LA-CoNGA physics

Teoría: Altas Energías Clase 04/20

Electrodinámica Cuántica Prof. José Antonio López Rodríguez

31 de marzo de 2022

Electrodinámica Cuántica

José Antonio López Rodríguez

Universidad Central de Venezuela

31 de marzo de 2022

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Contenido

Recuento

De la clase anterior ...

- Recodemos:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{1}$$

- La base de matrices γ que estamos usando:

$$\gamma^\mu \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2}$$

- La acción asociada a la ecuación de Dirac

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \tag{3}$$

donde:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \tag{4}$$

- La invariancia bajo cambios de fase global $\psi \longrightarrow e^{-i\theta}\psi$:

$$J^{\mu}_{\theta} = \theta\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \tag{5}$$

$$\partial_0\left(\psi^{\dagger}\psi\right) = -\partial_i\left(\bar{\psi}\gamma^{i}\psi\right). \tag{6}$$

- La invariancia de traslaciones define el 4-momento lineal

$$\delta_{\epsilon}x^{\mu} = \epsilon^{\mu}; \quad \delta_{\epsilon}\psi = \delta_{\epsilon}\bar{\psi} = 0. \tag{7}$$

$$J^{0}{}_{\nu} = T^{0}{}_{\nu} \equiv p_{\nu} = \psi^{\dagger}(\vec{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + m, \hat{\mathbf{p}})\psi. \tag{8}$$

+ cantidades conservadas

- Invariancia de rotaciones en un eje $\vec{\theta} = \theta\hat{\theta}$:

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \sim x^\mu - i\theta_k (L_k)^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \delta_{\vec{\theta}} x^\mu, \tag{9}$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \Lambda_\psi \psi(x) \sim \psi - i\theta_k S_k \psi = \psi + \delta_{\vec{\theta}}\psi, \tag{10}$$

donde

$$(L_k)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}(M^{ij})^\mu{}_\nu; \quad S_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij} S^{ij}. \tag{11}$$

- La carga conservada

$$j_k = \psi^\dagger ((\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}})_k + S_k)\psi. \tag{12}$$

- Aparecen las dos partes del momento angular espacial:
  - Orbital: $\vec{L} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}$.
  - Espín: $\vec{S}$.

Solo se conserva la suma $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

- Hay 4 soluciones $\psi_i = u_i(p)e^{-ip\cdot x}$ independientes con valores $E > 0$ (2 soluciones) y $E < 0$ (2 soluciones).

$$u_{1,2}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \right\} . \tag{13}$$

$$u_{3,4}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} . \tag{14}$$

Soluciones de la ecuación de Dirac

Interpretación de las soluciones de $E < 0$

- Una interpretación de las soluciones de energía negativa usando la transformación en la fase de la solución (para la solución en reposo):

$$-iEx^0 \longrightarrow -i\tilde{E}\tilde{x}^0 = -i(-E)(-x^0). \tag{15}$$

Es una solución de energía positiva, pero se invierte la flecha temporal. Entonces: una solución de $E < 0$ viaja hacia el pasado o una solución $E > 0$ viaja hacia el futuro.

- Se cambia el sentido de p en las soluciones y se definen las soluciones v.

$$\psi_i = v_i(p)e^{ip\cdot x}. \tag{16}$$

Interpretación de las soluciones de $E < 0$ (2)

- Las 4 soluciones v también tienen los dos signos de energía, pero podemos armar una base completa con energía positiva escogiendo con astucia 2 soluciones u y 2 soluciones v:

$$v_1(E, \mathbf{p})e^{ip\cdot x} \equiv u_4(-E, -\mathbf{p})e^{-i(-p)\cdot x}, \tag{17}$$

$$v_2(E, \mathbf{p})e^{ip\cdot x} \equiv u_3(-E, -\mathbf{p})e^{-i(-p)\cdot x}. \tag{18}$$

- Las v_i serán las soluciones de antipartícula. Tienen $E > 0$, pero el valor de la parte espacial del momentum tiene un cambio de signo respecto a las soluciones u.

Base de soluciones normalizadas

$$u_{1,2}(p) = \left\{ \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} ; \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \right\} . \tag{19}$$

$$v_{1,2}(p) = \left\{ \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} . \tag{20}$$

- Momento lineal

$$\hat{p}_\mu \psi = v_i(p) i\partial_\mu e^{ip\cdot x} = -p_\mu \psi. \tag{21}$$

El autovalor del operador momento lineal tiene el signo invertido.

