Módulo de Teoría
Clase 10, 23-02-2021

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont

Recap clases 8, 9

Funciones de correlación de n-puntos

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \langle \Omega | T\{\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle \quad , \quad \phi(x) = \phi_H(x)$$

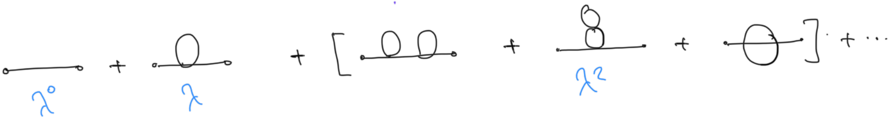
$$= \frac{\langle 0 | T\{\phi_I(x_1) \ldots \phi_I(x_n) \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt\, H_I\right)\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T\{\exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt\, H_I\right)\} | 0 \rangle}$$

= suma de todos los diagramas conectados con n puntos externos

"

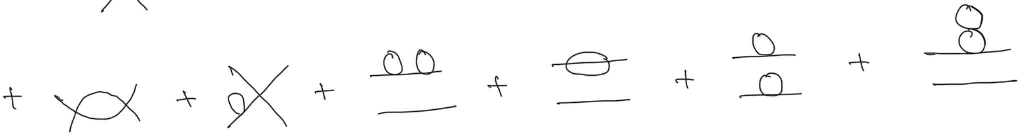
sin burbujas de vacio

Ejemplo $\lambda\phi^4$, $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$

$G^{(2)}(x_1,x_2) =$ 

$G^{(4)}(x_1,x_2,x_3,x_4) =$  $\leftarrow$ 3 similares

$+$  $+$  $\leftarrow$ 6 similares

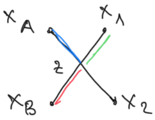


$+ \cdots$

Reglas de Feynman en espacio de posición

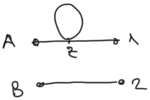
Para calcular $G^{(n)}(x_1, .., x_n)$ a un cierto orden en la expansión perturbativa se dibujan todos los diagramas conectados con n puntos externos y # de vértices igual al orden, se suman

Ej. $\lambda\phi^4$, $G^{(4)}(x_A, x_B, x_1, x_2)$, orden λ

1) 

$$G_1^{(4)} = -i\lambda \int d^4z \, D_F(x_A - z)\, D_F(x_B - z)\, D_F(x_1 - z)\, D_F(x_2 - z)$$

$$G_1^{(4)} = -i\lambda \int d^4z \int \frac{d^4k_A}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik_A(x_A-z)}}{k_A^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4k_B}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik_B(x_B-z)}}{k_B^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik_1(x_1-z)}}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik_2(x_2-z)}}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon}$$

2) 

+ similares

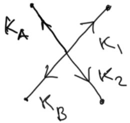
Ejercicio

En $G_1^{(4)}$ aparece

$$-i\lambda \int d^4z \, e^{iz(k_A+k_B+k_1+k_2)} = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A+k_B+k_1+k_2)$$

$$G_1^{(4)} = \int \frac{d^4k_A}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_A^2-m^2+i\epsilon} e^{-ik_Ax_A} \int \frac{d^4k_B}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_B^2-m^2+i\epsilon} e^{-ik_Bx_B} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2-m^2+i\epsilon} e^{ik_1x_1} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_2^2-m^2+i\epsilon} e^{-ik_2x_2}$$
$$\times (-i\lambda)\delta^{(4)}(k_A+k_B+k_1+k_2)$$

Reglas de Feynman en espacio de momentos



1) por cada propagador $\xrightarrow{p}$ $\quad \dfrac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$

2) por cada vértice $\quad -i\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_A+k_B+k_1+k_2)$

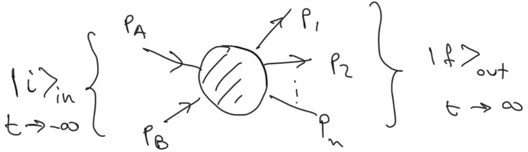
3) por cada punto externo $\underset{x}{\bullet}\xleftarrow{p}$ $\quad e^{-ipx}$

