

Módulo de Instrumentación 2022

Clase 21: Límites de la predicción

Mario Cosenza



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Atractores extraños de sistemas caóticos

Ecs. Lorenz

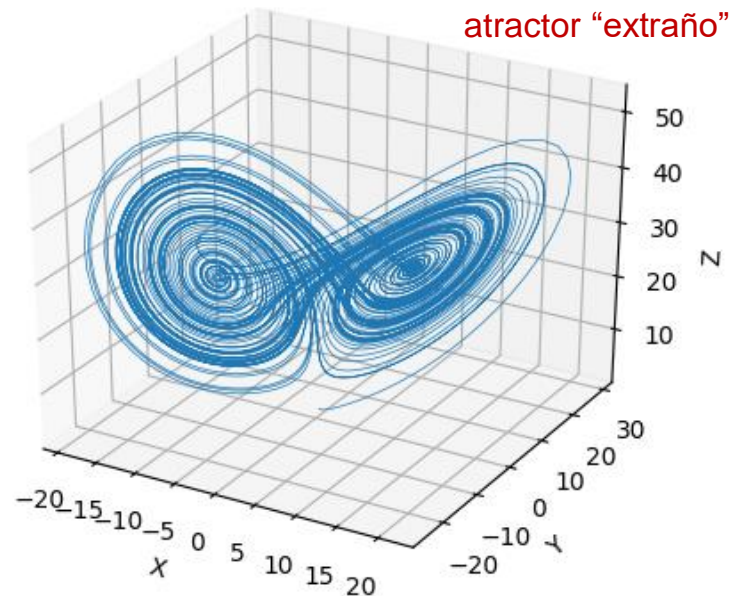
$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y$$

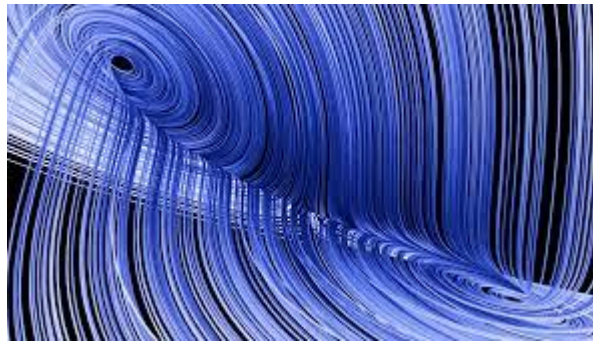
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Solución $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en espacio de fase

$a = 10$
 $r = 28$
 $b = 2.67$



Atractor “extraño” posee *geometría fractal*
(estructuras recurrentes bajo cambio de escala).



