LA-CoNGA physics

Teoría: Altas Energías

Clase 05/21

Reglas de Feynman

Prof. José Antonio López Rodríguez

05 de abril de 2022

Electrodinámica Cuántica

José Antonio López Rodríguez

Universidad Central de Venezuela

5 de abril de 2022

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Contenido

Recuento

De la clase anterior ...

- Recodemos: soluciones de partícula y antipartícula

$$u_{1,2}(p) = \left\{ \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} ; \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \right\} . \tag{1}$$

$$v_{1,2}(p) = \left\{ \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} . \tag{2}$$

- Definición

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3}$$

- Las componentes de $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

$$F_{0i} = -F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} B_k \tag{5}$$

Calibrar la invariancia de fase

- Se define la derivada covariante (q es la carga eléctrica fundamental):

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \tag{6}$$

- La nueva densidad lagrangiana

$$S = -\int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \right). \tag{7}$$

- La invariancia de cambios de fase global se mantiene. La carga de Noether se sigue conservando.
- Se introduce un nuevo tipo de transformación de calibre (la invariancia es exacta).

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi. \tag{8}$$

$$\tilde{\psi} = e^{iq\chi}\psi. \tag{9}$$

- Se define la matriz de conjugación de carga.

$$\hat{C} \equiv i\gamma^2. \tag{10}$$

- La transformación es

$$\psi' = \hat{C}\psi^*. \tag{11}$$

- Se cumple

$$\psi = \hat{C}(\hat{C}\psi^*)^*. \tag{12}$$

$$\psi_i = u_i e^{-ipx} \xrightarrow{\hat{C}} \psi_i' = v_i e^{ipx}. \tag{13}$$

El campo de Proca

- Consideramos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \tag{14}$$

- La dinámica está dada por la acción:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 B_\mu B^\mu \right). \tag{15}$$

- B_μ describe una teoría vectorial con masa.
- ¡No hay invariancia de calibre!

Ecuación de movimiento

- Aplicando el principio de mínima acción:

$$\partial_\nu F^{\nu\alpha} + m^2 B^\alpha = 0, \tag{16}$$

$$\Box B^\alpha - \partial_\nu \partial^\alpha B^\nu + m^2 B^\alpha = 0. \tag{17}$$

- Al calcular la divergencia a las ecuaciones de movimiento, encontramos que la condición

$$\partial_\nu B^\nu = 0 \tag{18}$$

es automática.

- Debe haber algún parecido entre las soluciones de B_μ y las soluciones de un A_μ de masa nula en el calibre de Lorenz.

Ecuaciones desacopladas y soluciones

- El sistema que se debe resolver. Cuatro ecuaciones de Klein-Gordon masivas y la condición de divergencia nula:

$$(\Box + m^2)B_\mu = 0, \tag{19}$$

$$\partial_\nu B^\nu = 0. \tag{20}$$

- Solución propuesta:

$$B_\mu = \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)e^{-iq\cdot x}. \tag{21}$$

- $\lambda = 0 \ldots 3$ son las cuatro polarizaciones independientes.
- La ecuación de movimiento impone la condición:

$$q^2 = m^2. \tag{22}$$

- La condición de divergencia nula:

$$q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) = 0. \tag{23}$$

Proyeccion sobre estados de polarización

Completitud en soluciones con masa (B_μ)

- Nos interesa obtener una expresión covariante del operador de proyección sobre los estados $q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) = 0$:

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}). \tag{24}$$

Cumple con las propiedades deseadas.

- Se puede, por ejemplo, partir de una forma explícita de los vectores de polarización,

$$\epsilon_\mu^{(0)} = \frac{q_\mu}{m}, \quad \epsilon_\mu^{(1)} = (0, \hat{\epsilon}_1), \quad \epsilon_\mu^{(2)} = (0, \hat{\epsilon}_2), \quad \epsilon_\mu^{(3)} = \frac{1}{m}(|\vec{q}|, q_0 \hat{q}). \tag{25}$$

Donde $(i, j = 1, 2)$

$$\hat{q} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}, \quad \vec{q} \cdot (\hat{\epsilon}_i)^*, \quad \hat{\epsilon}_i \cdot (\hat{\epsilon}_j)^* = \delta_{ij}. \tag{26}$$

- Se puede verificar

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{3} (\epsilon_\mu^{(i)})^* \epsilon_\nu^{(i)} = -(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}). \tag{27}$$

- Recordemos que solo hay dos polarizaciones independientes
- Proponemos una base para las 4 polarizaciones no restringidas:

$$\epsilon_\mu^{(0)} = n_\mu = (1,0,0,0), \tag{28}$$

es un vector (obviamente) tipo tiempo.

$$\epsilon_\mu^{(1)} = (0,\hat{\epsilon}_1), \quad \epsilon_\mu^{(2)} = (0,\hat{\epsilon}_2), \quad \epsilon_\mu^{(3)} = (0,\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}) = \frac{q_\mu - (n\cdot q)n_\mu}{\sqrt{(n\cdot q)^2 - q^2}}, \tag{29}$$

son tres vectores (obviamente) tipo espacio.

