Módulo de Teoría
Clase 11, 25-02-2021

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Recap Clase 10

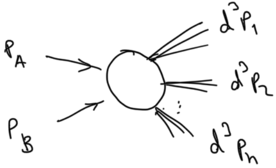
Amplitudes de Scattering

$$iM \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \Sigma p_f)$$

= suma de todos los diagramas de Feynman completamente conectados y amputados, con p_A, p_B entrantes y $p_1, \ldots, p_n$ salientes

una vez determinados los diagramas se aplican las reglas de Feynman para obtener M

$$A + B \to 1 + 2 + \cdots + n$$



$$d\sigma = \frac{|M|^2}{4E_A E_B |\bar{v}_A - \bar{v}_B|} d\Pi_{LIPS}$$

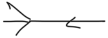
Reglas de Feynman para $\lambda\phi^4$

1) por cada propagador 

$= \dfrac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}$

2) por cada vértice 

$=-i\lambda$, se impone conservación de 4-momento

3) por cada pata externa 
$=1$

4) se integra sobre el momento indeterminado de cada lazo $\int \dfrac{d^4k}{(2\pi)^4}$

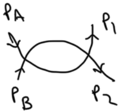
5) se divide por el factor de simetría

Ejemplo $A+B \to 1+2$ en $\lambda\phi^4$

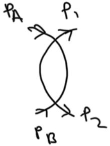
$$i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_A+p_B-p_1-p_2) =$$

orden λ

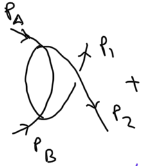
$+$



$+$



$+$

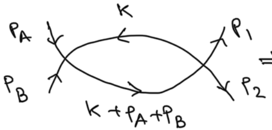


$+ \cdots$

orden λ^2

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_1 + i\mathcal{M}_2 + \cdots$$

$$i\mathcal{M}_1 = -i\lambda \quad , \quad i\mathcal{M}_2 = i\mathcal{M}_2(s) + i\mathcal{M}_2(t) + i\mathcal{M}_2(u)$$



$$\Rightarrow \quad i\mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{i}{(k+p_A+p_B)^2-m^2+i\epsilon}$$

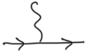
integral divergente

$\mathcal{M}_2(t)$, $\mathcal{M}_2(u)$ similares

Ejercicio

Se generaliza a otras teorías, adaptando vértices y propagadores

Ejemplo QED



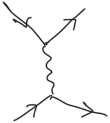
$-ie\gamma^\mu$

$$\frac{i\gamma^\mu p_\mu + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

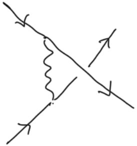
$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2 - i\epsilon}$$

Choque $e^- e^- \to e^- e^-$

diagramas a nivel árbol (tree-level)

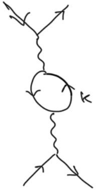


+

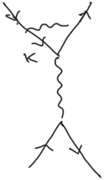


nada que integrar

diagramas a 1-lazo (1-loop)



+



+ ...

una integral $\int d^4k$ divergente

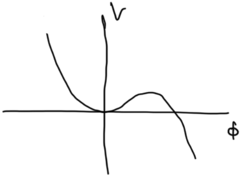
"Toy model" $g\phi^3$

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2}_{} + \frac{1}{3!}g\phi^3 .$$

$\mathcal{L}_0$ Klein-Gordon

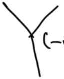
$\Rightarrow$ propagador $\xrightarrow{\ p\ }$ $\dfrac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{6}g\phi^3$



ok en teoría de perturbaciones

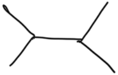
$\mathcal{L}_{int} = \dfrac{g}{3!}\phi^3 \Rightarrow$ vértice



$(-ig)$

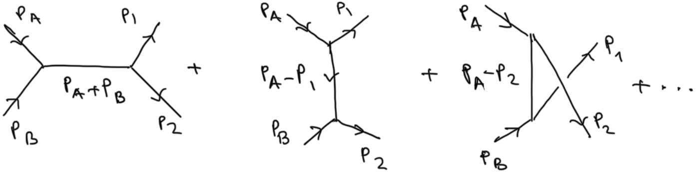
* Choque $\phi\phi \to \phi\phi$

Ahora hay diagramas a nivel árbol



a orden g^2

$$i\mathcal{M}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_A+p_B-p_1-p_2) =$$



canal s　　canal t　　canal u

ya se ha impuesto conservación de 4-momento en un vértice, en el otro aparece $(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_A+p_B-p_1-p_2)$

