Buenas tardes!

Curso: Mecánica Estadística Avanzada (Dinámica)

La CONGA

Ernesto Medina

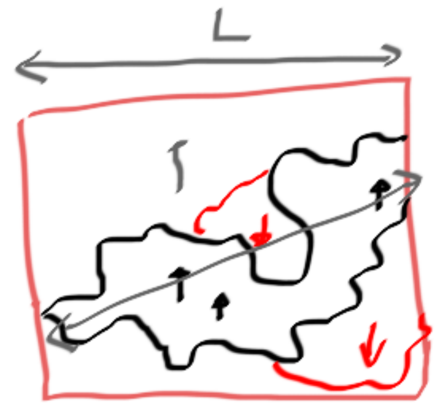
Alentamiento crítico (Critical slowing down)

$\tau \to \infty$ $\qquad$ $\tau \propto \xi^{z}$ ↘ exponente dinámico

Fenómenos críticos estáticos son posibles

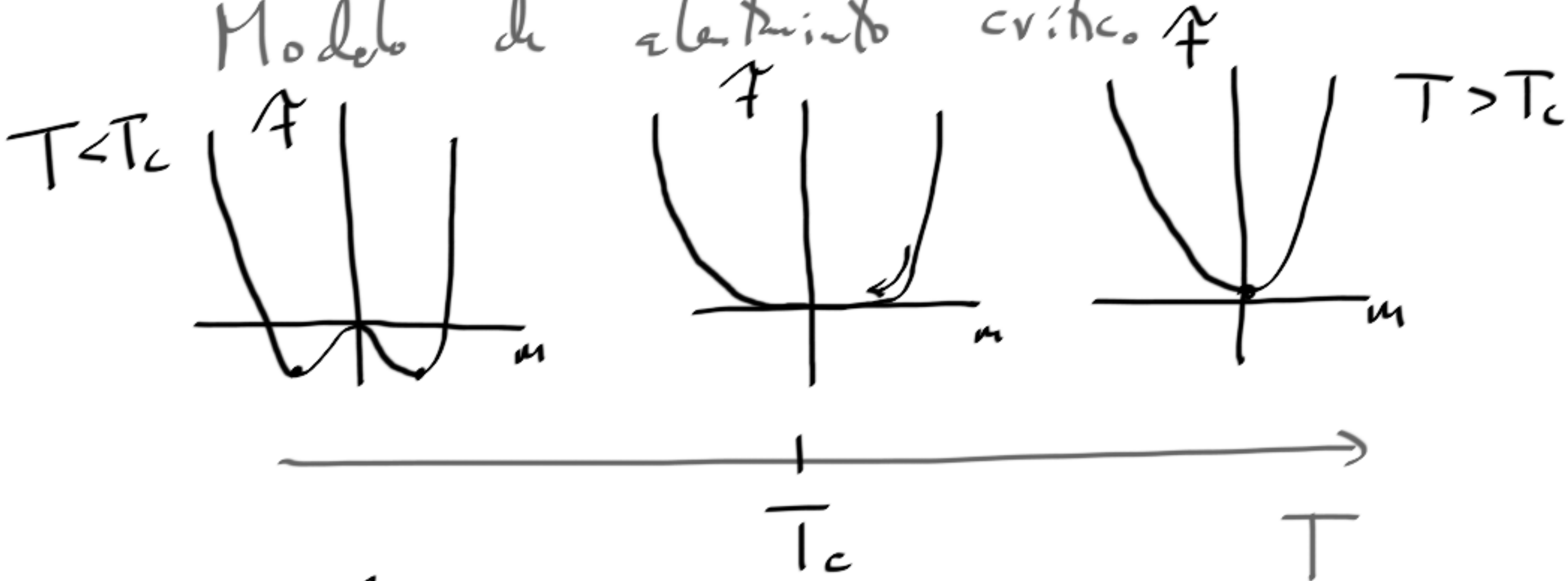
$\underline{\underline{\tau \ll t_{exp.}}}$ garantizado suficientemente de la transición

— $\underline{\underline{MC}}$ a DM



Voltear un conjunto de espines tamaño ξ muy improbable

Modelo de alentamiento crítico



$$\mathcal{F} = \alpha\,\underbrace{(T-T_c)}\,m^2 + \beta m^4$$ → estabiliza

dinámica sobreamortiguada

$$-2\alpha(T-T_c)m = \dot{m} \Leftarrow \dot{m} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m} \Longleftrightarrow \dot{x} = -\frac{dV}{dx} = F$$

$$\dot{m} = -2\alpha(T-T_c)\, m$$

$$\int \frac{dm}{m} = -2\alpha(T-T_c)\int dt$$

$$\ln m = -2\alpha(T-T_c)\, t + c$$

$$m = C e^{-\alpha(T-T_c)t}$$

$\nu = ?$

CAMPO MEDIO?

