

# Módulo de Teoría

## Clase 4, 02-02-2021

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

`mattermost.redclara.net@afont`



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics  
**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea



# Programa Módulo de Teoría

- Semanas 1,2 – Repaso de conceptos generales
  - Sección eficaz
  - Cinemática relativista
  - Sistemas partícula-antipartícula
- Semanas 3,8 – Introducción a Teoría Cuántica de Campos (TCC)
  - Temas básicos: relatividad especial, mecánica clásica, mecánica cuántica, teoría clásica de campos
  - Cuantización de campo escalar libre
  - Cuantización de campo escalar con interacciones
  - Reglas de Feynman y amplitudes
  - Renormalización
  - Ruptura espontánea de simetría si el tiempo lo permite

## Bibliografía

- M. Peskin, D. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory.
- D. Tong, Lectures on Quantum Field Theory.  
<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>
- L. Ryder, Quantum Field Theory.
- P. Ramond, Field Theory: A Modern Primer.

## Evaluación

- Tareas semanales

## Horas de consulta

- J. Stephany: lunes, 19 UTC @jedsrz, P. Pujol: miércoles, 15 UTC @pierre\_pujol
- T. Vargas: jueves, 12-14 UTC, A. Font: viernes, 15-16 UTC

# Introducción a Teoría Cuántica de Campos

# Motivación

## Razones para estudiar Teoría Cuántica de Campos (TCC)

- ▶ El Modelo Estándar se formula en el lenguaje de TCC.  
Aplicando TCC se calculan secciones eficaces, ratas de decaimiento, ratas de producción, . . . , a ser comparadas con observaciones.
- ▶ El formalismo de TCC también se aplica en Física de Materia Condensada, e.g. en conexión con superconductividad, efecto Hall cuántico, . . .  
Ideas como ruptura espontánea de simetrías y grupo de renormalización, muy importantes en Altas Energías, se originaron en Materia Condensada.

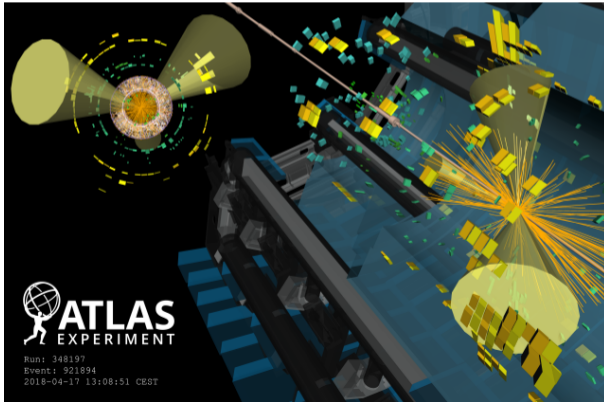
## ¿ Qué es TCC ?

TCC  $\simeq$  mecánica cuántica + relatividad especial + campos

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

$$E = mc^2$$

¡en procesos relativistas y cuánticos el número de partículas no se conserva !



$p + p \rightarrow$  muchas partículas

## Campos

En TCC los objetos fundamentales son campos: operadores dependientes de  $t$  y  $\vec{x} = \mathbf{x}$ .

Las partículas surgen al cuantizar los campos.

E.g. campo del fotón  $A^\mu(\mathbf{x}, t)$        $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

campo del electrón  $\psi(\mathbf{x}, t)$

campo del Higgs  $\varphi(\mathbf{x}, t)$

⋮

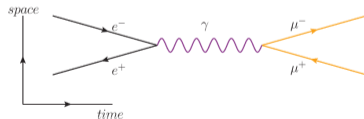
Empezaremos estudiando el caso mas simple: campos escalares.



## Implicaciones de TCC

- ▷ Teorema de espín estadística  
espín entero  $\Rightarrow$  bosón,      espín semi-entero  $\Rightarrow$  fermión
- ▷ Existencia de antipartículas.
- ▷ Teorema CPT
- ▷ interacciones = creación y destrucción de partículas  
+ intercambio de partículas virtuales

E.g.  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$



Objetivo: Asimilar y aplicar en Altas Energías/Sistemas Complejos.

