LA-CoNGA physics

Teoría: Altas Energías Clase 06/22

Cálculos en QED Prof. José Antonio López Rodríguez

7 de abril de 2022

Electrodinámica Cuántica

José Antonio López Rodríguez

Universidad Central de Venezuela

7 de abril de 2022

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Contenido

Recuento

- El sistema que se debe resolver. Cuatro ecuaciones de Klein-Gordon masivas y la condición de divergencia nula:

$$(\Box + m^2)B_\mu = 0, \tag{1}$$

$$\partial_\nu B^\nu = 0. \tag{2}$$

- Solución propuesta:

$$B_\mu = \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)e^{-iq\cdot x}. \tag{3}$$

- $\lambda = 0 \ldots 3$ son las cuatro polarizaciones independientes.
- La ecuación de movimiento impone la condición:

$$q^2 = m^2. \tag{4}$$

- La condición de divergencia nula:

$$q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) = 0. \tag{5}$$

- Nos interesa obtener una expresión covariante del operador de proyección sobre los estados $q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) = 0$:

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}). \tag{6}$$

Cumple con las propiedades deseadas.

Proyector sobre soluciones del campo de Maxwell

- La proyección sobre las polarizaciones físicas ($\epsilon^{(i=1,2)}$):

$$\sum_{i=1,2} (\epsilon_\mu^{(i)})^* \epsilon_\nu^{(i)} = \sum_\lambda \zeta^\lambda (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} - (\zeta^0 (\epsilon_\mu^{(0)})^* \epsilon_\nu^{(0)} + \zeta^3 (\epsilon_\mu^{(3)})^* \epsilon_\nu^{(3)}). \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1,2} (\epsilon_\mu^{(i)})^* \epsilon_\nu^{(i)} = -g_{\mu\nu} + ((\epsilon_\mu^{(0)})^* \epsilon_\nu^{(0)} - (\epsilon_\mu^{(3)})^* \epsilon_\nu^{(3)}) = -g_{\mu\nu} + (P_q)_{\mu\nu}, \qquad (8)$$

donde $(P_q)_{\mu\nu}$ es el operador de proyección sobre la dirección de q_μ.

Proyector sobre soluciones del campo de Maxwell: solución $q^2 \neq 0$

- En el cálculo de perturbaciones necesitaremos considerar polarizaciones de fotones que no cumplen la condición *on shell* ($q^2 \neq 0$).
- En ese caso se puede tomar prestado el resultado del Campo de Proca:

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{3} (\epsilon_\mu^{(i)})^* \epsilon_\nu^{(i)} = -(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}). \tag{9}$$

Completitud soluciones de Dirac

- Sabemos

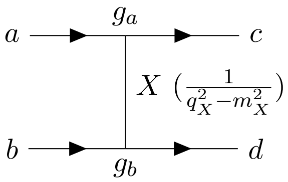
$$\sum_{s=1,2} u_s(p)\bar{u}_s(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m). \tag{10}$$

$$\sum_{s=1,2} v_s(p)\bar{v}_s(p) = (\gamma^\mu p_\mu - m). \tag{11}$$

Fórmulas de trazas de matrices γ

- $$\mathrm{Tr}(I) = 4 \tag{12}$$
- La traza de un número impar de matrices es cero.
- $$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \tag{13}$$
- $$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}. \tag{14}$$
- La traza de un número impar de matrices $\times \gamma^5$ es cero.

Estructura general de un diagrama de Feynman



- La partícula X es virtual, no detectable. No es una partícula física.
- En general
$$q_X^2 - m_X^2 \neq 0. \tag{15}$$
- En este tipo de diagrama
$$q_X^2 = (p_a - p_c)^2 = (p_d - p_b)^2 = t. \tag{16}$$

Reglas de Feynman: fermiones externos

- Partícula in

$u(p)$ $\qquad$ $e^- \to \bullet$

- Partícula out

$\bar{u}(p)$ $\qquad$ $\bullet \to e^-$

- Antipartícula in

$\bar{v}(p)$ $\qquad$ $e^+ \to \bullet$

- Antipartícula out

$v(p)$ $\qquad$ $\bullet \to e^+$

Reglas de Feynman: fotones externos

- Fotón in

 $\epsilon_\mu(q)$ $\gamma \to \bullet$

- Fotón out

 $\epsilon^*_\mu(q)$ $\bullet \to \gamma$

Reglas de Feynman: lineas internas y vértice

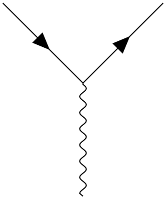
- Intercambio de fotón

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \qquad \bullet \longleftrightarrow \bullet$$

