C}|\psi\rangle = \zeta_{\mathcal{C}}|\bar{\psi}\rangle,$$

donde el parámetro $\zeta_{\mathcal{C}}$ satisface $|\zeta_{\mathcal{C}}|^2 = 1$, así que es una fase pura, $\zeta_{\mathcal{C}} = e^{i\xi_{\mathcal{C}}}$.

Ejemplo: un sistema que contenga un solo electrón, la acción de \mathcal{C} será:

$$\mathcal{C}|e^-\rangle = e^{i\xi_{\mathcal{C}}}|e^+\rangle.$$

De nuevo, un sistema físico será invariante bajo conjugación de carga si el Hamiltoniano satisface $H_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}H\mathcal{C}^{-1} = H$.

- ▶ Es importante no confundir \mathcal{C} y el operador de carga Q , pues sus acciones son totalmente diferentes:

$$Q|e^-\rangle = -|e^-\rangle, \quad Q|e^+\rangle = +|e^+\rangle.$$

- ▶ Los operadores de paridad y conjugación de carga son fundamentalmente diferentes:
 - ▶ ¡ \mathcal{C} cambia el contenido (en materia) de un sistema físico !



El caso de la inversión temporal \mathcal{T} es asaz diferente. La analogía con \mathcal{C} et \mathcal{P} no es válida: la acción de \mathcal{T} sobre un estado físico $|\psi\rangle$, porque lo que debería correspondería a un estado resultante de una transformación unitaria, es decir

$$|\psi_T\rangle = \mathcal{T}|\psi(t)\rangle = \xi_T|\psi(-t)\rangle, \quad (4)$$

es un estado que **no** satisface la ecuación de Schrödinger.

Ejercicio: demostrar esta afirmación.

En vez de ello, un operador *anti-unitario* \mathcal{T} definido por la acción siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &: t \rightarrow -t, \\ & i \rightarrow -i, \\ & \psi \rightarrow \psi^*, \end{aligned}$$

da lugar a la transformación del estado $|\psi\rangle$ en

$$|\psi_T(t)\rangle = \mathcal{T}|\psi(t)\rangle = \xi_T|\psi^*(-t)\rangle. \quad (5)$$

que sí tiene sentido físico.

Ejercicio : mostrar que si un vector de estado $|\psi\rangle$ satisface la ecuación de Schrödinger, entonces su correspondiente vector de estado de inversión temporal $|\psi_T\rangle$ también.



La acción combinada de \mathcal{C} y \mathcal{P} ; el teorema \mathcal{CPT}

A partir de los resultados precedentes, en el caso de nuestro sistema $P^0 - \overline{P^0}$ se tiene que la acción conjunta de \mathcal{C} y \mathcal{P} da lugar a las transformaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\mathcal{CP}|P^0\rangle &= e^{i\xi_{\mathcal{CP}}}\overline{|P^0\rangle}, \\ \mathcal{CP}\overline{|P^0\rangle} &= e^{-i\xi_{\mathcal{CP}}}|P^0\rangle.\end{aligned}$$

Ejercicio : mostrar que los autoestados de \mathcal{CP} sont P_+ et P_- (el signo se refiere al autovalor *par* o *impar* bajo \mathcal{CP}), dados por:

$$|P_{\pm}\rangle = \frac{|P^0\rangle \pm e^{i\xi}\overline{|P^0\rangle}}{\sqrt{2}}.$$

Admitiremos sin demostración la afirmación siguiente: toda teoría cuántica, local y relativista es invariante bajo la acción conjunta de los tres operadores \mathcal{C} , \mathcal{P} y \mathcal{T} . Esto es también llamado *Teorema \mathcal{CPT}* .

- ▶ Las interacciones electromagnética y gravitacionales son invariantes bajo la acción individual de cada una de estas transformaciones, con lo que el teorema \mathcal{CPT} es una tautología
- ▶ Como se verá en el curso específico a la filial AE, lo mismo ocurre en las interacciones nucleares fuertes ...
- ▶ ... ¡pero no así para las interacciones débiles!