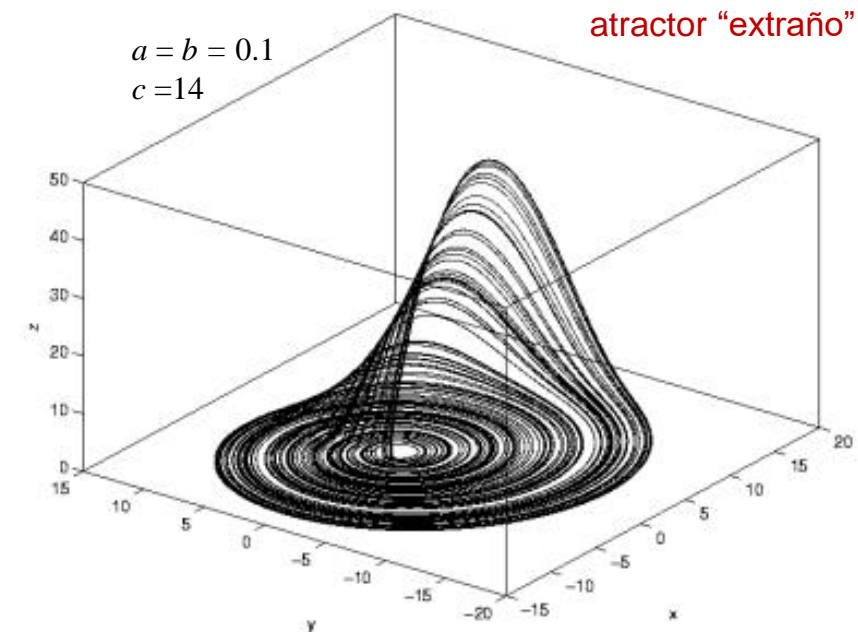
Ecs. Rössler

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$

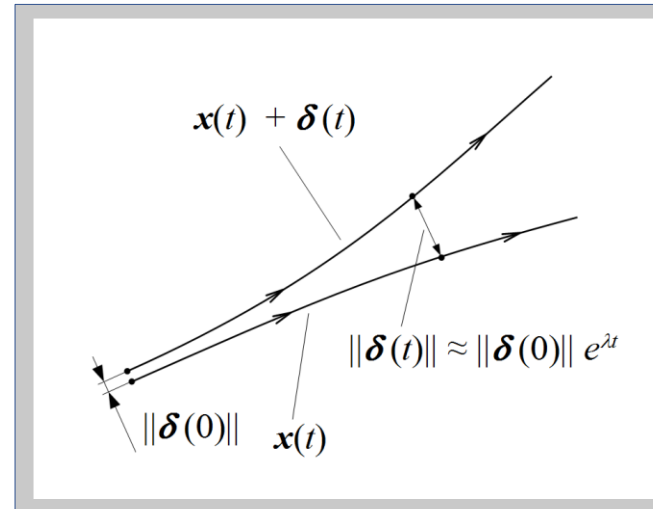
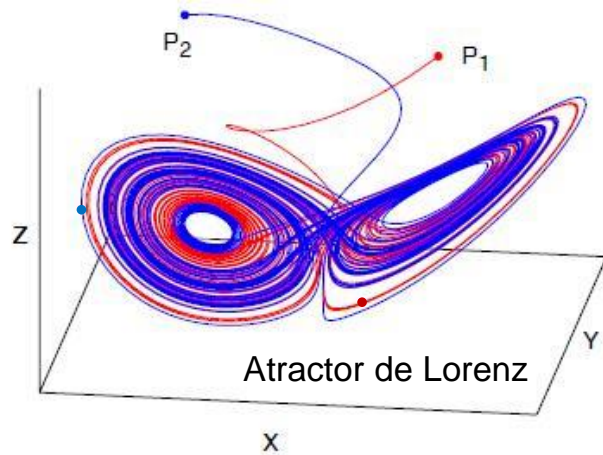
$a = b = 0.1$
 $c = 14$





Separación exponencial de las trayectorias

Distintas condiciones iniciales se separan y recorren el atractor en forma diferente.



Separación crece exponencialmente:

$$\delta(t) \propto e^{\lambda t}$$

hasta alcanzar el tamaño del atractor.
Separación varía en el tiempo.
En promedio para tiempos largos, separación aumenta: $\lambda > 0$.

λ : Exponente de Lyapunov.

Condiciones iniciales $P_1 \approx P_2$ $\delta(0)=10^{-6}$

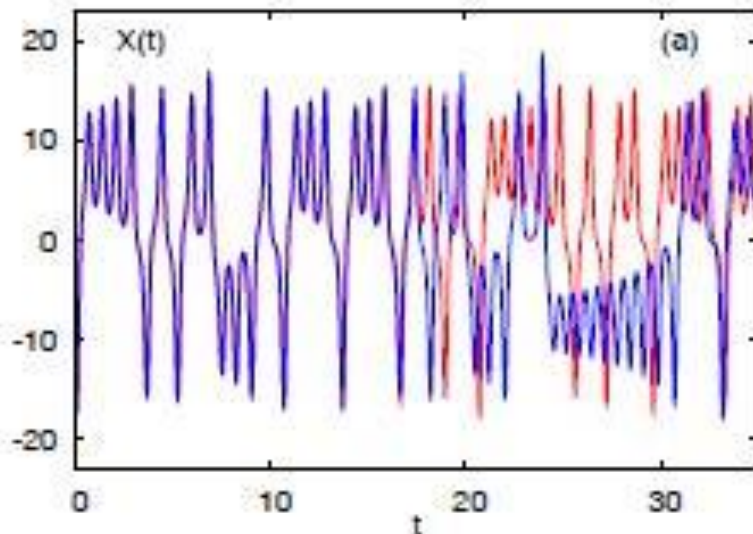
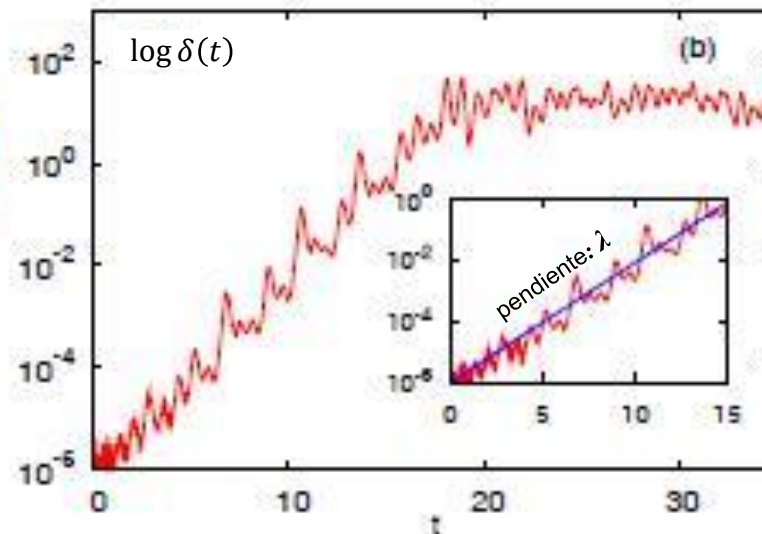


