Buenas tardes!

Curso: MC + DM modelo Datos

La CONGA

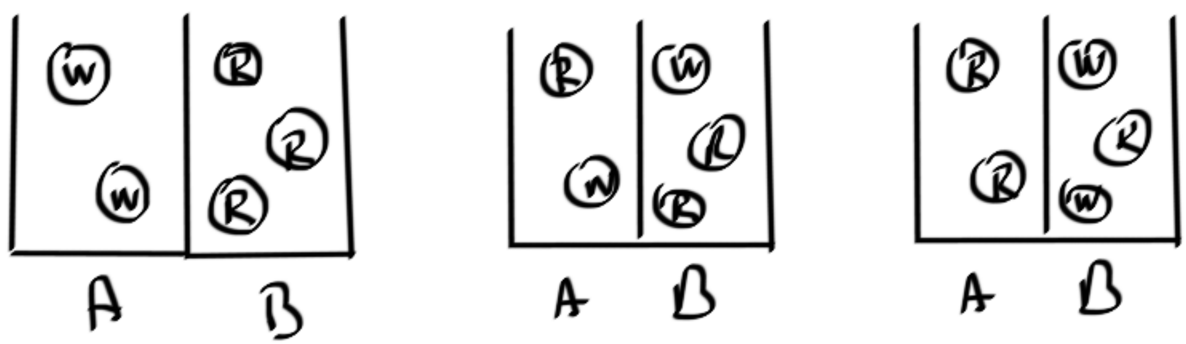
Ernesto Medina

Teorema: Para una cadena de Markov irreducible y aperiódica con la matriz de transición P, si la distribución límite π $\exists$ entonces está unívocamente determinada por la solución de la ec.

$$\vec{\pi} = \vec{\pi} P \qquad 0 \le \pi_j < 1 \qquad \sum_j \pi_j = 1$$

Ej:

edos $\rightarrow \triangle 1 \dashrightarrow \triangle 2 \dashrightarrow \triangle 3$



Operaciones $\rightarrow$ $P_{12} = 1$

escoger una pelota de A y una de B e intercambiar

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_{32} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P_{11} = 0 \qquad P_{13} = 0 \qquad P_{22} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P_{12} = 1 \qquad P_{21} = \frac{1}{6} \qquad P_{23} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$P_{31} = 0$, $\underline{\underline{P_{32} = \frac{2}{3}}}$, $P_{33} = \frac{1}{3}$ Chequear

Tarea.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$ No simetrica!

$\underline{\underline{\Pi^{(0)}}}$ probabilidades $t=0$

Tiempo de

$$P \cdot P = P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{23}{36} & \frac{10}{36} \\ 1/9 & \frac{20}{36} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{N\to\infty} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Debido a que P es no simétrica

$\Rightarrow$ 2 problemas de autovalores (autovectores izquierdos y derechos)

$$\lambda = 1 \qquad \pi = \left(\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

$$\boxed{\lambda \pi = \pi P} = \left(\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{10}, \frac{6}{10}, \frac{3}{10}\right)$$

Otra notación del problema

$$P_{m,n} = P(n,1|m,0)$$

$$= P(n,t+1|m,t) \quad \text{invariante frente a } t$$

tiempo

$$P(n,t|m,t_0) = \left(P^{t-t_0}\right)_{m,n}$$

$$\Pi(n,t) = \sum_{m=1}^{M} \Pi(m,0)\left(P^{t}\right)_{m,n}$$

operación Matricial

$$\Pi(n,t) \equiv \langle \Pi(t) | n \rangle$$

$$P(n,t,m,t_0) \equiv \langle m | P(t|t_0) | n \rangle$$

$$\sum_{n=1}^{M} |n\rangle\langle n| = \mathbb{1} \qquad \langle m|n\rangle = \delta_{n,m}$$

$$\vec{\pi} P = \lambda \vec{\pi}$$

$$\vec{\pi}(P - \mathbb{1}\lambda) = 0 \Rightarrow \underbrace{\det(P - \mathbb{1}\lambda)}_{=0}$$

$$P(t|t_0) = \sum_{i=1}^{M} \lambda^{t-t_0} \overbrace{|\psi_i\rangle\langle\chi_i|}^{\text{Matriz}} \quad ( )^{t}$$

$|\psi_i\rangle$ autovector por izq

$\langle\chi_i|$ autovector por derecha

3 autovalores

$$\underbrace{\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{6}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{3}}$$

$$|\lambda_{i\neq 1}| < 1$$

$$P^{t-t_0} = \underline{\underline{P(t|t_0)}} = (\lambda_1 = 1)^{t-t_0}\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$+ \underbrace{\left(\lambda_2 = \frac{1}{6}\right)^{t-t_0}}_{\downarrow\ 0} \underbrace{\begin{pmatrix} \text{calcular} \end{pmatrix}}_{} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^{t-t_0}}_{\downarrow\ 0} \begin{pmatrix} \text{calcular} \end{pmatrix}$$

$t - t_0 \to \infty$

pérdida de la historia

$\Rightarrow$ Función de estado

Generación de #'s aleatorios

Históricamente #'s por procesos naturales → muy lentos

- Computación / computadoras
  Mapas → pseudoaleatorios → rand
  Caos   determinístico
  correlación implícita

Generadores congruenciales Lineales

Semilla o seed condición inicial

$$X_{t+1} = a X_t + c \pmod{m}$$

$$X_0 = \text{seed}$$

$a, c \rightarrow$ secreto industrial

pruebas estadísticas

Eg

$a = c = X_0 = 3$

$m = 5$

$X_{t+1} = 3X_t + 3 \pmod{5}$

$X_1 = 3 \cdot 3 + 3 = 12 \Rightarrow \frac{12}{5} = 2 \quad | \quad X_1 = 2$

$X_2 = 3 \cdot 2 + 3 = 9 \Rightarrow \frac{9}{5} = 1 \quad | \quad X_2 = 4$

$X_3 = 3 \cdot 4 + 3 = 15 \Rightarrow \frac{15}{5} = 3 \quad | \quad X_3 = 0$

$X_4 = 3 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow \frac{3}{5} = 0 \quad | \quad X_4 = 3$

$\downarrow$

$X_0 = 3$

periods

4

$\frac{X_t}{m} = [0,1]$

$$\boxed{m = 2^{31} - 1}$$

No es el cdo del artics

también periodo

$a = 7^4$ $c = 0$

puede probar python

Generador recursivo múltiple (Numerical recipes)

$$\to \quad X_t = (a_1 X_{t-1} + \dots + a_k X_{t-k}) \bmod m$$

$\frac{X_t}{m} \in [0,1]$ $\vec{X}_0 = (X \ldots\ldots)$

k elementos

$m^k - 1$

<u>periodo</u>

Generador L'Ecuyer

X_t

$a_2 = 1403580 \rightarrow a_{i \neq 2,3} = 0$

$a_3 = -810728$

$m_1 = 2^{32} - 209$

Y_t

$a_1 = 527612$

$a_3 = -1370589$

$m_2 = 2^{32} - 22853$

pasa todas las pruebas estadísticas

$$Z_t = \begin{cases} \dfrac{X_t - Y_t + m_1}{m_1 + 1} & \text{if } X_t < Y_t \\[2ex] \dfrac{X_t - Y_t}{m_1 + 1} & \text{if } X_t > Y_t \end{cases}$$

$3 \times 10^{57} \leftarrow$ periodo