En el contexto de esta clase, nos limitaremos a considerar las consecuencias de la invariancia bajo \mathcal{CP} y \mathcal{CPT} .



Consecuencias sobre el Hamiltoniano efectivo

La invariancia bajo \mathcal{CP} y \mathcal{CPT} reduce el número de grados de libertad del Hamiltoniano, dado que la invariancia impone las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{CPT} &\longrightarrow H_{11} = H_{22} , \\ \mathcal{CP} &\longrightarrow M_{11} = M_{22} , \Gamma_{11} = \Gamma_{22} , \text{Im}(\Gamma_{12}^* M_{12}) = 0 . \end{aligned}$$

Ejercicio : mostrar que eso se traduce en una simplificación de las relaciones de evolución en la base de sabores:

$$\begin{aligned} |P^0(t)\rangle &= g_+(t)|P^0\rangle + g_-(t)|\overline{P^0}\rangle , |q/p| = 1 , \\ |\overline{P^0}(t)\rangle &= g_+(t)|\overline{P^0}\rangle + g_-(t)|P^0\rangle , z = 1 , \end{aligned}$$

y que probabilidades de observar al tiempo t el sistema en un estado definido de sabor, según el estado inicial de sabor al que haya sido preparado al tiempo $t = 0$:

$$\begin{aligned} |\langle P^0|P^0(t)\rangle|^2 &= |\langle \overline{P^0}|\overline{P^0}(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) + \cos(\Delta mt) \right] , \\ |\langle P^0|\overline{P^0}(t)\rangle|^2 &= \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) - \cos(\Delta mt) \right] , \\ |\langle \overline{P^0}|P^0(t)\rangle|^2 &= \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) - \cos(\Delta mt) \right] . \end{aligned}$$



Recordando los observables físicos previamente definidos,

$$|\langle P^0 | P^0(t) \rangle|^2 = |\langle \overline{P^0} | \overline{P^0}(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) + \cos(\Delta m t) \right],$$

$$|\langle P^0 | \overline{P^0}(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) - \cos(\Delta m t) \right],$$

$$|\langle \overline{P^0} | P^0(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} \left[\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right) - \cos(\Delta m t) \right],$$

vemos que la evolución en tiempo viene dada por la acción de tres términos:

- ▶ un término de *amortiguamiento*, de tiempo característico $1/\Gamma$, con $2\Gamma = \Gamma_H + \Gamma_L$,
- ▶ un término de *modulación*, de tiempo característico $2/\Delta\Gamma$, con $\Delta\Gamma = \Gamma_H - \Gamma_L$,
- ▶ un término de *oscilación*, de frecuencia característica $\Delta m = m_H - m_L$.

Las diferencias de masa y anchura determinan las propiedades de la evolución temporal del sistema. Otro observable físico de interés es la *asimetría de sabor* dependiente del tiempo:

$$A(t) = \frac{N(P^0 \rightarrow P^0, t) - N(P^0 \rightarrow \overline{P^0}, t)}{N(P^0 \rightarrow P^0, t) + N(P^0 \rightarrow \overline{P^0}, t)} = \frac{\cos(\Delta m t)}{\cosh\left(\frac{\Delta\Gamma}{2}t\right)}.$$



El ejercicio formal previo no es ni abstracto ni académico. Es un formalismo que nos permite entender las propiedades de sistemas muy importantes en física subatómica.