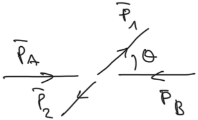
$$i\mathcal{M}_2 = i\mathcal{M}_2(s) + i\mathcal{M}_2(t) + i\mathcal{M}_2(u)$$

$$i\mathcal{M}_2(s) = (-ig)\,\frac{i}{(p_A+p_B)^2-m^2+i\epsilon}\,(-ig) = \frac{-ig^2}{s-m^2+i\epsilon} \quad , \; s=(p_A+p_B)^2$$

$$i\mathcal{M}_2(t) = \frac{-ig^2}{t-m^2+i\epsilon} \; , \; t=(p_A-p_1)^2 \quad ; \quad i\mathcal{M}_2(u) = \frac{-ig^2}{u-m^2+i\epsilon} \; , \; u=(p_A-p_2)^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{g^4}{64\pi^2 E_{CM}^2}\left[\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{u-m^2}\right]^2$$

Variables de Mandelstam



$$A + B \longrightarrow 1 + 2$$

hay 2 variables cinemáticas independientes: E_{CM} y θ

pero es conveniente introducir 3

$$s = (p_A+p_B)^2 = (p_1+p_2)^2$$

$$t = (p_A - p_1)^2 = (p_B - p_2)^2$$

$$u = (p_A - p_2)^2 = (p_B - p_1)^2$$

$$s+t+u = m_A^2+m_B^2+m_1^2+m_2^2$$

Ejercicio tarea 4

En el sistema CM, con $m_A=m_B=m_1=m_2$

$$s = E_{CM}^2 , \quad t = -2|\vec{p}_1|^2(1-\cos\theta) , \quad u = -2|\vec{p}_1|^2(1+\cos\theta)$$

Ejercicio tarea 4

DIVERGENCIAS EN DIAGRAMAS DE FEYNMAN

$$I_F \sim \underbrace{\int d^4k_1 \int d^4k_2 \cdots \int d^4k_L}_{\text{1 integral por cada lazo}} \; \underbrace{\frac{1}{k_1^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{1}{k_2^2-m^2+i\epsilon}\cdots\frac{1}{k_I^2-m^2+i\epsilon}}_{\text{1 propagador por cada línea interna}}$$

L = # de lazos

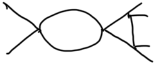
I = # de líneas internas

$$\text{integrando} \sim \frac{(\text{momento})^{4L}}{(\text{momento})^{2I}}$$

grado de divergencia superficial $\boxed{D = 4L - 2I}$

$D \geq 0$ $\quad \exists$ divergencia

$D < 0$ $\quad$ puede ser divergente, e.g.



$D = -2$ pero incluye subdiagrama

divergente

de lazos L, # de líneas internas I, se relacionan con

E = # líneas externas , V = # de vértices (pueden existir varios tipos de vértices)

$$\boxed{L = I - (V-1)}$$

en $\lambda\phi^4$ $\boxed{4V = E + 2I}$

L cuenta el # de k's independientes
En principio hay tantos k's como líneas internas, pero en cada vértice hay una δ de conservación de 4-momento.
Una δ es la global $\delta^{(4)}(P_i - P_f)$.
Quedan $(V-1)$ δ's que eliminan $(V-1)$ momentos internos

$4V$ es el # total de patas para combinar
las líneas externas usan E
las líneas internas usan $2I$ patas (empiezan y terminan en algún vértice)

$$D = 4L - 2I = 4(I - V + 1) - 2I = 2I - 4V + 4$$
$$= \cancel{2I} - (E + \cancel{2I}) + 4$$

Finalmente, en $\lambda\phi^4$

$$\boxed{D = 4 - E}$$ ¡sólo depende de E!

La teoría es simétrica bajo $\phi \to -\phi \Rightarrow$ todas las amplitudes con E impar se anulan

Quedan 2 tipos de divergencias

$D = 2$  e.g.  

$D = 0$  e.g. 

($E = 0$, $D = 4$ es la divergencia en la energía del vacío, no observable)

Ejercicio, tarea 4

Determinar D (grado de divergencia superficial) para teoría con $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda_N}{N!}\phi^N$, en 4 dimensiones.

Considerar $N = 3$ y $N = 5$.