# Temas básicos

## Unidades y dimensiones

$c$ : velocidad de la luz en el vacío, dimensión  $[c] = L T^{-1}$  (distancia/tiempo)

$\hbar$ : constante de Planck, dimensión  $[\hbar] = M L^2 T^{-1}$  (masa  $\times$  velocidad  $\times$  distancia)

Usaremos unidades naturales  $c = 1$   $\hbar = 1$

$[distancia] = [tiempo] = [energía]^{-1} = [masa]^{-1}$

La dimensión de una cantidad  $X$  es entonces  $masa^d$ .

Se define la dimensión  $[X]$  de  $X$  como su dimensión de masa, i.e.  $[X] = d$ .

E.g.  $[E] = 1$ ,  $[t] = [x] = [y] = [z] = -1$

# Relatividad especial

1) espacio tiempo = espacio de Minkowski

coordenadas  $X^\mu = (X^0, X^1, X^2, X^3)$

notación  $x^i = X^\mu$  ,  $X^0 = t$   $(x^1, x^2, x^3) = \vec{x} = (x, y, z)$

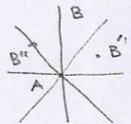
punto en espacio-tiempo = evento

intervalo entre dos eventos A y B

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\Delta t = t_B - t_A$$
$$\Delta x = x_B - x_A, \text{ etc.}$$

$\Delta s^2 = \begin{cases} > 0 & \text{temporal, dentro del cono de luz} \\ < 0 & \text{espacial, fuera del cono de luz} \\ = 0 & \text{sobre el cono de luz} \end{cases}$



2) tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$ .

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(índices repetidos se suman)

convención (+, -, -, -)

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha = \begin{cases} 1, & \mu = \alpha \\ 0, & \mu \neq \alpha \end{cases}$$

i.e.  $\eta^{\mu\nu}$  es la inversa de  $\eta_{\mu\nu}$  (igual a  $\eta_{\mu\nu}$  como matriz)

los índices se bajan con  $\eta_{\mu\nu}$  y se suben con  $\eta^{\mu\nu}$

e.g.  $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \Rightarrow x_0 = x^0, x_i = -x^i, i=1,2,3$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

notar  $\Delta s^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu$   $x \cdot y = x^\mu y_\mu$  producto escalar

cuadrivector posición  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ ,  $x^2 = x_\mu x^\mu = t^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$

cuadrivector momento  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$

para partícula de masa  $m$ ,  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \Rightarrow p^2 = p_\mu p^\mu = m^2$

notar  $p \cdot x = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$

### 3) Transformaciones de Lorentz.

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$\Lambda$  deja el producto escalar invariante.

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = x^{\alpha} y_{\alpha} \Rightarrow \boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}} \Rightarrow |\Lambda^0_0| \geq 1$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

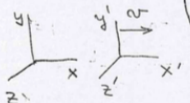
Ejemplos:

Boost en  $x^1$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotación alrededor de  $z$



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

otros cuadvectores  $p^{\mu} = (E, \vec{p})$ ,  $A^{\mu} = (A^0, \vec{A})$ ,  $J^{\mu} = (p, \vec{J})$

transforman igual que  $x^{\mu}$

e.g. boost en  $x^1$   $E' = \gamma(E - v p^1)$ ,  $p'^1 = \gamma(p^1 - v E)$ ,  $p'^2 = p^2$ ,  $p'^3 = p^3$

Transformaciones de Poincaré:  $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$

Propiedades de transformaciones de Lorentz,  $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

$$(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\nu}$$

$$\eta^{\mu\nu} \Lambda^{\sigma}_{\mu} \Lambda^{\rho}_{\nu} = \eta^{\sigma\rho}$$

$$\partial'^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}, \quad \partial'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \partial^{\alpha}$$



