Buenas tardes!

Curso: Datos Módulo MC+DM

La CoNGA

Ernesto Medina T

Combinación de distribuciones

$W(s_1)$, $w(s_2)$ dos variables aleatorias

la misma distribución $w(s)$ tiene media y varianza finita

$W(s_1,s_2)$

$x = s_1 + s_2$

s_1, s_2 y indep

$$P(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(s_1)\,w(s_2)\,\delta(x-(s_1+s_2))\,ds_1 ds_2$$

$$\delta(x-(s_1+s_2)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{ik(x-(s_1+s_2))}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(s_1)\,\omega(s_2)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{ik(x-(s_1+s_2))}\,ds_1\,ds_2$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{ikx}\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\omega(s_1)\,e^{-iks_1}\,ds_1}_{N_y}\Bigg)\Bigg(\int_{-\infty}^{\infty}\omega(s_2)\,e^{-iks_2}\,ds_2\Bigg)$$

$$Q(k)$$

$$P(x)\,\underline{dx} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{ikx}\,\big(Q(k)\big)^2 \longleftarrow$$

$$N\to\infty$$

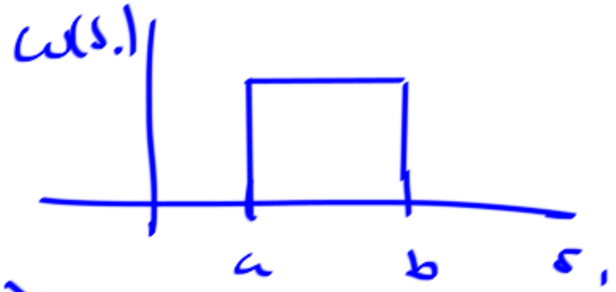
// Thermal Physics

$\longrightarrow$ $\underline{\text{Reif}}$

11

$x = s_1 + s_2$

$w(s_1) =$ uniforme en cierto intervalo



$x - s = s_1$

$$P(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{y}{w(s_1)}\, w(x - s_1)\, ds_1$$

$$\frac{\text{Var } X}{\langle X\rangle^2} \sim \underline{\underline{\frac{C}{N}}} + \frac{D}{N^2} + \frac{E}{N^3} + \cdots$$

límite termodinámico

Procesos de Markov

$\{X_t, t \in T\}$ $\quad T \in \mathbb{R}$

Propiedad de Markov

si $\forall\, s>0,\ t$ $\quad (X_{t+s} \mid X_{u\le t}) \sim (\underset{u<t}{X_{t+s}} \mid \underset{\text{presente}}{X_t})$

Si T es discreto	Cadena de Markov
" T es continuo	Proceso de saltos de Markov.

Cadena de Markov:

$$X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$$

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1 \dots X_t = x_t)$$

$$= P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t)$$

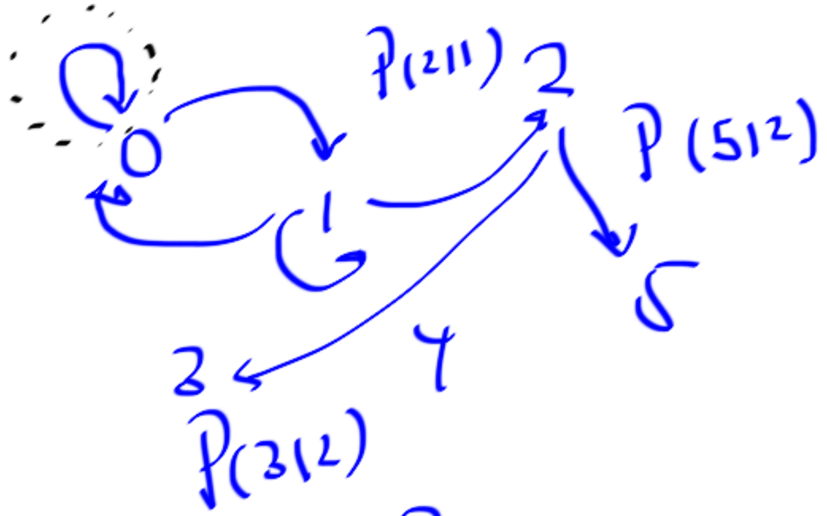
X_0 distribución de arranque $\underline{\underline{t=0}}$

$$\underbrace{P(X_{t+1}|X_t)}_{\text{Probabilidad de transición}} = P(X_2|X_1) = P(X_3|X_2) \quad \cdots\cdots$$

$$P(X_0, X_1, \ldots X_t) = P(X_0)\,P(X_1|X_0)\,P(X_2|X_1,X_0) \cdots\cdots P(X_t|X_1,X_2 \ldots X_{t-1})$$

$$\Rightarrow \quad = P(X_0)\,P(X_1|X_0)\,P(X_2|X_1) \cdots\cdots P(X_t|X_{t-1})$$