- Intercambio de fermión

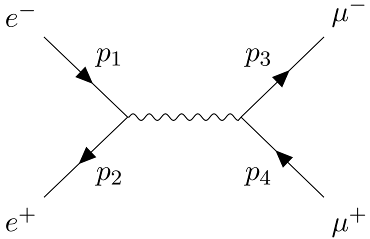
$$-\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2} \qquad \bullet \longleftrightarrow \bullet$$

- Vértice



$$-iq\gamma^\mu$$

- Ejemplo: $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$



- La amplitud

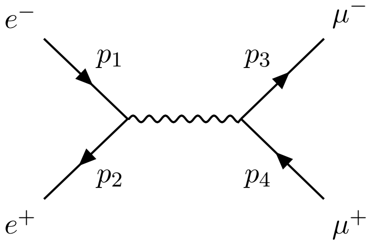
$$\bar{v}(p_2)\ (iq_e\gamma^\mu)\ u(p_1)\ (\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2})\ \bar{u}(p_3)\ (iq_\mu\gamma^\nu)\ v(p_4). \tag{17}$$

Cálculos en teoría de perturbaciones

- Consideramos sistemas con estados inicial y final libres
- El efecto de la interacción ($\mathcal{M}_{fi}$) viene descrita por una serie

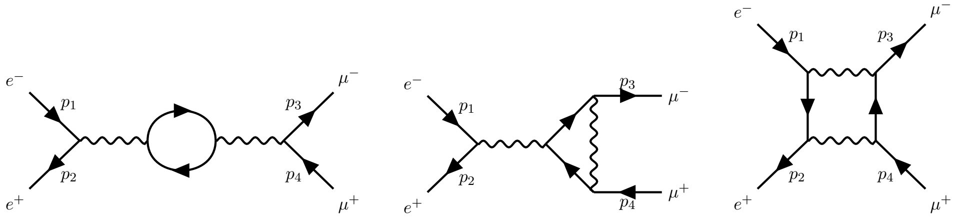
$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{LO} + \sum_j \mathcal{M}_{1,j} \ldots \tag{18}$$

- Ejemplo: en $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ el orden más bajo posible es:



Next-to-Leading-Order

- Los términos siguientes tienen dos vértices más. Una muestra representativa:



- Cada nueva linea interna genera lazos aporta dos vértices nuevos.

- Los diagramas siempre tienen un número par de vértices.
- Cada par de vértices aportan un factor de $\alpha = \frac{q^2}{4\pi}$.
- Definimos $\mathcal{M}_{k,i} = \alpha^{k+1} M_{k,i}$

$$\mathcal{M}_{fi} = \alpha M_{LO} + \alpha^2 \sum_j M_{1,j} \ldots \tag{19}$$

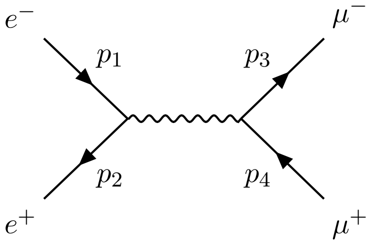
- El módulo cuadrado del elemento de matriz:

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = \alpha^2 |M_{LO}|^2 + \alpha^3 \sum_j (M_{LO}^* M_{1,j} + M_{LO} M_{1,j}^*) + \ldots \tag{20}$$

- Puesto que $\alpha \sim \frac{1}{137}$, la contribución más importante viene del término de orden más bajo.

Aniquilación $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$: estructura

- El diagrama a orden más bajo:
- Ejemplo: en $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ el orden más bajo posible es:



- La amplitud

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{q^2}\left(\bar{v}(p_2)\gamma^\rho u(p_1)\right) g_{\rho\sigma} \left(\bar{u}(p_3)\gamma^\sigma v(p_4)\right) . \tag{21}$$

Clasificación en estados de Helicidad

- Hay 4 combinaciones de helicidad (R y L) independientes en cada estado (inicial y final)

$$(R, R); \quad (L, R); \quad (R, L); \quad (L, L). \tag{22}$$

- Para una combinación cualquiera en el estado inicial, hay 4 contribuciones en el estado final. Por ejemplo, para un estado inicial (R, R)

$$|\mathcal{M}_{RR}|^2 = |\mathcal{M}_{RR\to RR}|^2 + |\mathcal{M}_{RR\to LR}|^2 + |\mathcal{M}_{RR\to RL}|^2 + |\mathcal{M}_{RR\to LL}|^2. \tag{23}$$

- En el caso, muy común, que el estado inicial no esté polarizado, se debe promediar sobre las 4 igualmente probables configuraciones iniciales posibles.