- Se cumple $(i,j = 1,2,3)$

$$\vec{\epsilon}^{\,(i)} \cdot (\vec{\epsilon}^{\,(j)})^* = \delta^{ij}. \tag{30}$$

Proyector sobre soluciones del campo de Maxwell

- Se definen 4 constantes ζ^λ:

$$\zeta^\lambda \equiv -\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\epsilon^{\mu(\lambda)})^*, \tag{31}$$

$$\zeta^0 = -1; \quad \zeta^{i=1,2,3} = 1. \tag{32}$$

- Se cumplen:

$$\delta^{\lambda\lambda'} = -\zeta^\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\epsilon^{\mu(\lambda')})^*, \tag{33}$$

$$\sum_\lambda \zeta^\lambda (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu}. \tag{34}$$

- La proyección sobre las polarizaciones físicas ($\epsilon^{(i=1,2)}$):

$$\sum_{i=1,2}(\epsilon_\mu^{(i)})^*\epsilon_\nu^{(i)} = \sum_\lambda \zeta^\lambda(\epsilon_\mu^{(\lambda)})^*\epsilon_\nu^{(\lambda)} - (\zeta^0(\epsilon_\mu^{(0)})^*\epsilon_\nu^{(0)} + \zeta^3(\epsilon_\mu^{(3)})^*\epsilon_\nu^{(3)}). \tag{35}$$

$$\sum_{i=1,2}(\epsilon_\mu^{(i)})^*\epsilon_\nu^{(i)} = -g_{\mu\nu} + ((\epsilon_\mu^{(0)})^*\epsilon_\nu^{(0)} - (\epsilon_\mu^{(3)})^*\epsilon_\nu^{(3)}) = -g_{\mu\nu} + (P_q)_{\mu\nu}, \tag{36}$$

donde $(P_q)_{\mu\nu}$ es el operador de proyección sobre la dirección de q_μ.

Proyector sobre soluciones del campo de Maxwell: solución $q^2 \neq 0$

- En el cálculo de perturbaciones necesitaremos considerar polarizaciones de fotones que no cumplen la condición *on shell* ($q^2 \neq 0$).
- En ese caso se puede tomar prestado el resultado del Campo de Proca:

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{3} (\epsilon_\mu^{(i)})^* \epsilon_\nu^{(i)} = -(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}). \tag{37}$$

- Sabemos

$$\sum_{s=1,2} u_s(p)\bar{u}_s(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m). \tag{38}$$

$$\sum_{s=1,2} v_s(p)\bar{v}_s(p) = (\gamma^\mu p_\mu - m). \tag{39}$$

Propiedades de las trazas de matrices γ

Fórmulas de trazas de matrices γ

- Definimos la matriz γ^5

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{40}$$

- Se cumple:

$$(\gamma^5)^2 = I, \tag{41}$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \tag{42}$$

$$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5. \tag{43}$$

Fórmulas de trazas de matrices γ

- $$\mathrm{Tr}(I) = 4 \tag{44}$$
- La traza de un número impar de matrices es cero.
- $$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \tag{45}$$
- $$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}. \tag{46}$$
- La traza de un número impar de matrices $\times\gamma^5$ es cero.

Interpretación diagramática

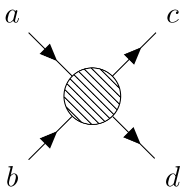
Interacción

- La tasa de transición entre estados inicial y final está codificada en la cantidad Γ_{fi}.
- Regla de oro de Fermi
$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_f) \tag{47}$$
- La matriz de transición T_{fi} es un objeto teoría dependiente. Cuando es posible usar teoría de perturbaciones:
$$T_{fi} = \langle f| V |i\rangle + \sum_{i \neq j} \frac{\langle f| V |j\rangle \langle j| V |i\rangle}{E_i - E_j} + \ldots . \tag{48}$$
- Primer término: interacción con un potencial.
- Segundo término: dispersión en un estado intermedio.
- ...

Interacción

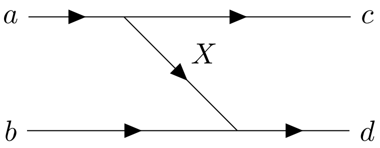
- En QFT la interacción sucede a través del intercambio de partículas.
- No hay potenciales extendidos en el espacio.
- Fuerza $\Longleftrightarrow$ transferencia de momentum a partículas de intercambio.