4) se integra sobre todos los momentos $\quad \displaystyle\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$

5) se divide por el factor de simetría

Scattering $A+B \to 1+2+\cdots+n$

matriz S



$p_A^2=m_A^2$, $p_1^2=m_1^2$, etc

$$S_{fi} = {}_{out}\langle f | i \rangle_{in}$$

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i\,\mathcal{T}_{fi}\ , \quad \mathcal{T}_{fi} = (2\pi)^4\,\delta^{(4)}\left(p_A+p_B-\sum p_f\right)\mathcal{M}_{fi}$$

sección eficaz diferencial

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2E_A)(2E_B)|\vec{v}_A-\vec{v}_B|}\,d\Pi_{LIPS}$$

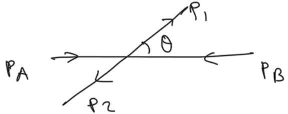
$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4\delta^{(4)}\left(p_A+p_B-\sum p_i\right)\frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\cdots\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n}$$

invariante de Lorentz

$A+B\to 1+2$ en CM

si $m_1=m_2=m_A=m_B$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2E_{CM}^2}$$



Diagramas de Feynman y amplitudes de scattering

Fórmula de reducción de LSZ (Lehman-Symanzik-Zimmermann)

$i\mathcal{T}_{fi}$ se obtiene a partir de

$$G^{(n+2)}(\underbrace{x_A, x_B}_{i}, \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{f}) = \langle \Omega | T\{\phi(x_A)\,\phi(x_B)\,\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\} | \Omega \rangle$$

$$\langle \bar{p}_1 \bar{p}_2 \dots \bar{p}_n | i\mathcal{T} | \bar{p}_A \bar{p}_B \rangle$$

$$= \left(i\int d^4x_1\, e^{ip_1x_1}(\Box_1 + m^2)\right)\left(i\int d^4x_2\, e^{ip_2x_2}(\Box_2 + m^2)\right)\dots\left(i\int d^4x_n\, e^{ip_nx_n}(\Box_n + m^2)\right)$$

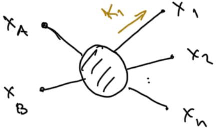
$$\left(-i\int d^4x_A\, e^{-ip_Ax_A}(\Box_A + m^2)\right)\left(-i\int d^4x_B\, e^{-ip_Bx_B}(\Box_B + m^2)\right) G^{(n+2)}(x_A, x_B, x_1, \dots, x_n)$$

demo: ver Schwartz, sec. 6.1

* $$\Box_1 + m^2 = \frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\frac{\partial}{\partial x_{1\mu}} + m^2 = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \vec{\nabla}_1^2 + m^2$$

Si no hay interacciones, $(\Box + m^2)\phi = 0$, no hay scattering

* Sabemos calcular G's.



incluye $\displaystyle\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{i}{k_1^2-m^2+i\epsilon}\, e^{-ik_1x_1}$

por la pata conectada a x_1

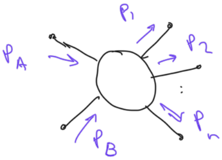
$(\Box_1 + m^2)\, e^{-ik_1x_1} = (-k_1^2+m^2)\, e^{-ik_1x_1}$

el efecto de $\left(i\int d^4x_1\, e^{ip_1x_1}\,(\Box_1+m^2)\right)$ sobre $G(x_A,x_B,x_1,\dots,x_n)$ es

$$\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_1^2-m^2+i\epsilon}\underbrace{\int d^4x_1\, e^{ip_1x_1}\, e^{-ik_1x_1}}_{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1-k_1)}(k_1^2-m^2) = \frac{1}{p_1^2-m^2+i\epsilon}\,(p_1^2-m^2)$$

se cancelan

Patas externas $\longrightarrow$ partículas "on-shell"



$p_1^2 = m^2$

$p_A^2 = m^2$

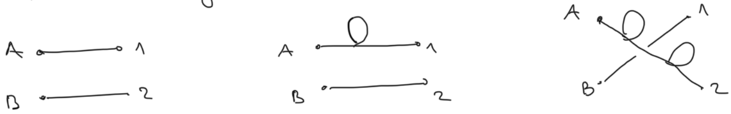
etc

no hay propagadores en las patas externas

* los diagramas que contribuyen a $G^{(n+2)}(x_A, x_B, x_1, \ldots, x_n)$ no tienen burbujas de vacío