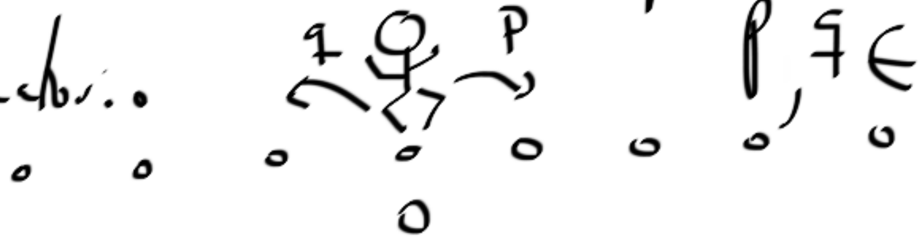
Proceso de Markov



estados posibles

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & & \\ p_{20} & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Caminante aleatorio



prob. $p+q=1$

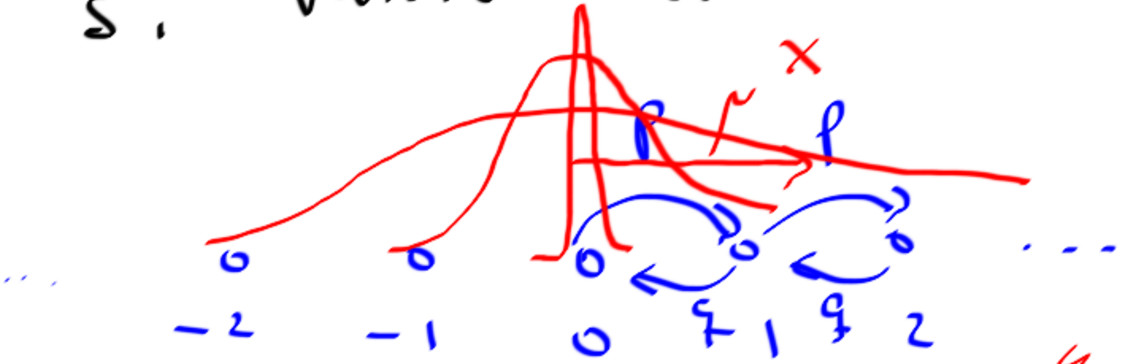
$p, q \in [0,1]$

$$P(i,i+1) = p \quad ; \quad P(i,i-1) = q$$

$$\forall i \in \mathbb{Z}$$

Si variable aleatoria $x_0 = 0$ $\quad P(x_0=0) = 1$

$P(x_i) = 0$



difusión

$$\langle x^2 \rangle \sim Dt$$

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} \sim \sqrt{Dt} \sim t^{1/2}$$

$$P(X_{t+s}=j \mid X_t=i)$$ luego de

t pasos/unidades de tiempo

Definimos $\underset{\uparrow}{\Pi^{(t)}} = (\overbrace{P(X_t=1), P(X_t=2) \cdots P(X_t=m)}^{\text{estados}})$

$P(X_t=1)$ → prob. de estar en 1, $P(X_t=2)$ → prob. de estar en 2

$$(\Pi^{(t)})^T = \begin{pmatrix} P \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(t)} = \underset{\text{horizontal}}{\Pi^{(0)}} \underset{\rightsquigarrow\, m \times m}{P^{\text{transición}}} \Rightarrow (\Pi^{(t)})^T = (P^{\text{transición}})^T (\Pi^{(0)})^T$$

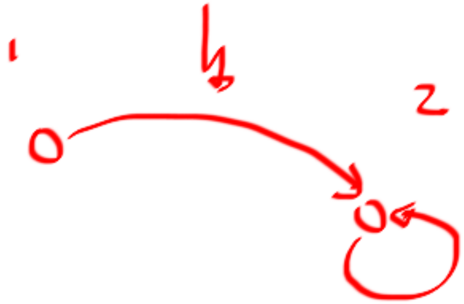
Sistema de 2 edos (1,2)

$$\Pi^{(1)} = \left(P(\underset{\overset{\uparrow}{t=0}}{X_0}=1) , P(\underset{\overset{\uparrow}{t=0}}{X_0}=2) \right) \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left(P(X_1=1), P(X_1=2) \right) = \left(\underline{\underline{P(X_0=1)P_{11}}} + \underline{\underline{P(X_0=2)\,P_{21}}} , \; P(X_0=1)\,P_{12} + P(X_0=2)\,P_{22} \right)$$

↖ Constante en el tiempo

;



Una iteración adicional

$$\longrightarrow \Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} P$$

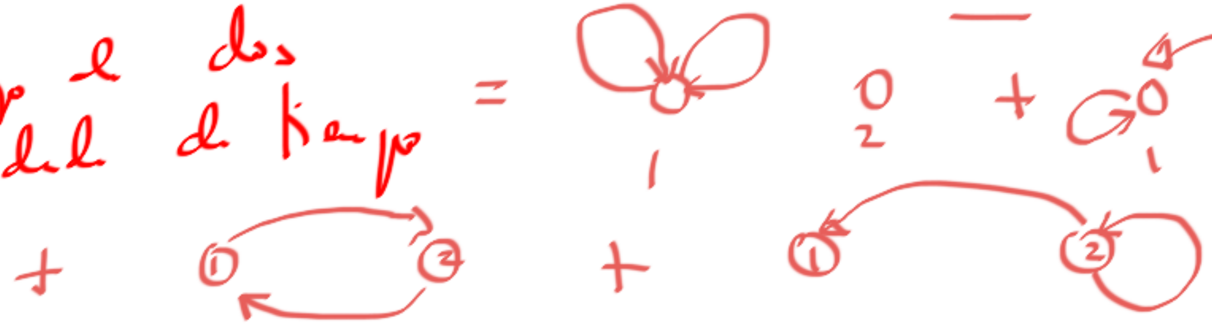
$P(X_2 = 1)$

prob. de estar en el estado 1 luego de dos unidades de tiempo

$$= \underline{\underline{P(X_0=1)}}\,\underline{\underline{P_{11}}}^{2} + P(X_0=2)\,P_{21}P_{11}$$

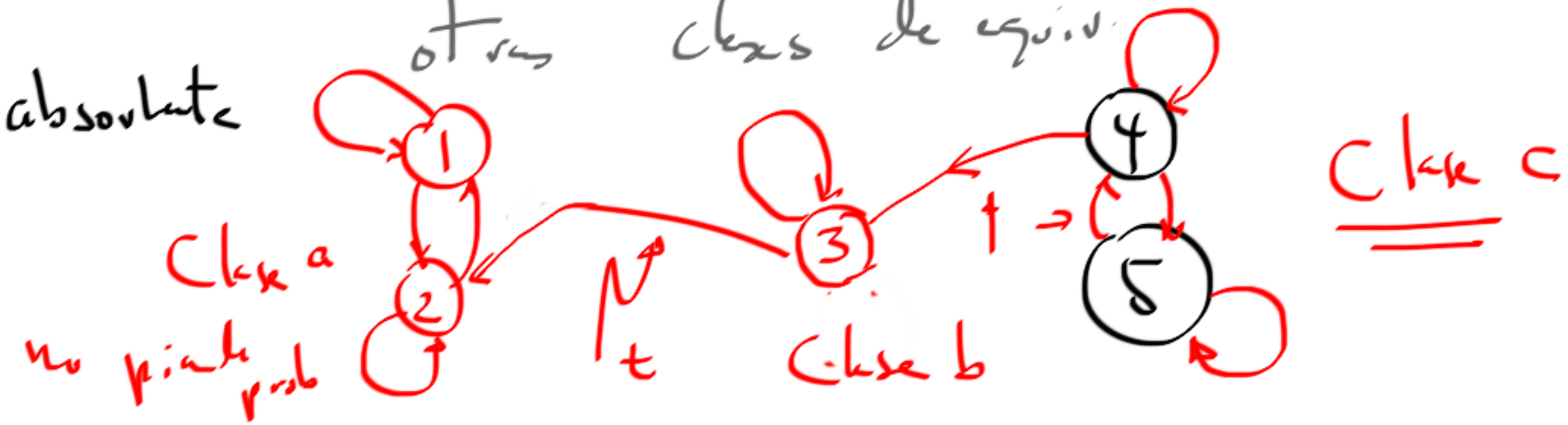
$$+ P(X_0=1)\,\underline{\underline{P_{12}}}\,P_{21} + P(X_0=2)\,P_{22} \times P_{21}$$

=



Comunicación entre i ∧ j : ∃ comm entre i ∧ j si se dan procesos en los dos sentidos $P_{ij}, P_{ji} \neq 0$ //

Clase: Conjunto de estados que se comunican entre sí pero no con otras clases de equiv.

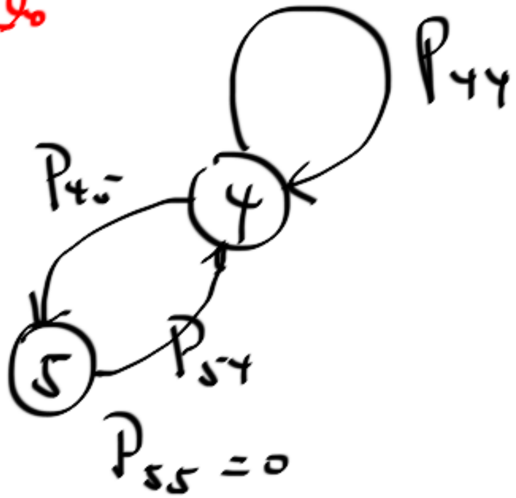


Conjunto cerrado de estados: A

$$\sum_{j\in A} P(i,j) = 1 \quad \forall i \in A$$

Clase i es absorbente si es un conjunto cerrado

Comportamiento límite



- Una cadena de Markov irreducible (una sola clase) con matriz de transición P, la probabilidad luego de t pasos converge a un vector constante independiente de las cond. iniciales

$\rightsquigarrow$ aplicada t veces

$$\lim_{t\to\infty} \pi_i^{(0)} P^t(i,j) = \pi_j^{(t)} \rightsquigarrow ??$$

$i, j \in n$ estados

$\Longrightarrow$

$$\sum_j \pi_j = 1 \qquad \pi_j > 0$$

Simulation and the
MC method

Rubinstein + Kroese