Modelo de intercambio $a + b \longrightarrow c + d$



- Partícula a se transforma en $X + c$.
  $a + b \longrightarrow c + X + b \longrightarrow c + d$.
- Partícula b se transforma en $\tilde{X} + d$.
  $a + b \longrightarrow a + \tilde{X} + d \longrightarrow c + d$

- a se transforma en $X + c$.



- $q_X = p_c - p_a$
- $Q_X = Q_c - Q_a$
- La matriz de transición:

$$T_{fi}^{a\to X} = \frac{\langle f|\, V\, |j\rangle\ \langle j|\, V\, |i\rangle}{E_i - E_j} = \frac{\langle d|\, V\, |X + b\rangle\ \langle c + X|\, V\, |a\rangle}{(E_a + E_b) - (E_c + E_b + E_X)}. \qquad (49)$$

- Usamos la definición $V_{ji} = \langle j | V | i \rangle$.

$$V_{ji} = \langle c + X | V | a \rangle = \mathcal{M}_{a \to c+X} (2E_a 2E_c 2E_X)^{-\frac{1}{2}}. \tag{50}$$

- $\mathcal{M}_{a \to c+X}$ es el elemento de matriz invariante Lorentz en la transición $a \to c + X$. El caso más sencillo es el de un acoplamiento escalar

$$\mathcal{M}_{a \to c+X} = g_a. \tag{51}$$

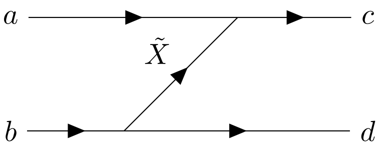
$$T_{fi}^{a \to X} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c - E_X)} (2E_a 2E_c 2E_X)^{-\frac{1}{2}} (2E_b 2E_d 2E_X)^{-\frac{1}{2}}. \tag{52}$$

- Definimos la matriz de transición invariante para $T_{fi}^{a\to X}$.

$$T_{fi}^{a\to X} = \frac{g_a g_b (2E_a 2E_c 2E_b 2E_d)^{-\frac{1}{2}}}{2E_X(E_a - E_c - E_X)} = \mathcal{M}_{fi}^{a\to c+X}(2E_a 2E_c 2E_b 2E_d)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (53)$$

$$\mathcal{M}_{fi}^{a\to c+X} = \frac{g_a g_b}{2E_X(E_a - E_c - E_X)}. \qquad (54)$$

- Partícula b emite una $\tilde{X}$.



- La matriz de transición LI tiene la misma forma que en el caso anterior

$$\mathcal{M}_{fi}^{b\rightarrow\tilde{X}+d} = \frac{g_b g_a}{2E_{\tilde{X}}(E_b - E_d - E_{\tilde{X}})}. \tag{55}$$

Matriz de transición LI total

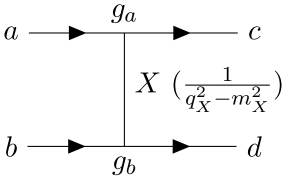
- La matriz LI de todo el proceso es la suma. Suponemos que $X = \tilde{X}$,

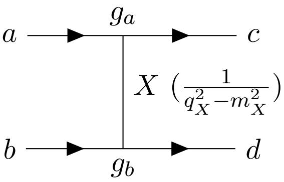
$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{a \to X + c} + \mathcal{M}_{fi}^{b \to \tilde{X} + d}. \tag{56}$$

- Se obtiene

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_b g_a}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2} = \frac{g_b g_a}{(p_a - p_c)^2 - m_X^2}. \tag{57}$$

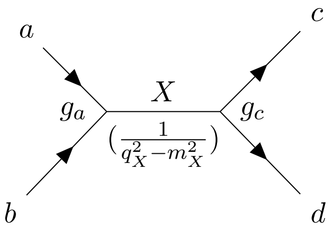
- La representación en diagrama de $\mathcal{M}_{fi}$ es más simple





- La partícula X es virtual, no detectable. No es una partícula física.
- En general
$$q_X^2 - m_X^2 \neq 0. \tag{58}$$
- En este tipo de diagrama
$$q_X^2 = (p_a - p_c)^2 = (p_d - p_b)^2 = t. \tag{59}$$

Estructura general de un diagrama de Feynman



- En este tipo de diagrama

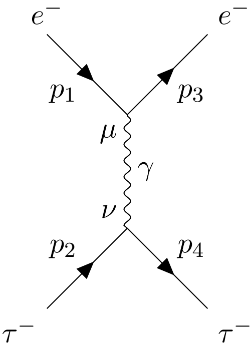
$$q_X^2 = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 = s. \tag{60}$$

Componentes de $\mathcal{M}$

- Se estudiarán algunos procesos sencillos: no partículas idénticas en el mismo estado (inicial o final)
- Nivel árbol.
- Intensidad de la interacción en cada vértice + el propagador de las lineas internas o partículas virtuales.
- Ejemplo

$$\mathcal{M}_{(3,4)(1,2)} \sim \langle\psi_3|\, V\, |\psi_1\rangle \left(\frac{1}{q_\gamma^2 - m_\gamma^2}\right) \langle\psi_4|\, V\, |\psi_2\rangle \,. \tag{61}$$

- Diagrama



- Los grados de libertad de espín y la polarización implican que el vértice y el propagador tienen "más" estructura que antes en el caso escalar.
- Estudiamos el detalle de la matriz de transición usando el termino de interacción del campo A_μ y los espinores u_s y v_s.