- Se define el operador momento lineal sobre las antipartículas

$$\hat{p}_\mu^{(v)} = -\hat{p}_\mu. \tag{22}$$

- El momento angular orbital sufre el mismo síntoma:

$$\hat{\mathbf{L}}^{(v)} = \hat{\mathbf{x}}^{(v)} \times \hat{\mathbf{p}}^{(v)} = -\hat{\mathbf{L}}. \tag{23}$$

El espín debe redefinirse para garantizar que $\hat{\mathbf{J}}^{(v)} = \hat{\mathbf{L}}^{(v)} + \hat{\mathbf{S}}^{(v)}$ se conserve

$$\hat{\mathbf{S}}^{(v)} = -\hat{\mathbf{S}}. \tag{24}$$

Espín de las soluciones

- Operador $\hat{\mathbf{S}}$

$$\hat{S}_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}S^{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\left(\frac{i}{4}\left[\gamma^i,\gamma^j\right]\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}. \tag{25}$$

- Las soluciones en reposo son autofunciones de S_3

$$\hat{S}_3 u_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \pm\frac{1}{2}u_{\left(\frac{1}{2}\right)}, \tag{26}$$

$$\hat{S}_3^{(v)} v_{\left(\frac{1}{2}\right)} = \pm\frac{1}{2}v_{\left(\frac{1}{2}\right)}. \tag{27}$$

Helicidad

- La helicidad $\hat{h} = \frac{1}{|\mathbf{p}|}\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ es una cantidad conservada.

$$\left[\hat{H}, \frac{1}{|\mathbf{p}|}\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{S}}\right] = 0. \tag{28}$$

- Buscamos los autoestados de $\hat{h}$. Se definen
  - $\mathbf{p} = p(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$.
  - $s = \sin\frac{\theta}{2}$, $c = \cos\frac{\theta}{2}$.

Autoestados de helicidad

$$u_{+,-}(p) = \left\{ \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} c \\ se^{i\varphi} \\ \frac{pc}{E+m} \\ \frac{pse^{i\varphi}}{E+m} \end{pmatrix} ; \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\varphi} \\ \frac{ps}{E+m} \\ -\frac{pce^{i\varphi}}{E+m} \end{pmatrix} \right\} . \tag{29}$$

$$v_{+,-}(p) = \left\{ \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{ps}{E+m} \\ -\frac{pce^{i\varphi}}{E+m} \\ -s \\ ce^{i\varphi} \end{pmatrix} ; \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{pc}{E+m} \\ \frac{pse^{i\varphi}}{E+m} \\ c \\ se^{i\varphi} \end{pmatrix} \right\} . \tag{30}$$

En el límite $E + m \longrightarrow E$

$$u_+ \sim v_- \sim \begin{pmatrix} c \\ se^{i\varphi} \\ c \\ se^{i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

$$u_- \sim v_+ \sim \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\varphi} \\ -s \\ ce^{i\varphi} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Transformación de paridad

- Transformación

$$Px = \tilde{x}. \tag{33}$$

$$(\tilde{x}^0, \tilde{\mathbf{x}}) = (x^0, -\mathbf{x}). \tag{34}$$

- Paridad sobre las soluciones

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \hat{P}\psi(P\tilde{x}). \tag{35}$$

$(P = P^{-1})$.

Transformación de paridad sobre la ecuación de Dirac

- Ecuación transformada

$$i\gamma^0\tilde{\partial}_0\tilde{\psi}(\tilde{x}) - i\vec{\gamma}\cdot\tilde{\vec{\nabla}}\tilde{\psi}(\tilde{x}) - m\tilde{\psi}(\tilde{x}) = 0. \tag{36}$$

$$i\gamma^0\tilde{\partial}_0\hat{P}\psi(P\tilde{x}) - i\vec{\gamma}\cdot\tilde{\vec{\nabla}}\hat{P}\psi(P\tilde{x}) - m\hat{P}\psi(P\tilde{x}) = 0. \tag{37}$$

Calculando las derivadas

$$i\gamma^0\partial_0\hat{P}\psi(x) + i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\hat{P}\psi(x) - m\hat{P}\psi(x) = 0. \tag{38}$$

Se multiplica γ^0 por el lado izquierdo y se conmuta con las matrices γ.

$$i\gamma^0\partial_0(\gamma^0\hat{P})\psi(x) - i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}(\gamma^0\hat{P})\psi(x) - m(\gamma^0\hat{P})\psi(x) = 0. \tag{39}$$

Se debe cumplir $\gamma^0\hat{P} = 1$.

Paridad intrínseca

- Se define $\hat{P} = \gamma^0$
- La paridad intrínseca se define para las soluciones en reposo

$$\hat{P} u_i(E, 0) = +u_i(E, 0), \tag{40}$$

$$\hat{P} v_i(E, 0) = -v_i(E, 0). \tag{41}$$

La paridad cambia el sentido de la parte espacial de p, pero no cambia el espín

$$\hat{P} u_i(E, \mathbf{p}) = +u_i(E, -\mathbf{p}), \tag{42}$$

$$\hat{P} v_i(E, \mathbf{p}) = -v_i(E, -\mathbf{p}). \tag{43}$$

Electrodinámica

Ecuaciones de Maxwell dinámicas y conservación de la carga

- Ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho. \tag{44}$$

- Ley de Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{j}. \tag{45}$$

- La derivada temporal de la Ley de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \dot{\rho}. \tag{46}$$

- Se sustituye la derivada del campo eléctrico de la corriente de desplazamiento:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \mathbf{B} - \mathbf{j}) = \dot{\rho}. \tag{47}$$

- Se obtiene

$$-\vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} = \dot{\rho}, \tag{48}$$

$$J^{\mu} \equiv (\rho, j_i), \quad \Rightarrow \quad \partial_{\mu} J^{\mu} = 0. \tag{49}$$

Ecuaciones de Maxwell no-dinámicas y potencial vector

- Ley de Gauss magnética (¡No al monopolo!)

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0. \qquad (50)$$

- Ley de Faraday

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0. \qquad (51)$$

- $\mathbf{B}$ es un rotor de otro campo

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{a}. \qquad (52)$$

- Se sustituye la derivada temporal del campo magnético en la ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\vec{\nabla} \times \dot{\mathbf{a}}. \qquad (53)$$

- Se obtiene

$$\mathbf{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\mathbf{a}}. \qquad (54)$$

Definimos $A_\mu = (A_0, A_i)$

$$(A_0, A_i) \equiv (\phi, -a_i), \quad (A^0, A^i) \equiv (\phi, a_i). \qquad (55)$$

- Definición

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{56}$$

- Las componentes de $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

$$F_{0i} = -F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} B_k \tag{58}$$

Ecuaciones de movimiento covariantes

- Las ecuaciones de movimiento son

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \tag{59}$$

- En función del potencial A

$$\Box A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu A^\mu = J_\nu. \tag{60}$$

- Se derivan de la densidad lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu. \tag{61}$$

- La corriente de carga conservada J^ν no tiene dinámica, pero debe cumplir la ley de conservación o las soluciones no serán consistentes ($\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ por construcción).

Invariancia de calibre

La transformación

$$A_\mu \longrightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi. \tag{62}$$

- No cambia el valor de F por la forma que está definido.
- Deja invariante la acción, gracias a la conservación de J.
- Si se escoge $\Box\chi = \partial^\mu A_\mu$ para una solución A válida (calibre de Lorenz):

$$\partial^\mu \tilde{A}_\mu = 0. \tag{63}$$

- Si esta ecuación se resuelve simultáneamente con la ecuación de movimiento de $\tilde{A}$:

$$\Box \tilde{A}_\nu = J_\nu, \tag{64}$$

se obtiene una solución equivalente del mismo sistema.

Solución en el vacío (calibre de Lorenz)

Las ecuaciones de movimiento en el vacío (calibre de Lorenz)

$$\Box A_\nu = 0, \tag{65}$$

$$\partial^\mu A_\mu = 0. \tag{66}$$

- Tienen soluciones en forma de ondas planas con polarización $\epsilon_\mu(q)$:

$$A_\mu = \epsilon_\mu(q) e^{-iq\cdot x}. \tag{67}$$

- La condición $\Box A_\nu = 0$ implica que q es un vector tipo luz ($q^2 = 0$).
- La condición de calibre impone otra restricción sobre las componentes de q:

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \implies q^\mu \epsilon_\mu(q) = 0. \tag{68}$$

Invariancia de calibre residual y el calibre de Coulomb

Aún es posible hacer transformaciones de calibre siempre que la función escalar cumpla

$$\Box\chi = 0. \tag{69}$$

- Se escoge:

$$\chi = -iae^{-iq\cdot x}. \tag{70}$$

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi = (\epsilon_\mu(q) + aq_\mu)e^{-iq\cdot x}. \tag{71}$$