Gráfico semilog $\delta(t)$ vs. t



Exponente de Lyapunov

$\lambda > 0$: caótico.

$\lambda < 0$: periódico o punto fijo.

**$1/\lambda$: horizonte de predicción,
tiempo de predictibilidad**



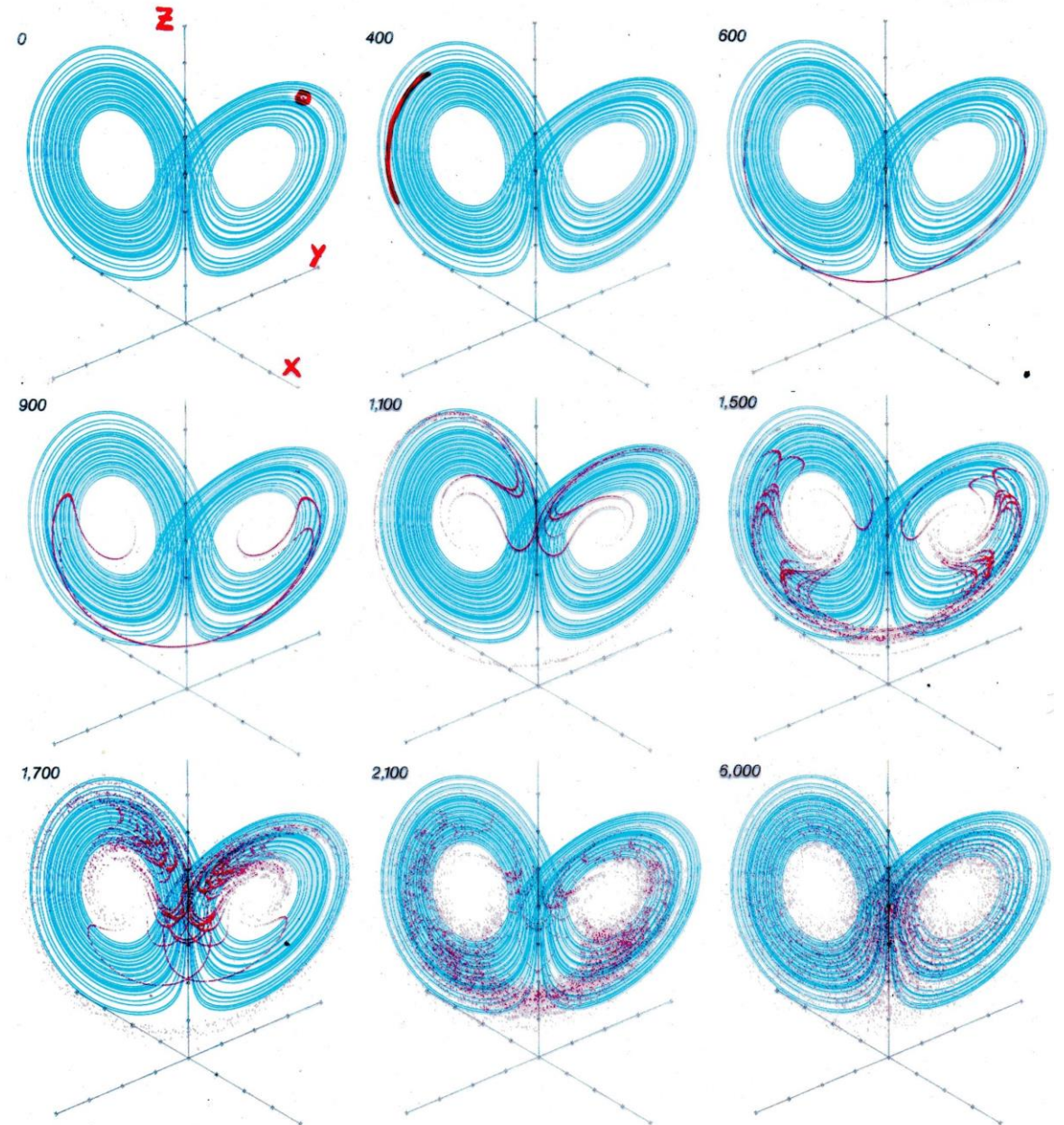
Expansión y plegamiento

Atractor de Lorenz

● Ensemble (conjunto) de condiciones iniciales

Imágenes de la evolución
de trayectorias sobre el
atractor para distintos tiempos

Además de separación de trayectorias, ocurre *plegamiento*; trayectorias se distribuyen sobre el atractor formando líneas y estructuras a escalas cada vez mas pequeñas, sin intersección.
→ estructura fractal.





Sistemas dinámicos con tiempo discreto: mapas

Mapas o funciones iterativas son sistemas dinámicos deterministas:

$$x_{n+1} = f(x_n, r) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad r = \text{parámetro}$$

$$x_n, f \in \mathbb{R} \rightarrow \text{estados continuos, una variable.}$$

Secuencia de iterados para un valor r fijo: evolución con tiempo discreto.

$$\text{Dado } x_0 : \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = f^{(n)}(x_0)$$

Mapas aparecen en muchos contextos:

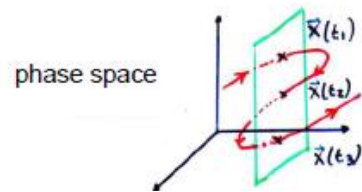
i) Series de datos experimentales en el tiempo.

ii) Integración numérica: $\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t))$

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = g(x(t)) \rightarrow \text{asumir} \quad t = n\Delta t, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$\rightarrow x[(n+1)\Delta t] = g(x(n\Delta t)\Delta t + x(n\Delta t)) \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$

iii) Sección de Poincaré en espacio de fase de sistemas con estados continuos:



intersection of trajectory $x(t)$
with a surface section
in phase space

Serie temporal: $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_m)$

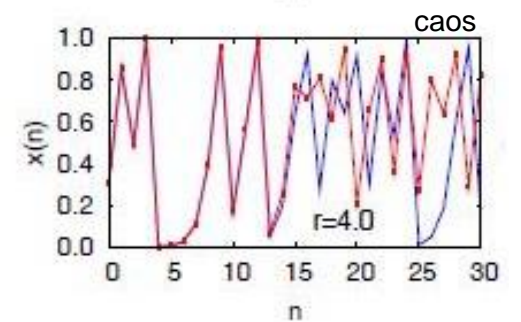
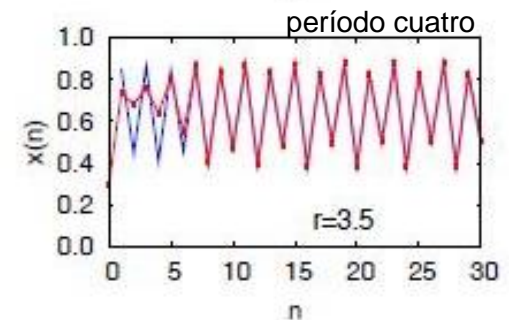
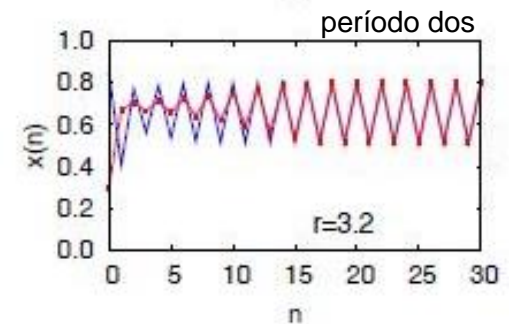
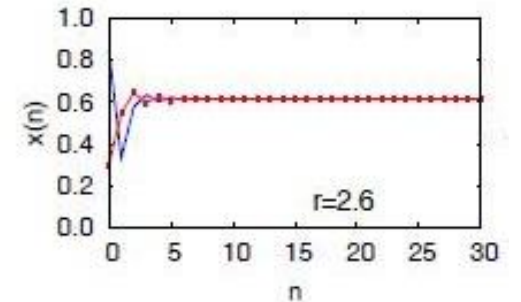
Ejemplo:

mapa logístico
(modelo de crecimiento
de población con
recursos limitados).