El conjunto de transformaciones de Lorentz forma un grupo llamado  $O(1,3)$

El subconjunto con  $\det \Lambda = 1$  y  $\Lambda^0_0 \geq 1$  forma el sub-grupo propio ortocrono  $SO^+(1,3)$

Inversión temporal y paridad no pertenecen a  $SO^+(1,3)$

$$\Upsilon^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teoría invariante bajo transformaciones de Lorentz quiere decir invariante bajo  $SO^+(1,3)$

$\exists$  otras representaciones del grupo de Lorentz además de la rep. vectorial (y la rep. escalar trivial)

e.g.  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  ;  $\psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix}$  espinor de Dirac  
tensor antisimétrico

# Mecánica Clásica

## 1) Lagrangiano $L$

sistema descrito por coordenadas  $q_a$ ,  $a = 1, \dots, n$   
la dinámica depende de  $L$ ,  $L = T - V$

$$L = L(q_a, \dot{q}_a), \quad \dot{q}_a = \frac{dq_a}{dt}$$

Se define la acción  $S$

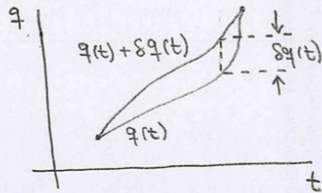
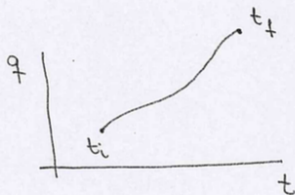
$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_a, \dot{q}_a)$$

$S$  depende de la trayectoria (camino)

La trayectoria real es tal que  $S$  es estacionaria, i.e. al hacer  $q \rightarrow q + \delta q$   
 $S$  no cambia, i.e.  $\delta S = 0$ .

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0$$

ecs. de Euler-Lagrange



## 2) Hamiltoniano $H$

momento  $p^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$ ,  $H(q_a, p^a) = p^a \dot{q}_a - L$

ecuaciones de movimiento

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p^a} = \{q_a, H\}$$

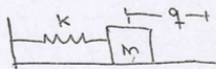
$$\dot{p}^a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} = \{p^a, H\}$$

corchete de Poisson

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_a} \frac{\partial g}{\partial p^a} - \frac{\partial f}{\partial p^a} \frac{\partial g}{\partial q_a}$$

$$\{q_a, q_b\} = 0, \{p^a, p^b\} = 0, \{q_a, p^b\} = \delta_a^b$$

Ejemplo



OSCILADOR ARMÓNICO

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$p \rightarrow \sqrt{m} p, \quad q \rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} q$$

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

# Mecánica Cuántica

## 1) Mini resumen de Postulados

- ▷  $q, p \rightarrow$  operadores,  $\{ , \} \rightarrow -i[ , ]$ ,  $[q_a, p^b] = i\delta_a^b$ ,  $[q_a, q_b] = [p^a, p^b] = 0$
- ▷ El operador Hamiltoniano  $H$  determina la dinámica del sistema descrito por  $|\Psi(t)\rangle$ .

La evolución temporal está dada por la ecuación de Schrödinger

$$\boxed{i\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle}$$

Para  $H$  independiente de  $t$ ,  $|\Psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi(t_0)\rangle$

$|\Psi(t)\rangle$  se expande en una base  $|\varphi_n\rangle$  de autovectores de  $H$ , i.e.  $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n(t-t_0)} |\varphi_n\rangle$$

## Oscilador armónico

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

Operadores de creación y aniquilación:  $a, a^\dagger$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip), \quad [q, p] = i \Rightarrow [a, a^\dagger] = 1$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger), \quad H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), \quad [H, a] = -\omega a, \quad [H, a^\dagger] = \omega a^\dagger$$

$\exists$  autoestado de mínima energía: el vacío o estado base  $|0\rangle$ , satisface

$$a|0\rangle = 0, \quad E_0 = \frac{1}{2}\omega$$

Autovalores y autoestados de  $H$ :  $E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ,  $|n\rangle = \underbrace{a^\dagger \cdots a^\dagger}_n |0\rangle$

## Schrödinger vs Heisenberg

- ▷ Cuadro de Schrödinger:  $|\Psi\rangle$  dependiente de  $t$ , operadores  $\mathcal{O}$  independientes de  $t$

$$i\frac{d}{dt}|\Psi_S\rangle = H|\Psi_S\rangle, \quad |\Psi_S(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_S(t_0)\rangle$$

- ▷ Cuadro de Heisenberg:  $|\Psi\rangle$  independiente de  $t$ , operadores  $\mathcal{O}$  dependientes de  $t$

$$|\Psi_H\rangle = e^{iH(t-t_0)}|\Psi_S(t)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle$$

$$\mathcal{O}_H = e^{iH(t-t_0)}\mathcal{O}_S e^{-iH(t-t_0)}, \quad H_H = H_S = H$$

$$i\frac{d\mathcal{O}_H}{dt} = [\mathcal{O}_H, H]$$

$$\langle\Psi_H|\mathcal{O}_H|\Psi_H\rangle = \langle\Psi_S(t)|\mathcal{O}_S|\Psi_S(t)\rangle$$

# Campos Clásicos

## 1) Formulación Lagrangiana

campo  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  función de espacio y tiempo,  $\Phi$  puede ser  $\overbrace{\phi}^{\text{escalar}}$ ,  $\overbrace{A^\mu}^{\text{vector}}$ ,  $\overbrace{\psi}^{\text{Dirac}}$ , ...

$\Phi(\mathbf{x}, t)$  generalización de  $q_a(t)$ ,  $\mathbf{x}$  es una "etiqueta" continua,

$\Phi(\mathbf{x}, t)$  describe infinitos grados de libertad

dinámica de  $\Phi = \Phi(x)$  determinada por Lagrangiano, función de  $\Phi$ ,  $\overbrace{\dot{\Phi}, \nabla\Phi}^{\partial_\mu\Phi}$

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi), \quad \mathcal{L}: \text{densidad Lagrangiana o 'Lagrangiano'}$$

$$\text{acción: } S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(t), \quad \boxed{S = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi)} \quad [S] = 0, [d^4x] = -4 \Rightarrow [\mathcal{L}] = 4$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \text{ecuaciones de movimiento}$$

## Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \right] \delta \Phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right)\end{aligned}$$

El último término es una derivada total y se puede integrar.

Se cancela asumiendo que  $\delta \Phi(\mathbf{x}, t_i) = \delta \Phi(\mathbf{x}, t_f) = 0$ ,

y  $\delta \Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$  suficientemente rápido para  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

$$\delta S = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0}$$



Campo escalar real  $\phi$ ,  $\phi^* = \phi$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad m \text{ constante}$$

$[\mathcal{L}] = 4$ ,  $[\partial_\mu] = 1 \Rightarrow [\phi] = 1$ ,  $[m] = 1$ ,  $m$  tiene unidades de masa

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0} \quad \text{ec. de Klein-Gordon}$$

Con notación  $\square = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  (Laplaciano en Minkowski),  $\square\phi + m^2\phi = 0$ .

En general:  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$

Mas campos:  $\Phi_a, a = 1, 2, \dots, N$

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_a} = 0$$

▷ 2 campos escalares reales  $\phi_1, \phi_2$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m_1^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \phi_2^2$$

▷ campo escalar complejo  $\chi, \chi^* \neq \chi$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - M^2 \chi^* \chi \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad m_1 = m_2 = M$$

▷ campo escalar complejo  $\chi$  + campo escalar real  $\phi$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - M^2 \chi^* \chi - g \chi^* \chi \phi \quad g: \text{constante de acoplo}$$

▷ ...

Ejercicio: Hallar las ecs. de movimiento



<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongapysics



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.