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{espines} |\mathcal{M}|^2. \tag{24}$$

Aniquilación $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$: cálculo de la amplitud

- Desarrollamos la expresión

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{espines} |\mathcal{M}|^2. \tag{25}$$

- Escribimos la suma sobre todos los espines:

$$\begin{aligned} \left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle &= \frac{1}{4} \sum_{r,s,r',s'} \frac{e^2}{q^2} \left(\bar{v}^r(p_2)\gamma^\rho u^s(p_1)\right) g_{\rho\sigma} \left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma^\sigma v^{r'}(p_4)\right) \\ &\times \left[\frac{e^2}{q^2} \left(\bar{v}^r(p_2)\gamma^\alpha u^s(p_1)\right) g_{\alpha\beta} \left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma^\beta v^{r'}(p_4)\right)\right]^\dagger . \end{aligned} \tag{26}$$

- Reorganizando

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{e^4}{4q^4} \sum_{r,s,r',s'} \left(\bar{v}^r(p_2)\gamma^\sigma u^s(p_1)\right) \left[\left(\bar{v}^r(p_2)\gamma^\beta u^s(p_1)\right)\right]^\dagger \times \left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\sigma v^{r'}(p_4)\right) \left[\left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\beta v^{r'}(p_4)\right)\right]^\dagger . \quad (27)$$

- Usamos la identidad

$$\left[\bar{\phi}\gamma^\mu\psi\right]^\dagger = \bar{\psi}\gamma^\mu\phi. \quad (28)$$

- Queda

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{e^4}{4q^4} \sum_{r,s,r',s'} \left(\bar{v}^r(p_2)\gamma^\sigma u^s(p_1)\right)\left(\bar{u}^s(p_1)\gamma^\beta v^r(p_2)\right) \times \left(\bar{u}^{s'}(p_3)\gamma_\sigma v^{r'}(p_4)\right)\left(\bar{v}^{r'}(p_4)\gamma_\beta u^{s'}(p_3)\right), \quad (29)$$

- que puede reescribirse en forma de trazas

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{e^4}{4q^4} \sum_{r,s,r',s'} \mathrm{Tr}\left[\left(v^r(p_2)\bar{v}^r(p_2)\right)\gamma^\sigma \left(u^s(p_1)\bar{u}^s(p_1)\right)\gamma^\beta\right] \times \mathrm{Tr}\left[\left(u^{s'}(p_3)\bar{u}^{s'}(p_3)\right)\gamma_\sigma \left(v^{r'}(p_4)\bar{v}^{r'}(p_4)\right)\gamma_\beta\right]. \quad (30)$$

- Usando las relaciones de completitud de las soluciones de Dirac

$$
\begin{aligned}
\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle &= \frac{e^4}{4q^4}\mathrm{Tr}\left[(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\sigma(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\beta\right] \\
&\times \mathrm{Tr}\left[(\not{p}_3 + m_\mu)\gamma_\sigma(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma_\beta\right] \qquad (31) \\
&= \frac{e^4}{4q^4}\left[\mathrm{Tr}\left(\gamma^\alpha\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\beta\right) p_{2\alpha} p_{1\rho} - m_e^2 \mathrm{Tr}\left(\gamma^\sigma\gamma^\beta\right)\right] \\
&\times \left[\mathrm{Tr}\left(\gamma^\alpha\gamma_\sigma\gamma^\rho\gamma_\beta\right) p_{3\alpha} p_{4\rho} - m_\mu^2 \mathrm{Tr}\left(\gamma_\sigma\gamma_\beta\right)\right]. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

Amplitud invariante

- Usamos las fórmulas de las trazas
  - $$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \tag{33}$$
  - $$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} . \tag{34}$$
- Se obtiene la siguiente expresión invariante:

$$\begin{aligned} \left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle &= \frac{4e^4}{q^4} \left[2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) \right. \\ &+ \left. 2m_\mu^2 (p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2 (p_3 \cdot p_4) + 4m_e^2 m_\mu^2 \right] . \end{aligned} \tag{35}$$

- En el límite ultra relativista podemos despreciar la contribución de las masas. Además:

$$q^2 = s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 \cdot p_2) \sim 2(p_1 \cdot p_2). \tag{36}$$

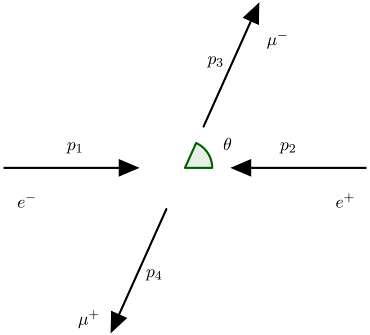
$$t = (p_3 - p_1)^2 = p_3^2 + p_1^2 - 2(p_1 \cdot p_3) \sim -2(p_1 \cdot p_3). \tag{37}$$

$$u = (p_4 - p_1)^2 = p_4^2 + p_1^2 - 2(p_1 \cdot p_4) \sim -2(p_1 \cdot p_4). \tag{38}$$

- Se simplifica

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = 2e^4 \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right). \tag{39}$$

- La amplitud $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ depende del ángulo de dispersión.



$$\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle = e^4\left(1+\cos^2\theta\right). \tag{40}$$

Sobre Helicidad y Quiralidad

Contribuciones no nulas a la amplitud promedio

- No todas las combinaciones de polarización de estados iniciales y finales contribuyen a la amplitud.
- Algunas combinaciones son nulas.
- En el caso $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, en el límite $m \rightarrow 0$ únicamente sobreviven las combinaciones con espín alineado en los estados inicial y final.