REGULARIZACIÓN DE INTEGRALES DE FEYNMAN

las integrales se regularizan, i.e. se hacen finitas, siguiendo un procedimiento sistemático, tal como

1) usar cut-off Λ

en las integrales se restringe $|k| < \Lambda$

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

2) hacer regularización dimensional

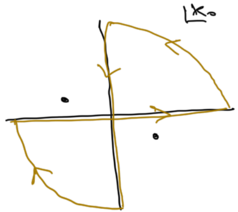
se considera la dimensión del espacio como un parámetro $\underline{\underline{d}}$

para d suficiente pequeño las integrales convergen

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}$$, luego se expande en $\varepsilon = 4-d$

Paso previo: Rotación de Wick (de Minkowski a espacio Euclídeo)

Ejemplo, $$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2}$$



los polos quedan fuera de la curva cerrada

$$\int_{\rightarrow} dk^0 = \int_{\uparrow} dk^0$$

equivale a $k^0 = i k_4$, $k^2 = -k_4^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2$

$k^2 = -k_E^2$

$$I = i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}$$

ventaja: pasar a esféricas $d^4k_E = k_E^3 dk_E d\Omega_4$

$|k_E|^3 d|k_E|$

Evaluación usando cut-off Λ

Ejemplo $\quad I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} = i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}$

próximos pasos: pasar a esféricas, introducir Λ

$$I = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{(k_E^2 + m^2)^2}$$

$$I = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2/m^2} du \frac{u}{(1+u)^2}$$

$$I = \frac{i}{16\pi^2} \left(\log \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 + \cdots \right)$$

divergencia logarítmica

$\int d\Omega_4 = 2\pi^2$

área de esfera $\quad k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = 1$

$$\int du \frac{u}{(1+u)^2}$$

$$= \int du \left[\frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2} \right]$$

Evaluación vía regularización dimensional

Ejemplo $I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} = i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}$

próximos pasos : $\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int \frac{d^dk_E}{(2\pi)^d}$, $d^dk_E = k_E^{d-1} \, dk_E \, d\Omega_d$

$$I = \frac{i}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dk_E \frac{k_E^{d-1}}{(k_E^2 + m^2)^2}$$

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

$$\int_0^\infty du \frac{u^{\frac{d-2}{2}}}{(1+u)^2} = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$$

$$I = \frac{i}{(4\pi)^{d/2} (m^2)^{2-d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$$

$\varepsilon = 4 - d$, en $\lim d \to 4, \varepsilon \to 0$, $\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \cdots$

Polo en $\varepsilon = 0$ $\longleftrightarrow$ div. logarítmica

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2}$$

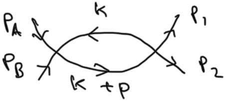
relevante para 

Ejercicio. Evaluar

$$\tilde{I} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

relevante para 

vía cut-off y vía regularización dimensional

Regresamos a 

$p = p_A + p_B$ $\quad s = (p_A + p_B)^2$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

se usa el truco de Feynman: $\displaystyle \frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}$

luego se cambia variable a $l = k + xp$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \underbrace{\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - c^2 + i\epsilon)^2}}_{} \quad , \quad c^2 = m^2 - x(1-x)s$$

I evaluada anteriormente

$$I = \frac{i}{16\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{c^2} + \cdots$$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \frac{\Lambda^2}{m^2 - x(1-x)s}$$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{s}$$

Próximamente Renormalización

Función Γ de Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du \ , \quad \mathrm{Re}\, z > 0$$

integrando por partes

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1) \Rightarrow \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2)$$

Γ(z) es analítica excepto por polos en $z = 0, -1, -2, \ldots$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)$$

$$\Gamma(-1+\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - 1 + O(\varepsilon)$$

$\gamma = 0{,}5772$ constante de Euler–Mascheroni

In[52]:= `Gamma[6] / 5!`

Out[52]= 1

In[53]:= `Gamma[1 / 2]`

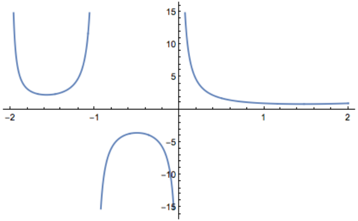
Out[53]= $\sqrt{\pi}$

In[54]:= `Gamma[-1 / 2]`

Out[54]= $-2\sqrt{\pi}$

In[55]:= `Plot[Gamma[x], {x, -2, 2}]`

Out[55]=



In[56]:= `Series[Gamma[ϵ], {ϵ, 0, 1}] // Simplify`

Out[56]= $\frac{1}{\epsilon} - \mathrm{EulerGamma} + \frac{1}{12}\left(6\,\mathrm{EulerGamma}^2 + \pi^2\right)\epsilon + O[\epsilon]^2$

In[57]:= `EulerGamma // N`

Out[57]= 0.577216

In[58]:= `Series[Gamma[-1 + ϵ], {ϵ, 0, 1}] // Simplify`

Out[58]= $-\frac{1}{\epsilon} + (-1 + \mathrm{EulerGamma}) + \left(-1 + \mathrm{EulerGamma} - \frac{\mathrm{EulerGamma}^2}{2} - \frac{\pi^2}{12}\right)\epsilon + O[\epsilon]^2$

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA **physics**

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.