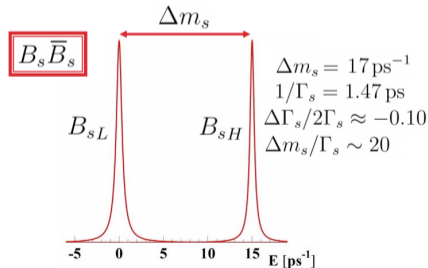
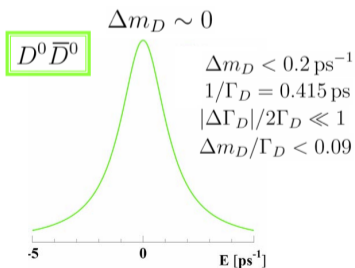
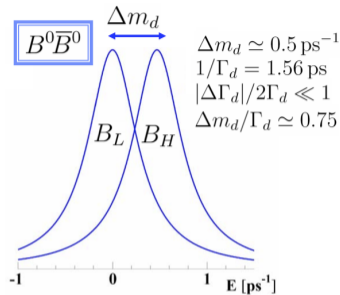
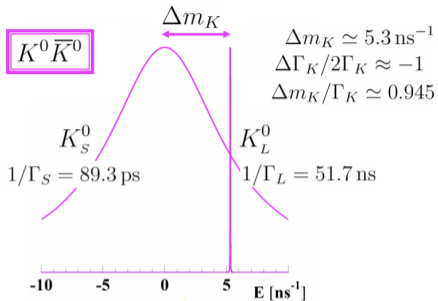
Como se verá en más detalle en el curso avanzado de la filial AE, en la naturaleza hay 4 sistemas de mesones neutros, que solamente difieren entre sí por su “sabor”:

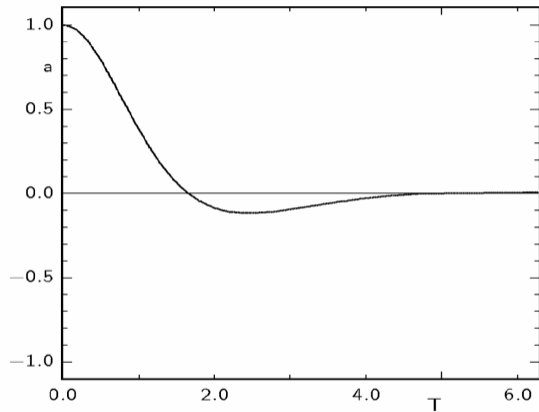
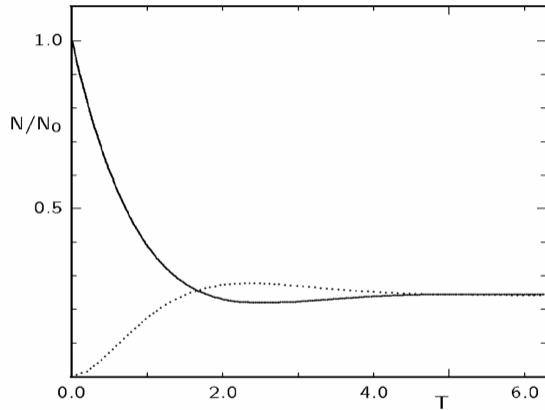
- ▶ Los kaones neutros $K^0 - \overline{K}^0$, El sabor de los kaones se llama “strangeness”, que se explica por haber sido históricamente el primero de tales sistemas en ser observado y estudiado. La física de los kaones ha estado llena de sorpresas y resultados extraordinarios (c.f. curso avanzado AE).
- ▶ Los mesones $B^0 - \overline{B}^0$ o simplemente mesones B , de sabor “beauty”. Los mesones B fueron estudiados en gran detalle en las llamadas *fábricas de B* BaBar y Belle, y hoy en día son una herramienta principal de trabajo en el experimento LHCb (CERN) y Belle-II.
- ▶ Los $D^0 - \overline{D}^0$ o simplemente mesones D , de sabor “charm”.
- ▶ Los $B_s^0 - \overline{B}_s^0$, que tienen por característica más sobresaliente la altísima frecuencia de oscilación: un ciclo cada 0,06 picosegundos!