* solo diagramas $\underbrace{\text{completamente conectados}}_{\text{i.e. las patas externas se conectan entre sí a través del diagrama}}$ contribuyen a $i\mathcal{T}_{fi}$

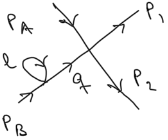
Ejemplos de diagramas desconectados



Estos diagramas describen procesos triviales con $|i\rangle = |f\rangle$

* Diagramas con lazos conectados a solo una pata externa se "amputan"

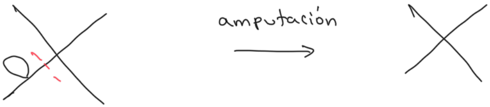
Ejemplo (ya con patas externas on-shell, sin propagadores)

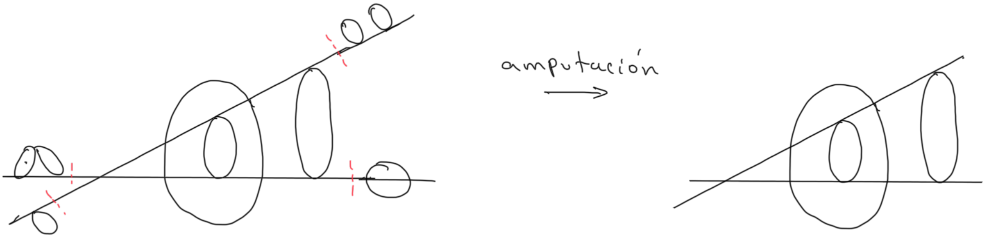


$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\frac{i}{\ell^2-m^2+i\epsilon}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon}\left(-i\lambda\,\delta^{(4)}(p_B-q)\right)\left(-i\lambda\,\delta^{(4)}(p_A+q-p_1-p_2)\right)$$

integración en q usando $\delta^{(4)}(p_B-q)$ $\Rightarrow$ $\left.\frac{1}{q^2-m^2}\right|_{q=p_B} = \frac{1}{p_B^2-m^2} = \frac{1}{0}$

Para evitar este problema se amputa





los lazos en patas externas no tienen que ver con el scattering

afectan la renormalización de m y ϕ

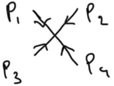
En conclusión

$$i\mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum p_f\right)$$

= suma de todos los diagramas de Feynman completamente conectados y amputados, con p_A, p_B entrantes, $p_1, \ldots p_n$ salientes

Reglas (para $\lambda\phi^4$)

1) por cada propagador $\quad \xrightarrow{\;p\;} \; = \dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

2) por cada vértice  $(-i\lambda)$, se impone conservación de momento

3) por cada pata externa  $= 1$

4) se integra sobre el momento (indeterminado) de cada lazo $\displaystyle\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

5) se divide por el factor de simetría

(se generaliza a otras teorías, adaptando el vértice y los propagadores. Por ejemplo

1) 2 campos escalares reales ϕ_1, ϕ_2 con $\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{4}\phi_1^2\phi_2^2$

$$\frac{i}{p^2 - m_1^2 + i\epsilon}$$

$$\frac{i}{p^2 - m_2^2 + i\epsilon}$$

2) 1 campo escalar real ϕ con $\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{3!}\phi^3$

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

3) QED, $\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$

$$\frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

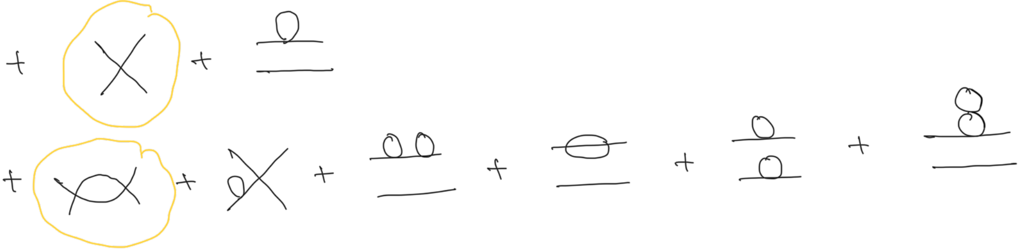
$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

)

Amplitud de scattering $A + B \to 1 + 2$ en $\lambda\phi^4$

¿posibles diagramas?