$\nu = 1/2$

$\Rightarrow \boxed{z = 2}$

$$\tau = \frac{1}{\alpha(T-T_c)}$$

$\tau \to \infty$

$T \to T_c^+$

$$\xi = \Gamma\,(T-T_c)^{-\nu}$$

$$T-T_c = \left(\frac{\xi}{\Gamma}\right)^{-1/\nu}$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\xi}{\Gamma}\right)^{1/\nu}$$

$$\tau \propto \xi^{z} \qquad z = \frac{1}{\nu}$$

$T \to T_c$

$$\mathcal{F} \sim \beta m^4 \qquad \dot{m} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial m}$$

$$\dot{m} = -4\beta m^3$$

HW

$$m = \frac{1}{\sqrt{8\beta t + c}}$$

ley de potencia

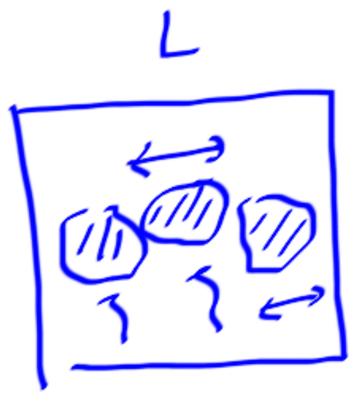
τ característico es ∞

— τ escala con el tamaño del sistema

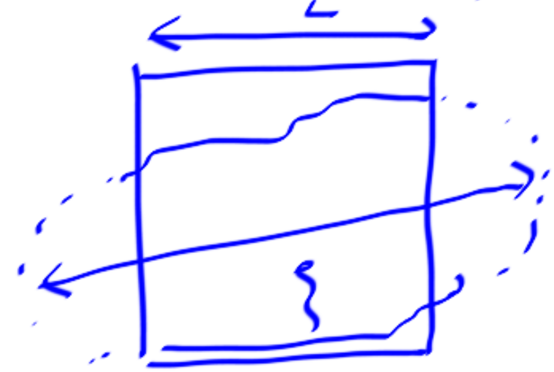
cerca de criticalidad

$$L < \xi \Rightarrow \tau \propto L^z$$

$$\tau \propto \xi^z \qquad L \geq \xi$$



$\tau \propto \xi^z$



$\tau \propto L^z$

Dinámica crítica:

Dep. temporal de fluctuaciones de largo rango del parámetro de orden cerca del pto crítico

Otros argumentos dinámicos que limitan la evolución del sistema son leyes de conservación

ESTÁTICAS $\quad t_{exp} \gg \tau$

Física se limita a conteo de estados / estadística

$t_{exp} \lesssim \tau$

$\Rightarrow$ requerimos ec. de movimiento

Que ecuaciones de movimientos?

μ-escopica — macroscópica

Ecuaciones de Newton $\Longleftrightarrow$ Irreversible (Termodinamica)

reversible — Frontera

Inv. frente a reversion temp

Ec. Schrod. $\Longleftrightarrow$ Irreversible

reversible

Abismo

No es materia de este curso

Ec. de movimiento de grano grueso

(Coarse grained)

ec. de movimiento

− Fricción / disipación

− Forzados

\+ Dinámica μ-escópica del sistema

disipativos

Dos mecanismos:

a) Movimiento regular del sistema (Dinámica propia)

acoplamiento de modos (mode coupling theory)

b) Movimiento aleatorio / desorganizado

ruido + disipación unidireccional

Oscilador armónico

Mov. Browniano de un oscilador:

Shang-Keng Ma   Critical Phenomena

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}Kx^2 \qquad P, x \quad \underline{\underline{\text{modos}}}$$

$$q_1 = P \qquad q_2 = x$$

$$H = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{1}{2}K q_2^2 \Rightarrow H = \frac{q_1^2}{2m} + \frac{q_2^2}{2/K}$$

Sup. E constante

elipse

$$\dot{q}_1 = \dot{p} \qquad \dot{q}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_2}$$

$$\boxed{\dot{q}_1 = -K q_2} = v_1$$

evol.
determinist.

$$\boxed{\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{q_1}{m} = v_2}$$

incluimos disipación + Fortuito

Fortuito

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = v_2 \qquad \frac{\partial q_1}{\partial t} = v_1 - \frac{\Gamma_1}{T}\frac{\partial H}{\partial q_1} + \xi_1(t)$$

temperatura

disipación

Que suponemos para $\xi(t)$?

$\langle \xi(t) \rangle = 0$ $\qquad \langle \xi(t)\, \xi(t') \rangle = 2D_1\, \delta(t-t')$

ξ es una variable aleatoria Gaussiana $\qquad$ Constante de difusión

$$P(\xi) = \frac{e^{-\xi^2/4D_1}}{\sqrt{4D_1}}$$

<u>Queremos</u> $\rightarrow P(q_1, q_2, t)$ dist. de probabilidad

Fokker – Planck define la evolucion temporal de una dist. de probabilidad

evol.

$$\left\langle \frac{\partial q_1}{\partial t} = V_1 - \frac{\Gamma_1}{T}\frac{q_1}{m} + \xi_1 \right\rangle \to \text{promedio temporal}$$

$$\frac{\partial \langle q_1 \rangle}{\partial t} = -K\langle q_2 \rangle - \frac{\Gamma_1}{T}\frac{\langle q_1 \rangle}{m} + \cancelto{0}{\langle \xi_1 \rangle}$$

$$\frac{\partial \langle q_2 \rangle}{\partial t} = \frac{\langle q_1 \rangle}{m}$$

$$\frac{\partial^2 \langle q_1 \rangle}{\partial t^2} = -k \frac{\langle q_1 \rangle}{m} - \frac{\Gamma_1}{mT} \frac{\partial \langle q_1 \rangle}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \langle q_1 \rangle}{\partial t^2} + k \frac{\langle q_1 \rangle}{m} + \frac{\Gamma_1}{mT} \frac{\partial \langle q_1 \rangle}{\partial t}$$

$$\langle q_1 \rangle = C e^{-\alpha t} \qquad q_1(0) = C$$

$$C\alpha^2 - \frac{\Gamma_1}{mT} \alpha + \frac{k}{m} = 0$$

$$\frac{1}{\tau} = \alpha = \frac{\frac{\Gamma_1}{mT} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma_1}{mT}\right)^2 - 4C\frac{k}{m}}}{2C} \qquad \underline{\underline{\alpha > 0}}$$

2 constantes de tiempo

$$\frac{K_1}{m} = \frac{1}{\tau_1^2} \quad ; \quad \frac{\Gamma_1}{mT} = \frac{1}{\tau_2}$$

$\tau_1 \gtrsim \tau_2$ una const. de tiempo va a ser mas corta que la otra

$\langle q_1 \rangle , \langle q_2 \rangle \to 0$ (Dinamica propia desaparece)

comportamiento limite $\Rightarrow$ para las fluctuaciones Termodinamica con Reservorio.

Fokker – Planck

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = V_1 - \frac{\Gamma_1}{T}\frac{\partial H}{\partial q_1} + \xi_1$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = V_2 + 0 + 0$$

$$\langle \xi_1 \rangle = 0 \qquad \langle \xi_1(t)\,\xi_1(t') \rangle = 2D_1\,\delta(t-t')$$

$P(q_1, q_2, t)$?

F.P.

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x}\left(v(x,t)\, P(x,t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D(x,t)\, P(x,t) \right)$$

ley de cons.

$$= - \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{J}$$

$\hookrightarrow$ corriente de probabilidad osc. armónico

$$\frac{\partial P(q_1,q_2,t)}{\partial t} = -\sum_{\substack{i \\ (1,2)}} \frac{\partial J_i}{\partial q_i}$$

$$= -\left(\frac{\partial J_{q_1}}{\partial q_1} + \frac{\partial J_{q_2}}{\partial q_2} \right)$$

Corrient. de prob. del modo i

$$J_i = v_i P - \frac{\Gamma_i}{T} \frac{\partial H}{\partial q_i} P - D_i \frac{\partial P}{\partial q_i}$$

Si la P_i se conserva $\Rightarrow$ relación entre Γ_i

relación de Einstein D_i

Leyes de Conservación

$$\frac{dH}{dt} = 0 = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial q_1} v_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} v_2 = \dot{q}_2 \dot{q}_1 - \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$= 0$$

evolución Hamiltoniana

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ evolución Incompresible

$$\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad [P, H]_P = 0$$

condición Γ_i, D_i

$$P = P(H) \longrightarrow P \propto e^{-H/k_B T}$$

Naturalmente incorporado a la ec. de F.P.

dist. Boltzm.

condición estacionaria de la prob.

$$P \propto e^{-\left(\sum_i \text{Cons}\right)}$$

Clase que viene eliminación
de los modos lentos del problema