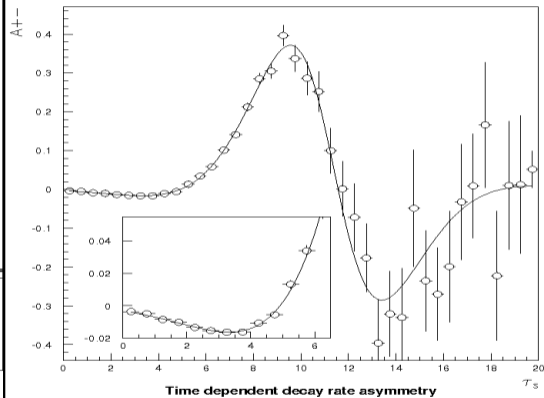
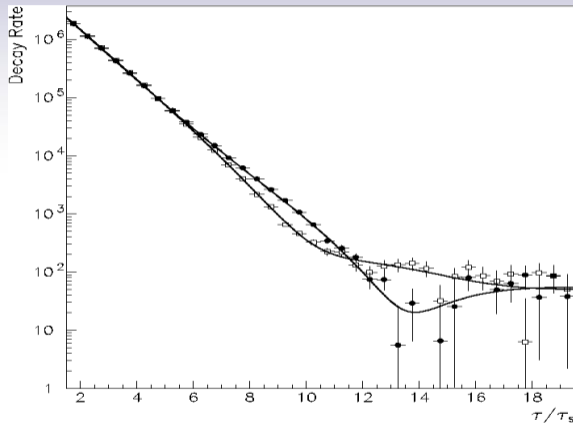
En las láminas siguientes se aprecian las masas, anchuras y diferencias para cada uno de estos cuatro sistemas, así como sus funciones de evolución en función del tiempo y la asimetría de sabor.

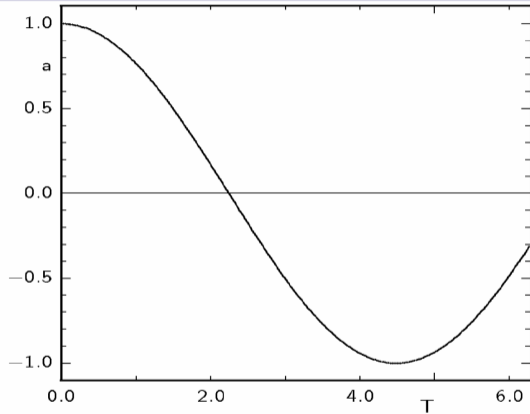
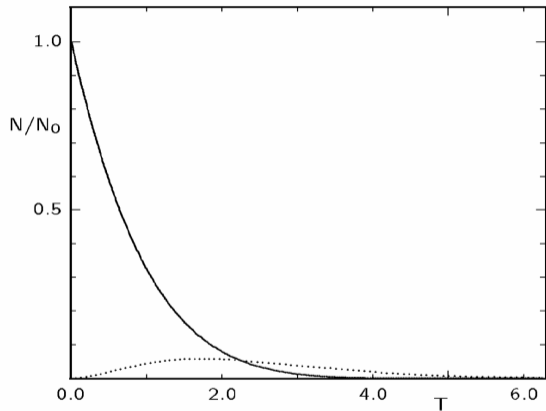


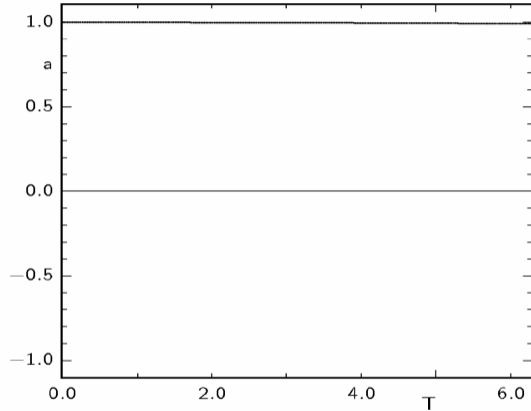
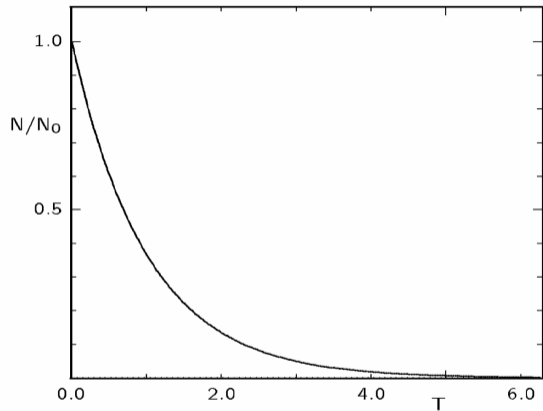
Los cuatro mesones neutros