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_n \in [0, 1]$$

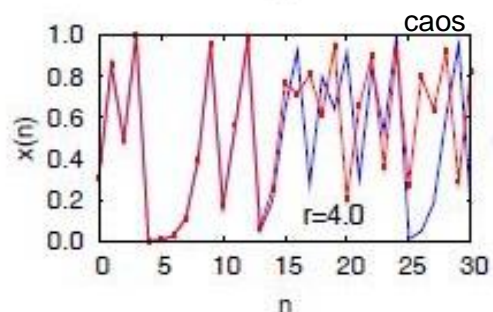
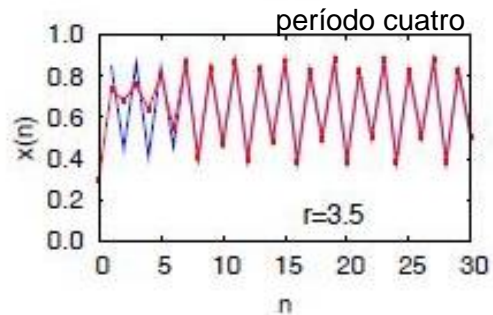
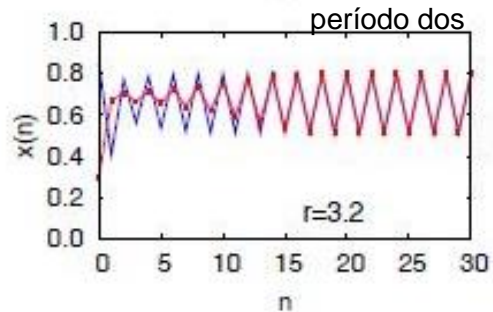
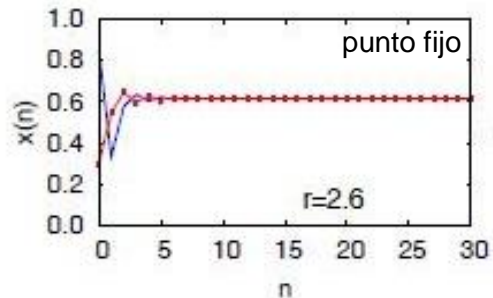
Condiciones iniciales
rojo y azul diferentes



Caos: evolución irregular,
extremadamente sensible
a pequeños cambios en
condiciones iniciales rojo y azul
 \rightarrow falta de predicción.



Dependencia de parámetros: diagrama de bifurcación



Comportamiento dinámico del sistema depende de parámetros.

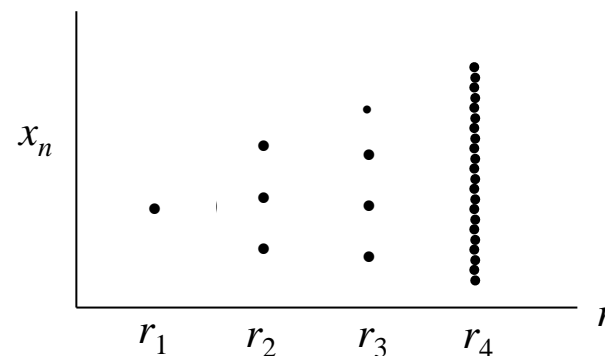
$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad x_n \in [0,1] \quad r = \text{parámetro}$$

Secuencia de iterados (órbita) para un valor r fijo: $x_0 : \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ n grande

Diagrama de bifurcación: gráfico de órbitas asintóticas en función de r .

Algoritmo:

1. Dado r , obtener órbita a partir de x_0 : $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$
2. Descartar m puntos transitorios \rightarrow órbita asintótica para r : $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$
3. Para sucesivos valores r , obtener $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$
4. Graficar $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$ vs. r .



$n-m$ puntos para cada r .

r_1 : todos los puntos son iguales \rightarrow punto fijo.

r_2 : periodo 3. r_3 : periodo 4.

r_4 : caos (puntos no se repiten regularmente, segmentos continuos).