- Se puede fijar la constante a de forma que $\epsilon_0 = 0$. Estamos en el calibre de Coulomb:

$$\vec{q}\cdot\vec{\epsilon}(q) = 0. \tag{72}$$

Base de polarizaciones

- Solo hay dos vectores de polarización independientes. En el calibre de Coulomb se escoge $\epsilon_0 = 0$ y se seleccionan dos direcciones espaciales perpendiculares al momentum q
- Si $q = (\omega, 0, 0, \omega)$. La base de polarizaciones lineales:

$$\epsilon_\mu^{(1)} = (0, 1, 0, 0), \tag{73}$$

$$\epsilon_\mu^{(2)} = (0, 0, 1, 0). \tag{74}$$

- La base de polarización circular:

$$\epsilon_\mu^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -i, 0), \tag{75}$$

$$\epsilon_\mu^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, i, 0). \tag{76}$$

Acoplamiento minimal y conjugación de carga

Acoplamiento minimal

- ¿Cómo incluir dinámica para la corriente conservada J^μ de la acción de Maxwell?:

$$S = -\int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \right) . \tag{77}$$

- Idea: usar la corriente conservada $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ que encontramos en la ecuación de Dirac.
- Los campos A_μ y ψ se obtienen de un nuevo conjunto de ecuaciones de movimiento.

Acoplamiento minimal

- Problema: El término nuevo de acoplamiento $A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ podría poner en peligro la simetría de calibre.
- $\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$ se cumple sobre las soluciones de la ecuación de Dirac libre.
- La invariancia de calibre es *off shell*. No deben imponerse las ecuaciones de movimiento.

$$\tilde{A}_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = (A_\mu - \partial_\mu\chi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = A_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + \chi\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - \partial_\mu(\chi(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)). \tag{78}$$

Calibrar la invariancia de fase

- Se define la derivada covariante (q es la carga eléctrica fundamental):

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \tag{79}$$

- La nueva densidad lagrangiana

$$S = -\int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \right). \tag{80}$$

- La invariancia de cambios de fase global se mantiene. La carga de Noether se sigue conservando.
- Se introduce un nuevo tipo de transformación de calibre (la invariancia es exacta).

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi. \tag{81}$$

$$\tilde{\psi} = e^{iq\chi}\psi. \tag{82}$$

Ecuación de Dirac y acoplamiento con A

- Podemos desarrollar la ecuación de Dirac con el acoplamiento al campo A_μ

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi = 0. \tag{83}$$

- Multiplicamos por γ^0 para recuperar el Hamiltoniano

$$i\partial_0 \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu + \beta m)\psi \tag{84}$$

- $H_I = q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu$ mide la interacción del campo electromagnético con el campo de Dirac.
- Notar que uno de los términos en H_I es $qA_0 = q\phi$ ☺

Ecuación de Dirac y conjugación de carga

- Tomemos la conjugada compleja de la Ecuación de Dirac

$$(-i(\gamma^\mu)^*\partial_\mu - q(\gamma^\mu)^*A_\mu - m)\psi^* = 0. \tag{85}$$

- Multiplicamos por $i\gamma^2$

$$(-i(i\gamma^2)(\gamma^\mu)^*\partial_\mu - q(i\gamma^2)(\gamma^\mu)^*A_\mu - m(i\gamma^2))\psi^* = 0. \tag{86}$$

$$(-i(i)((\gamma^2)^*\gamma^\mu)^*\partial_\mu - q(i)((\gamma^2)^*\gamma^\mu)^*A_\mu - m(i\gamma^2))\psi^* = 0. \tag{87}$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu - m)(i\gamma^2)\psi^* = 0. \tag{88}$$

- La función $(i\gamma^2)\psi^*$ cumple la ecuación con $q \longrightarrow -q$.

- Se define la matriz de conjugación de carga.

$$\hat{C} \equiv i\gamma^2. \tag{89}$$

- La transformación es

$$\psi' = \hat{C}\psi^*. \tag{90}$$

- Se cumple

$$\psi = \hat{C}(\hat{C}\psi^*)^*. \tag{91}$$

$$\psi_i = u_i e^{-ipx} \xrightarrow{\hat{C}} \psi_i' = v_i e^{ipx}. \tag{92}$$

Bibliografía

Mark Thomson (2013)
Modern particle physics
Cambridge University Press.

Michael Peskin (2018)
An introduction to quantum field theory
CRC press.

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA **physics**

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.