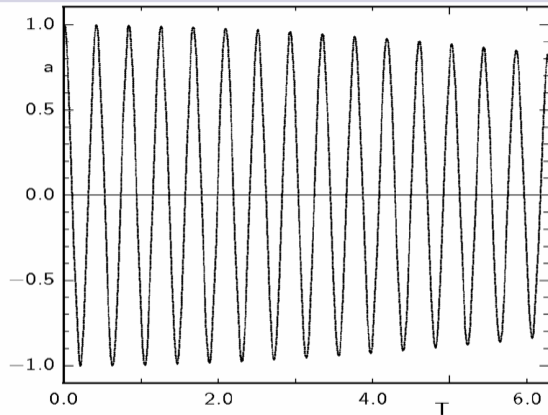
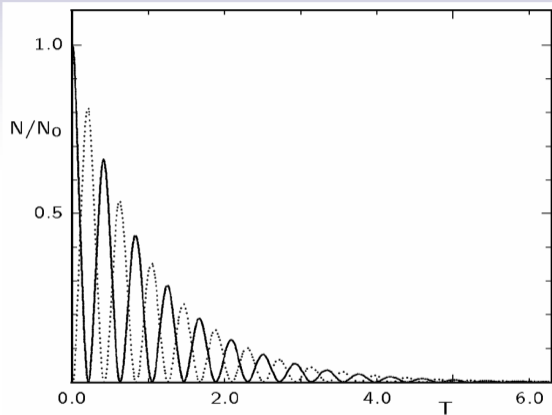


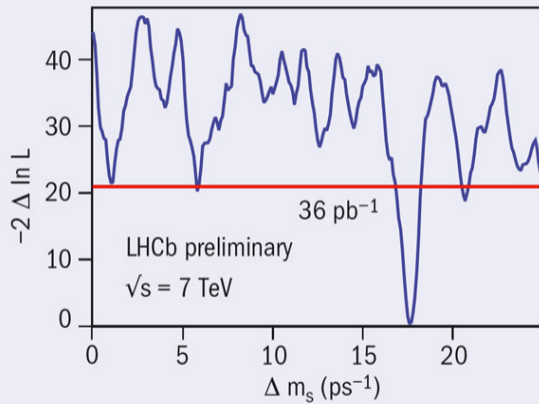
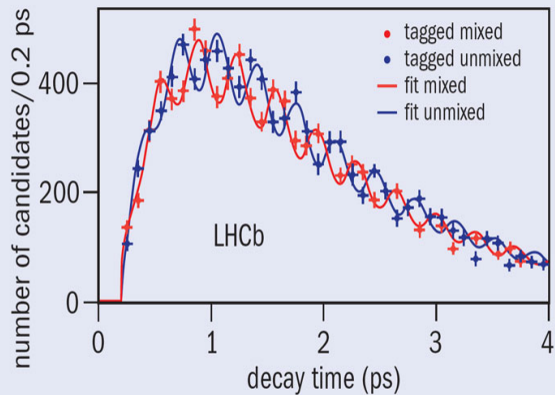






Los mesones B_s







Elementos discutidos en la clase, a guardar en mente:

- ▶ Un sistema partícula-antipartícula puede ser descrito con una versión simplificada del formalismo de Wigner-Weisskopf
- ▶ La evolución en tiempo de ese sistema viene determinada por su Hamiltoniano Efectivo
- ▶ Bajo consideraciones generales de simetrías discretas, el Hamiltoniano Efectivo se reduce a 4 parámetros físicos:
 - ▶ La masa m y la anchura Γ , que determinan el perfil resonante del sistema y su vida media
 - ▶ La diferencia de masas Δm que determina la frecuencia de oscilación
 - ▶ La diferencia de anchuras $\Delta\Gamma$
- ▶ En la naturaleza hay 4 sistemas de mesones neutros, cuyas propiedades principales pueden describirse con este formalismo simplificado
- ▶ ¡pero esos sistemas tienen una fenomenología mucho más rica y compleja que la mencionada en esta clase!
 - ▶ entre ellos la *Violación de Paridad* y la *Violación de CP*