Diagramas de bifurcación: ejemplos

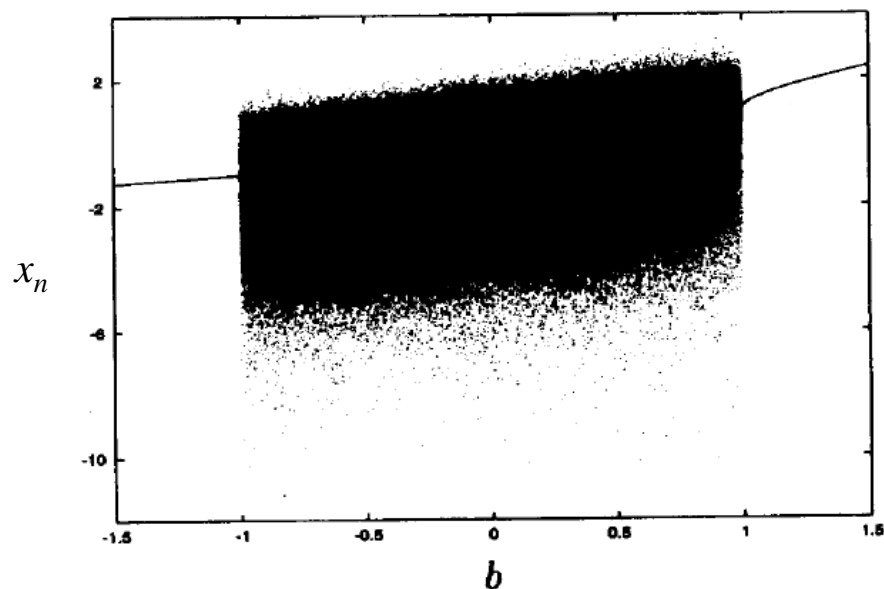
Bifurcación: cambio de comportamiento dinámico al variar parámetros.

mapa logístico

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1-x_n) \quad x_n \in [0,1]$$

Secuencia de duplicación de órbitas periódicas: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$ para $r < 3.569 \dots$

Caos y ventanas de periodicidad para $r > 3.569 \dots$

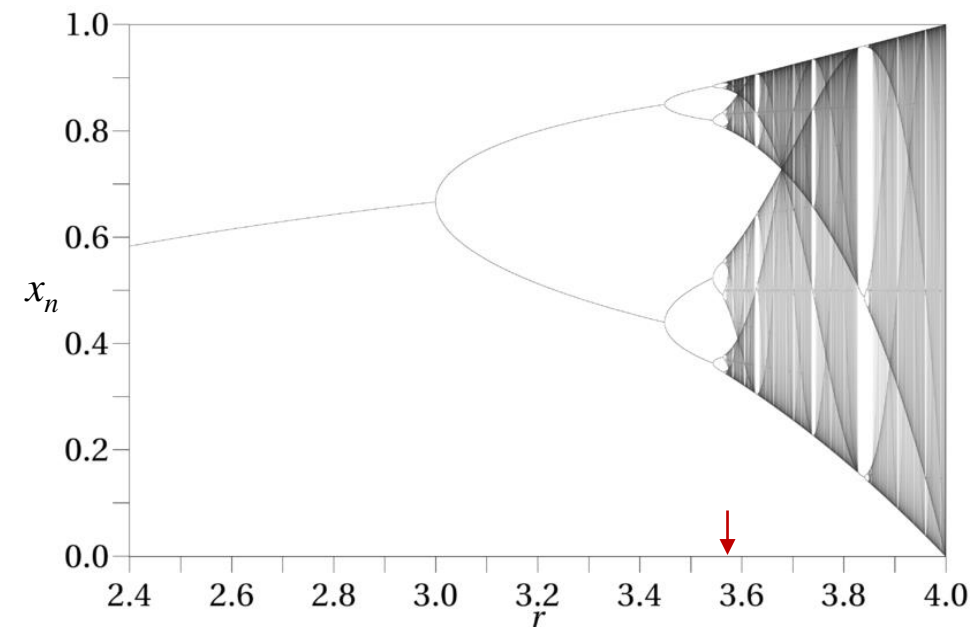


mapa logarítmico (singular)

$$x_{n+1} = f(x_n) = b + \ln |x_n| \quad x_n \in \mathbb{R}$$

caos “robusto” (no ventanas periódicas) en intervalo finito $b \in [-1, 1]$

Caos requiere f no lineal: condición necesaria, pero no suficiente.



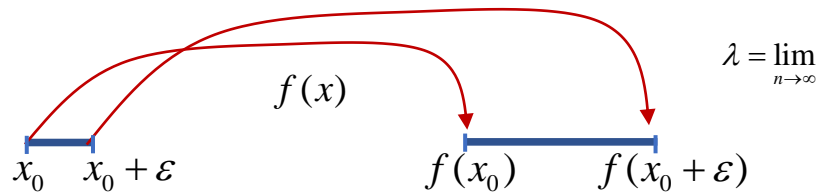


Exponente de Lyapunov para mapas

$x_{n+1} = f(x_n, r)$ mapa unidimensional, r : parámetro

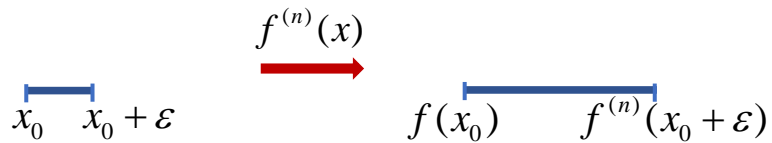
$x_0 \rightarrow x_1 = f(x_0) \rightarrow x_2 = f(x_1) \rightarrow x_3 = f(x_2) \rightarrow \dots \rightarrow x_n = f^{(n)}(x_0)$

órbita o secuencia: $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$



Error relativo después de una iteración

$$E_1 = \left| \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \right|$$



Error relativo después de n iteraciones

$$E_n = \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\varepsilon} \right|$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_n = \left| \frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} \right| = \left| \frac{df(x_0)}{dx} \times \frac{df(x_1)}{dx} \times \frac{df(x_2)}{dx} \dots \times \frac{df(x_n)}{dx} \right|$$

$E_n < 1$ estable, $E_n > 1$ inestable

Suponer separación exponencial, n grande: $E_n \propto e^{\lambda n}$

λ : exponente de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln E_n$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_0)}{dx} \times \frac{df(x_1)}{dx} \times \frac{df(x_2)}{dx} \dots \times \frac{df(x_n)}{dx} \right|$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

$\lambda < 0$ órbita estable, periódica

$\lambda > 0$ órbita inestable, caótica

Exponente de Lyapunov depende de parámetro r

En la práctica, tomar x_0 después de m transitorios, n suficientemente grande



Cálculo del exponente de Lyapunov: ejemplos

1) Exponente de Lyapunov en función de r : mapa logístico $f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$

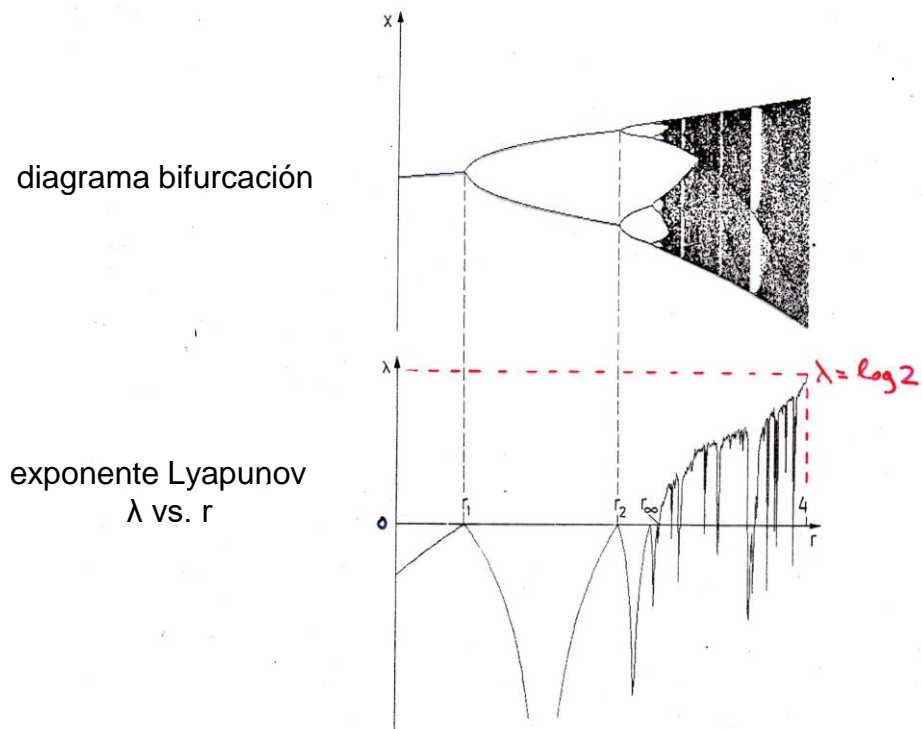
$$\lambda(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i, r)|$$

$$f'(x_n) = r(1 - 2x_n) \quad \lambda(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r(1 - 2x_i)|$$

Para $r < r_\infty = 3.56... \Rightarrow \lambda(r) < 0$, órbita estable periódica

Para $r > r_\infty = 3.56... \Rightarrow \lambda(r) > 0$ caos,

"ventanas" periódicas $\lambda(r) < 0$ entre el caos



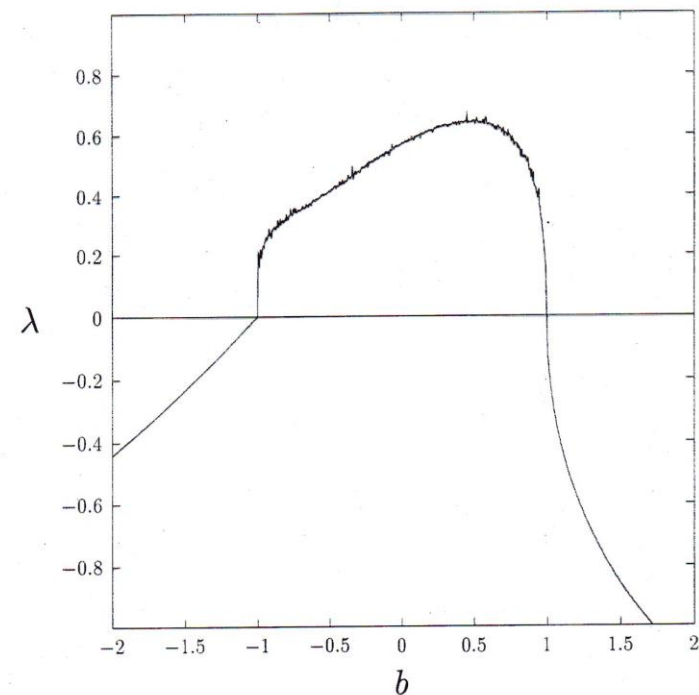
$m=10^3$ transitorios
 $n=10^4$ para cada b, r

2) λ en función de b : mapa $f(x_n) = b + \ln|x_n|$

$$f'(x_n) = \frac{1}{|x_n|}$$

$$\lambda(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{1}{x_i} \right|$$

$\lambda > 0$ para $b \in [-1, 1]$, caos robusto,
sin ventanas de periodicidad



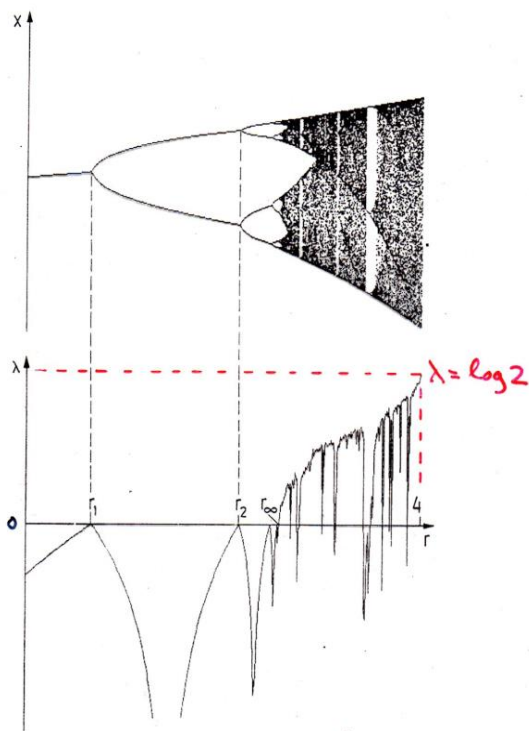


Caos y límite de predicción: ejemplo

Exponente de Lyapunov mapa

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad x_n \in [0,1]$$

Para $r = 4 \rightarrow \lambda = \ln 2$



Límite de predicción

Suponer separación exponencial de trayectorias para n grande:

$$E_n = E_0 e^{\lambda n}$$

E_0 : separación inicial

¿En cuantas iteraciones $n \rightarrow E_n \approx 1$? (tamaño del espacio)

$$n = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{E_n}{E_0} \right)$$

Supongamos $E_0 = 10^{-6}$:

$$n = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{1}{10^{-6}} \right) = 6 \times \frac{\ln 10}{\ln 2} = 17.3$$

Predicción imposible para $n > 17$

→ horizonte de predicción



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.