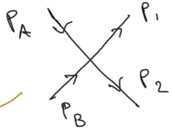
$G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) =$



$+ \dots$

* orden λ

$$i\mathcal{M}_1 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_1 - p_2) =$$



Aplicando reglas

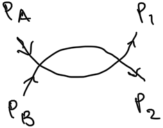
$$= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_1 - p_2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M}_1 = -\lambda$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{CM}^2}$$

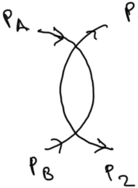
$*$ orden λ^2

$$i\mathcal{M}_2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A+p_B-p_1-p_2) =$$



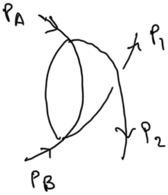
canal s

$+$



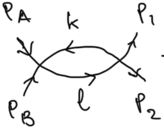
canal t

$+$



canal u

canal s



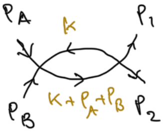
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{i}{l^2-m^2+i\epsilon}\left(-i\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A+p_B+k-l)\right)\left(-i\lambda(2\pi)^4\delta^{(4)}(l-k-p_1-p_2)\right)$$

se usa para integrar en l, fija $l = k+p_A+p_B$

$$= \left[\frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{i}{(p_A+p_B+k)^2-m^2+i\epsilon}\right]\underbrace{(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A+p_B-p_1-p_2)}_{\text{conservación de momento total}}$$

queda una sola integral en k. un solo lazo = un solo momento libre

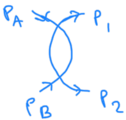
En la práctica



$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{i}{(p_A+p_B+k)^2-m^2+i\epsilon}$$

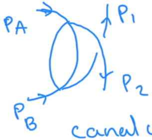
$$= i\mathcal{M}_2(s) \quad , \quad s=(p_A+p_B)^2=(p_1+p_2)^2$$

Ejercicio: comprobar que



canal t

,



canal u

son similares

Hallar $\mathcal{M}_2(t)$, $\mathcal{M}_2(u)$

s, t, u : variables de Mandelstam

$$s=(p_A+p_B)^2=(p_1+p_2)^2 \;,\; t=(p_A-p_1)^2=(p_2-p_B)^2 \;,\; u=(p_A-p_2)^2=(p_1-p_B)^2$$

Ejercicio tarea 4 $\quad s+t+u=4m^2$

En conclusión

$$iM_2 = iM_2(s) + iM_2(t) + iM_2(u)$$

$$iM_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{i}{(k+p)^2-m^2+i\epsilon}\,, \quad p = p_A + p_B$$

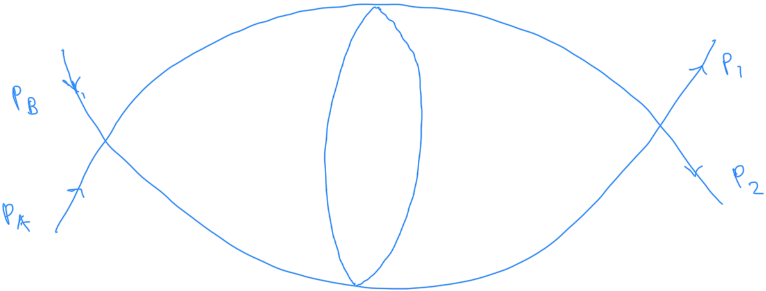
¡la integral es divergente!

para $k^2 \gg m^2, p^2$ $\quad \int \frac{d^4k}{k^4}$ tiene divergencia logarítmica

¿qué hacer? respuesta próximamente

Mientras tanto ...

Ejercicio: Determinar la contribución a $\mathcal{M}_4$ de



¿cuántos lazos? 3

¿cuantas integrales? 3

¿cuantos propagadores? 6

¿tipo de divergencia? logarítmica

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA **physics**

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.