$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{1}{4}\left(|\mathcal{M}_{LR\rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{RL\rightarrow RL}|^2 + |\mathcal{M}_{RL\rightarrow LR}|^2 + |\mathcal{M}_{LR\rightarrow RL}|^2 \right) \quad (41)$$

- Las combinaciones de espín permitidas tienen estados iniciales y finales de momento angular total 1.
- Es un reflejo de la estructura de espín del campo electromagnético.

Relación con quiralidad

- Ya hemos definido la matriz γ^5.

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{42}$$

- Se cumple:

$$(\gamma^5)^2 = I, \tag{43}$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \tag{44}$$

$$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5. \tag{45}$$

- En el límite $m \to 0$, γ^5 conmuta con el Hamiltoniano de Dirac.
- En ese caso los autoestados de γ^5 también son autoestados de helicidad.

$$\gamma^5 u_\uparrow = +u_\uparrow, \quad \gamma^5 u_\downarrow = -u_\downarrow, \quad \gamma^5 v_\uparrow = -v_\uparrow, \quad \gamma^5 v_\downarrow = +v_\downarrow. \tag{46}$$

Proyector de Quiralidad

- Se definen los proyectores quirales:

$$P_R = \frac{1}{2}(I + \gamma^5), \tag{47}$$

$$P_L = \frac{1}{2}(I - \gamma^5), \tag{48}$$

- Los proyectores cumplen

$$P_R u_R = u_R, \tag{49}$$

$$P_L u_L = u_L, \tag{50}$$

$$P_R u_L = P_L u_R = 0, \tag{51}$$

$$P_R v_L = v_L, \tag{52}$$

$$P_L v_R = v_R, \tag{53}$$

$$P_R v_R = P_L v_L = 0, \tag{54}$$

- Las propiedades de los proyectores explican la cancelación de algunos términos en la amplitud

$$P_{(R,L)}\gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} P_{(L,R)}, \tag{55}$$

$$\left[P_{(R,L)}, \gamma^{0}\gamma^{\mu}\right] = 0. \tag{56}$$

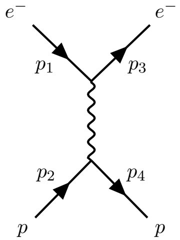
- Tenemos, por ejemplo:

$$\bar{u}_R \gamma^{\mu} u_L = \overline{P_R u_R} \gamma^{\mu} P_L u_L = \bar{u}_R \gamma^{\mu} P_R P_L u_L = 0. \tag{57}$$

$$\bar{u}_R \gamma^{\mu} v_L = \overline{P_R u_R} \gamma^{\mu} P_R v_L = \bar{u}_R \gamma^{\mu} P_R P_R v_L = \bar{u}_R \gamma^{\mu} v_L. \tag{58}$$

Otros casos y correcciones

- Es el caso de una partícula dispersada en el potencial de otra:

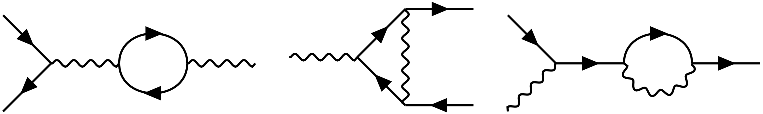


- La amplitud queda:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{Qe^2}{q^2}\left[\bar{u}(p_3)\gamma^{\mu}u(p_1)\right] g_{\mu\nu}\left[\bar{u}(p_4)\gamma^{\nu}u(p_2)\right]. \tag{59}$$

- Todas son partículas.

- La magnitud de la carga recibe correcciones radiativas. Algunos contribuyentes:



- Las contribuciones efectivas provienen del primer diagrama.
- Contribuciones con lineas internas de fermiones se cancelan.
- La intensidad de la interacción se hace más fuerte al aumentar la escala de la energía.

$$\alpha(q^2) = \frac{\alpha(q_0^2)}{1 - \alpha(q_0^2)\frac{1}{3\pi}\ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}. \tag{60}$$

Bibliografía

Mark Thomson (2013)
Modern particle physics
Cambridge University Press.

Michael Peskin (2018)
An introduction to quantum field theory
CRC press.

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.