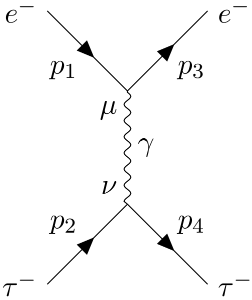
$$\langle\psi_3|\, V\, |\psi_1\rangle \to \left(\begin{array}{c} u(p_3)^\dagger \\ v(p_3)^\dagger \end{array}\right) q\gamma^0\gamma^\mu\epsilon_\mu^{(\lambda)} \left(\begin{array}{c} u(p_1) \\ v(p_1) \end{array}\right). \tag{62}$$

- En principio hay 4 combinaciones de estados (u y v) inciales y finales. Dependerán del proceso a describir: estados *in* $\to$ estados *out*.
- Hay polarizaciones λ. ¿Cuántas? Recordar que $q_X^2 - m_X^2 \neq 0$.

Otra vez: $e^- + \tau^- \to e^- + \tau^-$

- Todos los estados son partícula $(u + u \to u + u)$.
- Se suman tres polarizaciones independientes. Es equivalente a un campo B_μ $(m \neq 0)$.

$$\mathcal{M}_{(3,4)(1,2)} \sim \langle\psi_3| V |\psi_1\rangle \left(\frac{1}{q_\gamma^2 - m_\gamma^2}\right) \langle\psi_4| V |\psi_2\rangle \,. \tag{63}$$



$$\mathcal{M}_{(3,4)(1,2)} = \sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} u_e^\dagger(p_3)\,(q_e \gamma^0 \gamma^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)})\, u_e(p_1)\,\left(\frac{1}{q_\gamma^2}\right) u_\tau^\dagger(p_4)\,(q_\tau \gamma^0 \gamma^\nu (\epsilon_\nu^{(\lambda)})^*)\, u_\tau(p_2). \tag{64}$$

$$\mathcal{M}_{(3,4)(1,2)} = (q_e q_\tau)\; \bar{u}_e(p_3)\; (\gamma^\mu)\; u_e(p_1)\; \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{q_\gamma^2}\right) \bar{u}_\tau(p_4)\; (\gamma^\nu)\; u_\tau(p_2). \tag{65}$$

Reglas de Feynman

Reglas de Feynman: fermiones externos

- Partícula in

$u(p)$ $\qquad$ $e^- \to \bullet$

- Partícula out

$\bar{u}(p)$ $\qquad$ $\bullet \to e^-$

- Antipartícula in

$\bar{v}(p)$ $\qquad$ $e^+ \to \bullet$

- Antipartícula out

$v(p)$ $\qquad$ $\bullet \to e^+$

Reglas de Feynman: fotones externos

- Fotón in

$\epsilon_\mu(q)$ $\qquad$ $\gamma \to \bullet$

- Fotón out

$\epsilon^*_\mu(q)$ $\qquad$ $\bullet \to \gamma$

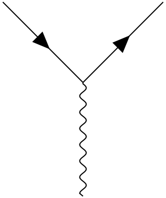
- Intercambio de fotón

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \qquad \bullet \longleftrightarrow \bullet$$

- Intercambio de fermión

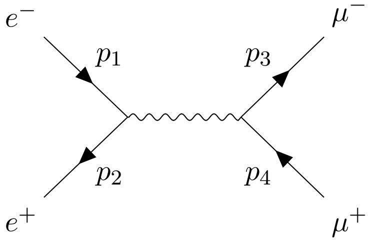
$$-\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2} \qquad \bullet \longleftrightarrow \bullet$$

- Vértice



$$-iq\gamma^\mu$$

- Ejemplo: $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$



- La amplitud

$$\bar{v}(p_2)\ (iq_e\gamma^\mu)\ u(p_1)\ (\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2})\ \bar{u}(p_3)\ (iq_\mu\gamma^\nu)\ v(p_4). \tag{66}$$

Bibliografía

Mark Thomson (2013)
Modern particle physics
Cambridge University Press.

Michael Peskin (2018)
An introduction to quantum field theory
CRC press.

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea