

# Clase 1: Introducción a Redes Complejas

Mario Cosenza

**Mecánica Estadística Avanzada (2022):**

Modelos discretos en Sistemas Complejos



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea



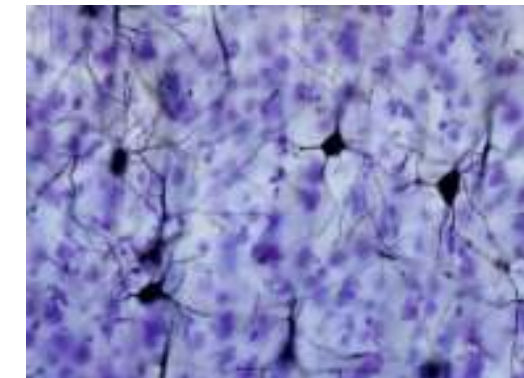
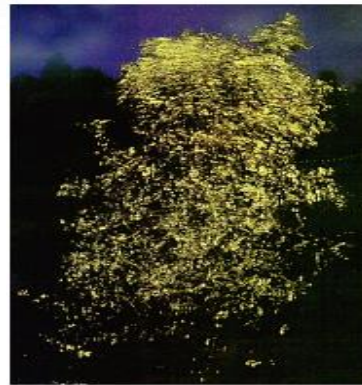
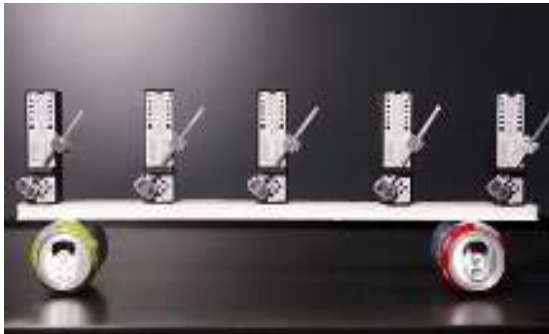


# Sistemas complejos

(Siglo XXI) **Sistema complejo:** conjunto de elementos interactivos cuyo comportamiento colectivo (estructuras, funcionalidad, organización) no puede ser descrito a partir del comportamiento de los elementos aislados; **emerge** de sus interacciones → **No linealidad.**

**Ejemplos:** osciladores acoplados, colonias de insectos, cardúmenes, bandadas de pájaros, tráfico, sistemas ecológicos, sistemas fisiológicos, clima, economía, sistemas sociales, cerebro. → **Interdisciplinariedad.**

**Comportamientos colectivos comunes:** sincronización (coherencia), formación de patrones espaciotemporales, auto-organización, adaptación, transición orden-desorden, fases, red de conectividad → **Universalidad.**

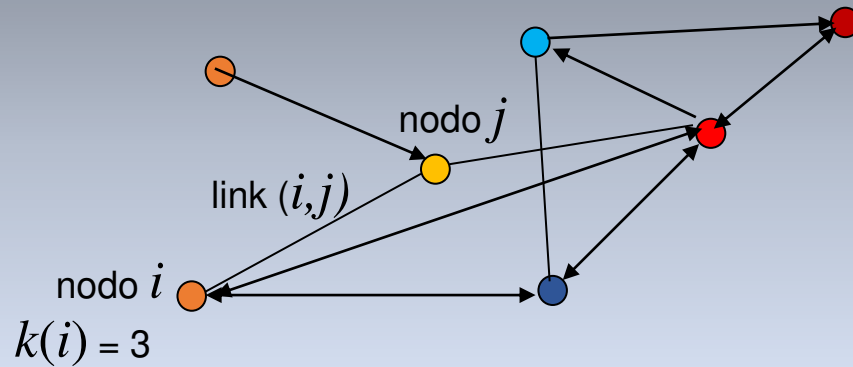




# Redes: la estructura de sistemas complejos

**Sistemas complejos:** elementos dinámicos (nodos) + interacciones (conexiones, enlaces, links).

**Red**



$i = 1, 2, \dots, N$  (tamaño del sistema)

$k(i)$  = número de conexiones o *grado* del nodo  $i$

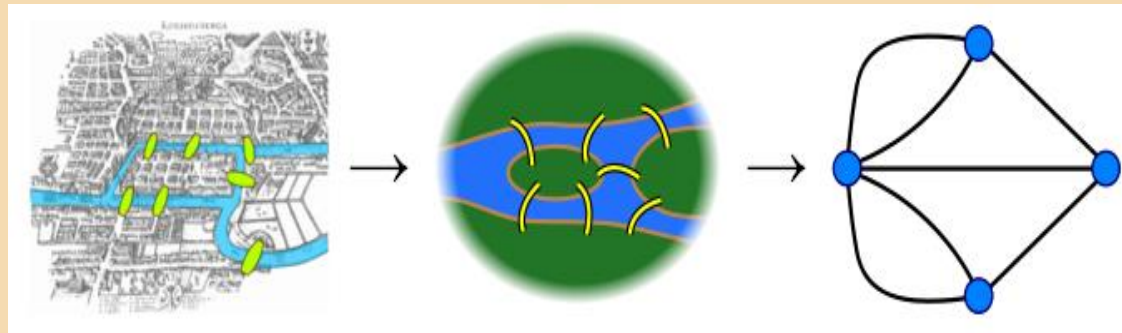
$\mathcal{V}_i$  = conjunto de vecinos de  $i$

$x_t(i)$  = *variable de estado del nodo i* en tiempo  $t$

## Breve historia: Teoría de Grafos

### Puentes de Königsberg (Leonard Euler, 1736)

¿Existe un camino que cruce todos los puentes sin repetir ninguno?



No existe solución si hay mas de 2 nodos con  $k(i)$  impar. **No aquí!**



# Conceptos generales de redes

Sea  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  un conjunto finito, llamado conjunto de nodos o vértices.

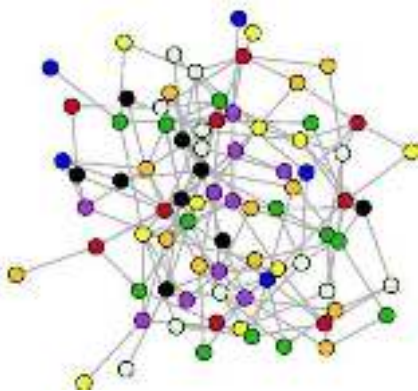
Sea  $E \subseteq V \otimes V$  un conjunto de pares (no necesariamente distintos) formado con los elementos de  $V$ , llamado conjunto de links, enlaces.  
 $E$  es simétrico si  $(v_i, v_j) \in E \leftrightarrow (v_j, v_i) \in E$ .

**Un grafo o una red  $G$  es un par  $(V, E)$ .**

- Si  $E$  es simétrico,  $G$  es una red no dirigida.
- Si  $E$  no es simétrico,  $G$  es una red dirigida.
- Si  $(v_i, v_i) \in E$ ,  $G$  es una red reflexiva.

**Paul Erdős (1960's):**

Propiedades estadísticas de redes aleatorias.



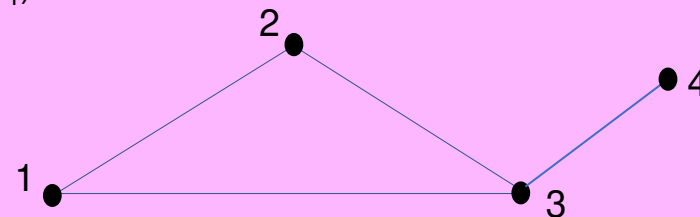
Grado promedio:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k(i)$$

**Ejemplo:**  $V = \{1,2,3,4\}$

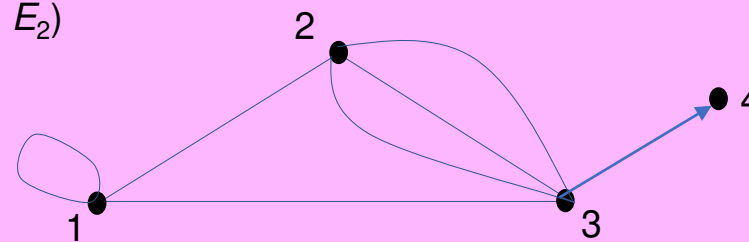
$$E_1 = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,3)\}$$

$G = (V, E_1)$



$$E_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (2,3), (2,3), (3,1), (3,2), (3,2), (3,2), (3,4)\}$$

$G = (V, E_2)$



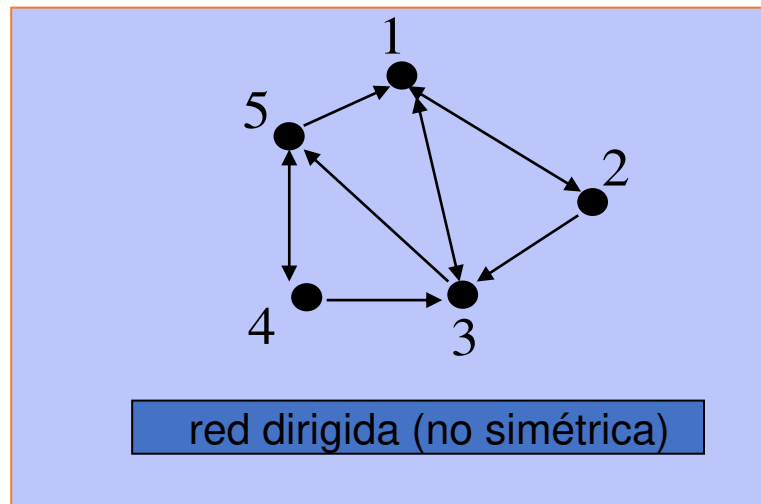
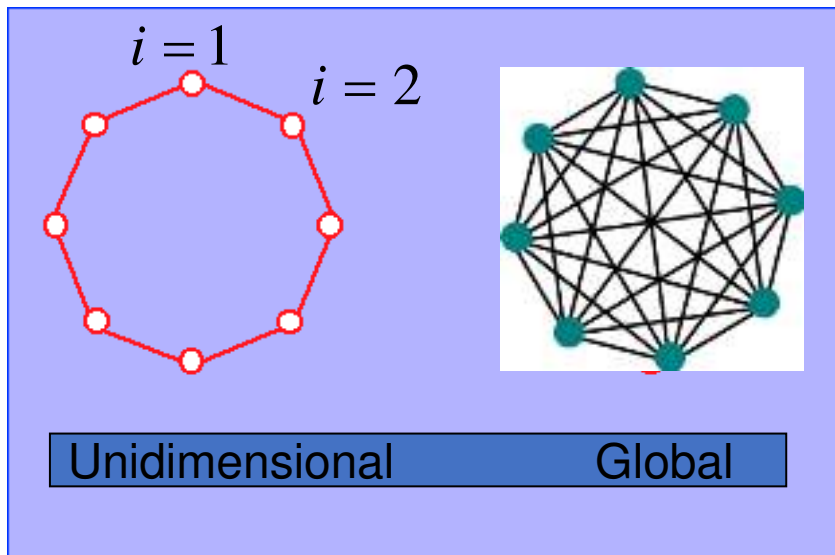


# Matriz de conectividad o adyacencia

Red de interacciones se puede expresar como matriz de *conectividad* o *adyacencia*  $N \times N$ :  $M_{ij}^\alpha(t)$

$i, j$ : elementos (nodos) del sistema,  $\alpha$ : tipo de interacción,  $t$ : dependencia en el tiempo.

Valor de  $M_{ij}^\alpha(t)$  indica la intensidad de la interacción tipo  $\alpha$  entre elementos  $i$  y  $j$  en el tiempo  $t$ .



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & 0 & 1 & & & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & & \\ \mathbf{0} & & & & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

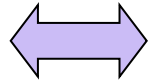
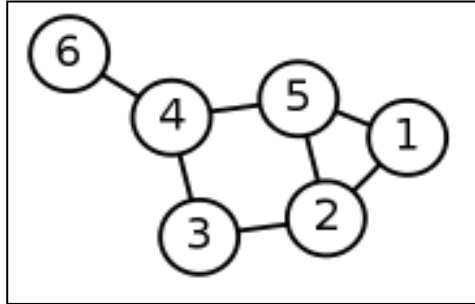
$M$  contiene la topología de la red.



# Conjunto de vecinos

matriz de adyacencia

tabla de vecinos

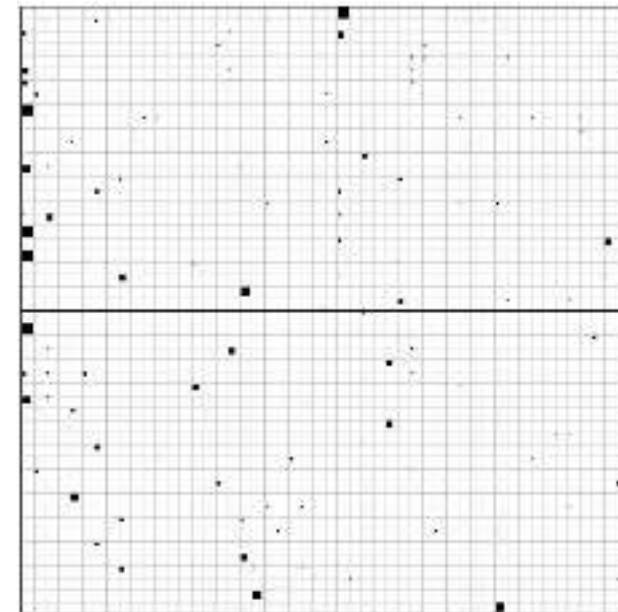
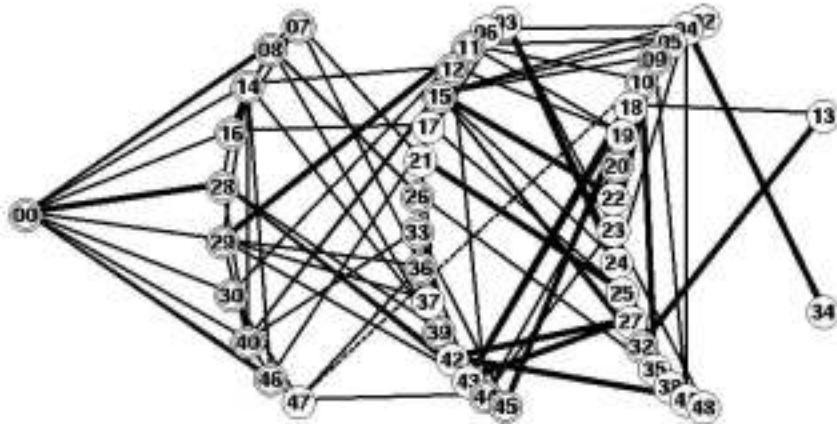


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


$i$	$v_i = \text{conjunto de vecinos de } i$
1	2, 5
2	1, 3, 5
3	2, 4
4	3, 5, 6
5	1, 2, 4
6	4

En general, "peso" del acoplamiento  $i,j$ :  $M_{ij} \in [0,1]$

**Ejemplo:** redes neuronales

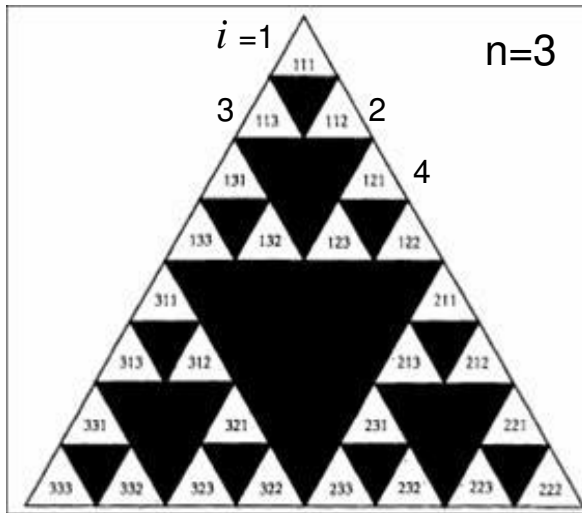
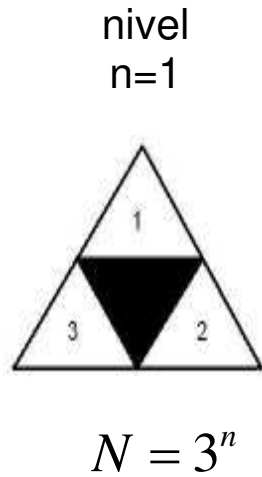


50 × 50



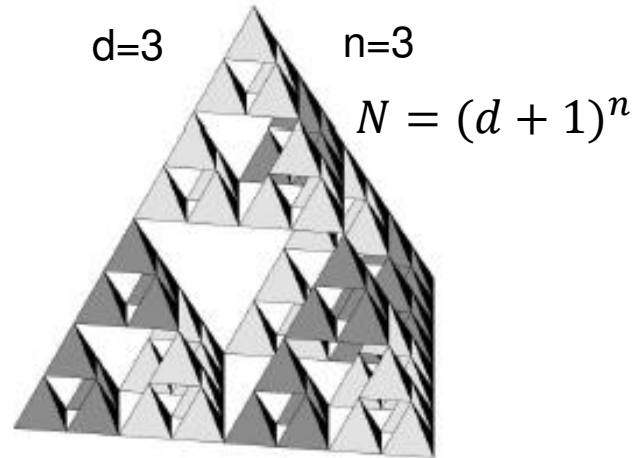
# Redes fractales

## Triángulo de Sierpinski



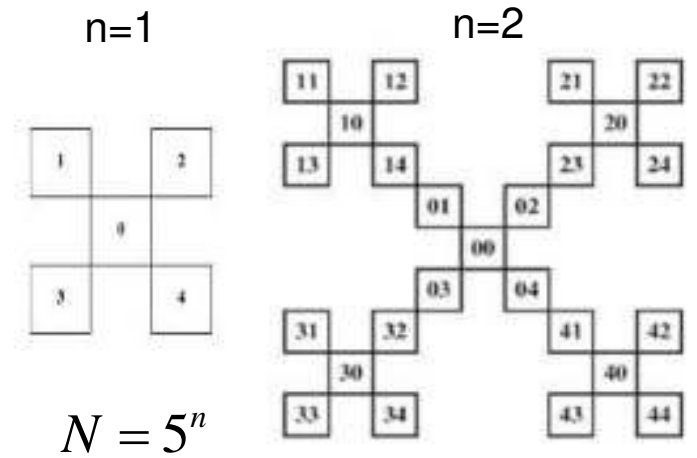
M.G. Cosenza, R. Kapral, Phys Rev A **46**,1850 (1992)

## Sierpinski en d-dimensiones



K. Tucci, M.G. Cosenza, O. Alvarez, Phys Rev E **68**, 02702 (2003)

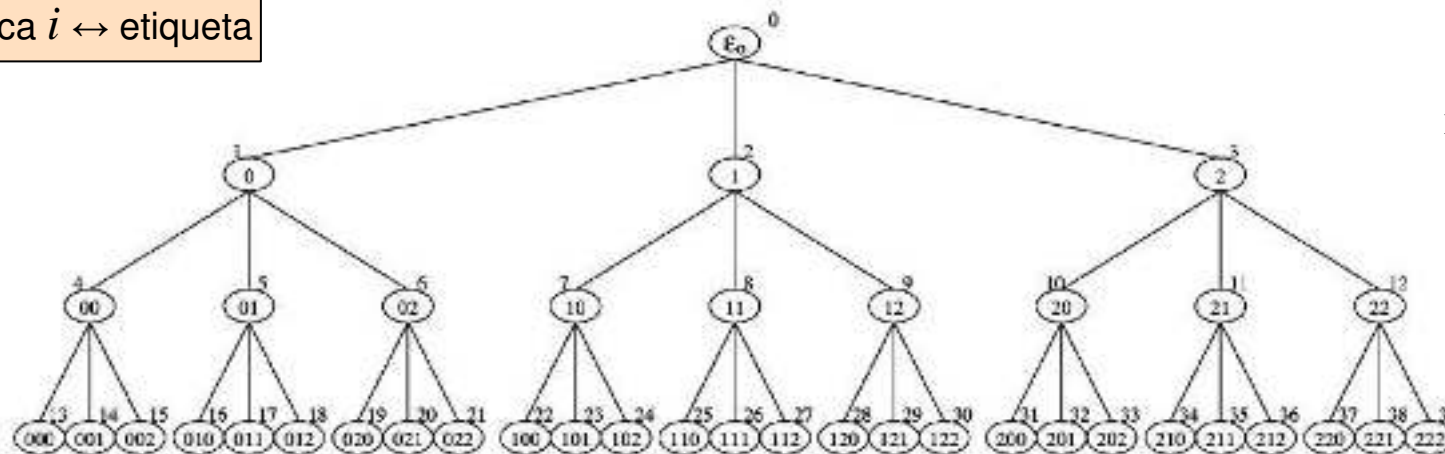
## Crecimiento fractal (dendritas)



K. Tucci, M.G. Cosenza, Physica D **199**, 91 (2004)

## Red jerárquica (árbol)

Relacion unívoca  $i \leftrightarrow$  etiqueta

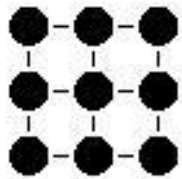


M.G. Cosenza, K. Tucci, Phys.Rev. E **64**, 026208 (2001).

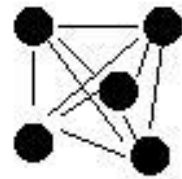


# Redes

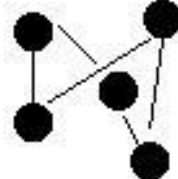
Euclidiano



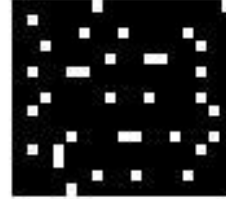
Global



Aleatorio



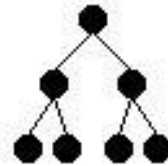
Porosos



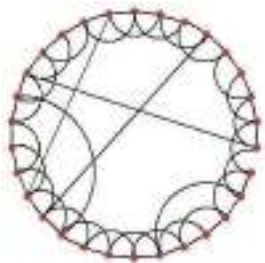
Fractales multi y monoconexos



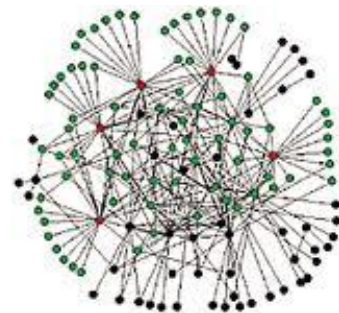
Arboles



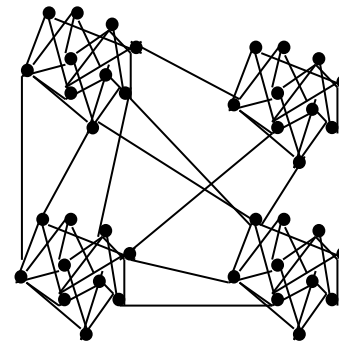
Pequeño mundo



Libre de escala



Comunidades



redes  
regulares

redes  
complejas





# Redes de pequeño mundo: el boom

*Small World Networks*, D. J. Watts, S. H. Strogatz, *Nature* **393**, 440 (1998).  
[49513 citas Google Scholar]

Muchas redes naturales y artificiales poseen pequeño número de links ( $\ll N$ ) entre 2 nodos cualesquiera, en promedio.

$L$  = longitud característica:  
promedio de número de links entre 2 nodos.

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij}$$

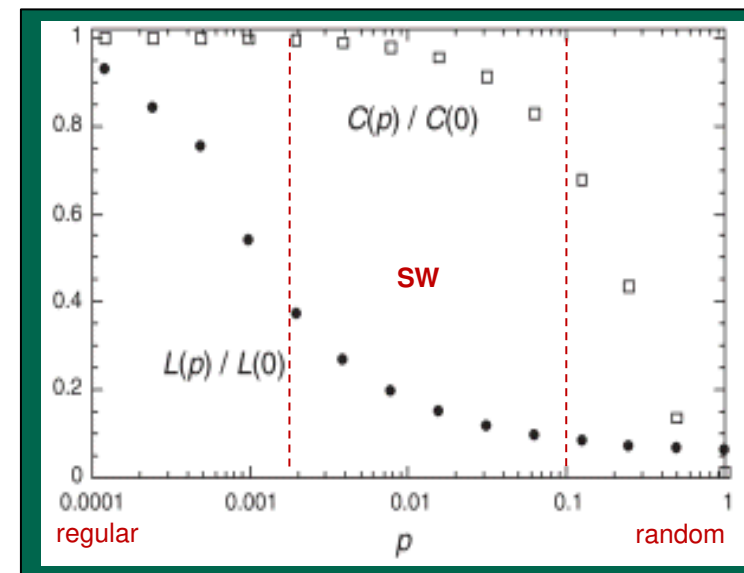
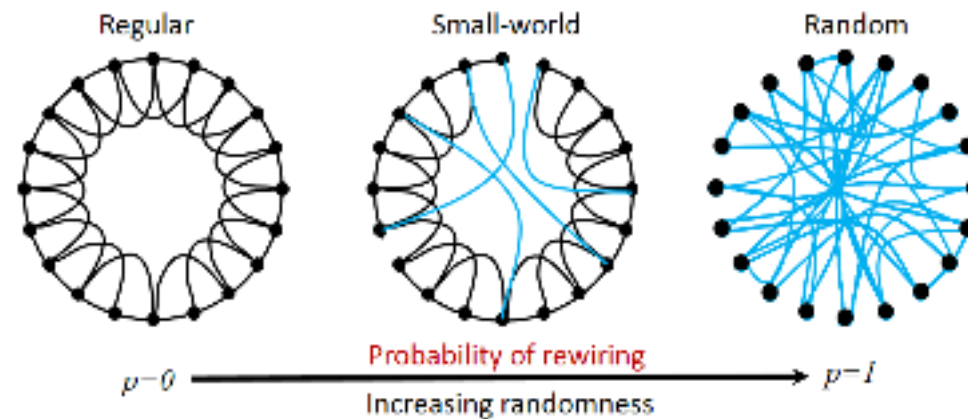
$C$  = coeficiente de clustering: fracción promedio de vecinos que son vecinos entre sí.

$$c(i) = \frac{2 \times (\# \text{ triángulos que contienen al nodo } i)}{k(i) \times (k(i) - 1)}$$

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c(i)$$

Red pequeño mundo:  $L$  pequeño ( $L \ll N$ ),  $C$  grande.

Redes de pequeño mundo: *existen entre el orden y el desorden; poseen conexiones de largo alcance.*





# El efecto pequeño mundo



Distancia promedio entre cualesquiera dos nodos  $\ll$  tamaño del sistema

S. Milgram (1969): 296 personas

Nebraska  Boston

**SEIS GRADOS** de separación      Muchos repetían conocidos.

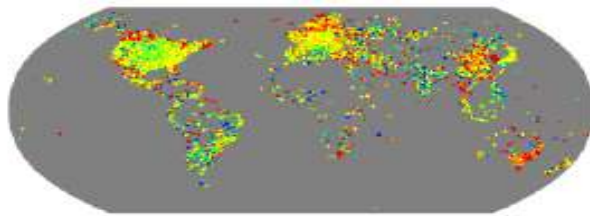


Figure 7: Number of users at a particular geographic location. Color of dots represents the number of users.

J. Leskovec, E. Horvitz, Transactions on Computational Social Systems IEEE 1, 156 (2014).

240 Millones personas,  
30.000 millones conversaciones MSN Microsoft  
Distancia media: **6,6 GRADOS**



L. Backstrom, P. Boldi, M. Rosa, J. Ugander, S. Vigna,  
Proceedings of the 4th ACM Web Science Conference, p.33–42 (2012).

721 millones usuarios  
69 billiones links  
 $L=4,74$

**¡El mundo es pequeño!**



# Redes sociales reales: redes de pequeño mundo

## Red de contactos sexuales:

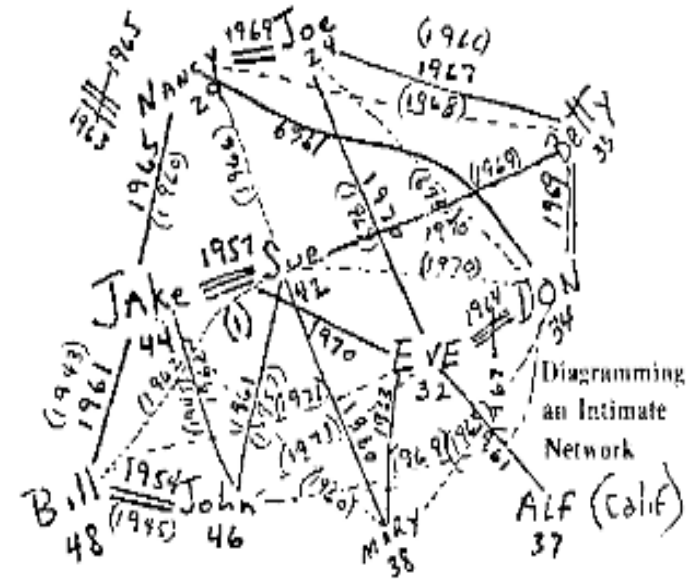
*The Web of Human Sexual Contact.*

F. Lijeros, C. Edling, L. Amaral, H. Stanley, Y. Aberg, *Nature* **411**, 907 (2001).

$N = 2810$  (age 18-74),  $L = 6$

Tema literario:

Javier Marías, *Mañana en la batalla piensa en mí.*



## Red de colaboraciones científicas:

The Erdős Number Project:

<http://www.oakland.edu/enp/>

$N = 600.000$  autores,  $L \approx 6$

### Número de Erdős de Mario Cosenza = 4

- P. Erdős, M. Kac, *Amer. J. Math.* **62**, 738 (1940).
- B. Gaveau, T. Jacobson, M. Kac, L. Schulman, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 419 (1984).
- B. Gaveau, J. T. Hynes, R. Kapral, M. J. Moreau, *J. Stat. Phys.* **56**, 879 (1989).
- M. G. Cosenza, R. Kapral, *Phys. Rev. A* **46**, 1850 (1992).

## Red de estudiantes en cursos comunes Fac. Ingeniería, ULA:

$N = 9340$  estudiantes,  $L = 1.95$  (J. L. Herrera, T. Doctoral, ULA, 2012). **Importante propagación epidemias, información.**

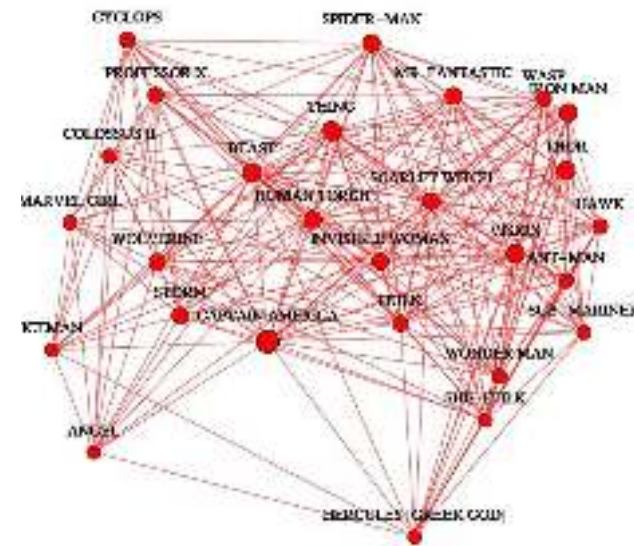


# Ejemplos de redes de pequeño mundo

**Efecto pequeño mundo es común en muchos sistemas:** colaboradores (co-autores científicos, actores de cine, deportes), redes distribución eléctrica, neuronas C Elegans, sinónimos, internet, redes metabólicas, redes sociales reales y virtuales, contactos sexuales.

Network	Size	$\langle k \rangle$	$L$	$\ell_{rand}$	$C$	$C_{rand}$	Reference	Nr.
WWW, site level, undir.	153 127	35.21	3.1	3.35	0.1078	0.00023	Adamic, 1999	1
Internet, domain level	3015–6209	3.52–4.11	3.7–3.76	6.36–6.18	0.18–0.3	0.001	Yook <i>et al.</i> , 2001a, Pastor-Satorras <i>et al.</i> , 2001	2
Movie actors	225 226	61	3.65	2.99	0.79	0.00027	Watts and Strogatz, 1998	3
LANL co-authorship	52 909	9.7	5.9	4.79	0.43	$1.8 \times 10^{-4}$	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	4
MEDLINE co-authorship	1 520 251	18.1	4.6	4.91	0.066	$1.1 \times 10^{-5}$	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	5
SPIRES co-authorship	56 627	173	4.0	2.12	0.726	0.003	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	6
NCSTRL co-authorship	11 994	3.59	9.7	7.34	0.496	$3 \times 10^{-4}$	Newman, 2001a, 2001b, 2001c	7
Math. co-authorship	70 975	3.9	9.5	8.2	0.59	$5.4 \times 10^{-5}$	Barabási <i>et al.</i> , 2001	8
Neurosci. co-authorship	209 293	11.5	6	5.01	0.76	$5.5 \times 10^{-5}$	Barabási <i>et al.</i> , 2001	9
<i>E. coli</i> , substrate graph	282	7.35	2.9	3.04	0.32	0.026	Wagner and Fell, 2000	10
<i>E. coli</i> , reaction graph	315	28.3	2.62	1.98	0.59	0.09	Wagner and Fell, 2000	11
Ythan estuary food web	134	8.7	2.43	2.26	0.22	0.06	Montoya and Solé, 2000	12
Silwood Park food web	154	4.75	3.40	3.23	0.15	0.03	Montoya and Solé, 2000	13
Words, co-occurrence	460.902	70.13	2.67	3.03	0.437	0.0001	Ferrer i Cancho and Solé, 2001	14
Words, synonyms	22 311	13.48	4.5	3.84	0.7	0.0006	Yook <i>et al.</i> , 2001b	15
Power grid	4941	2.67	18.7	12.4	0.08	0.005	Watts and Strogatz, 1998	16
<i>C. Elegans</i>	282	14	2.65	2.25	0.28	0.05	Watts and Strogatz, 1998	17

Red de Superhéroes coprotagonistas de Marvel



**Efecto pequeño mundo optimiza transmisión de información.**

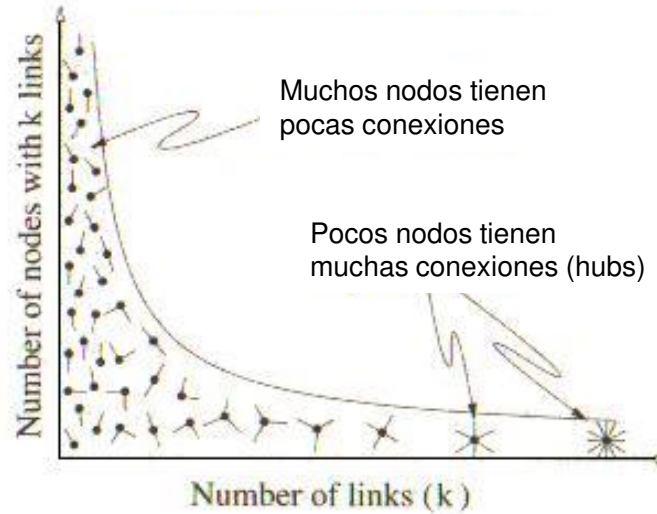


# Redes libres de escala

## Rutas aéreas

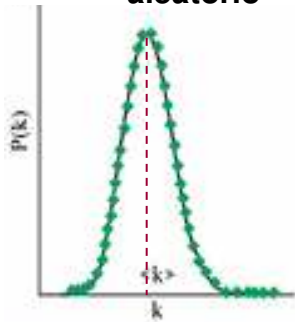


## Distribución de links

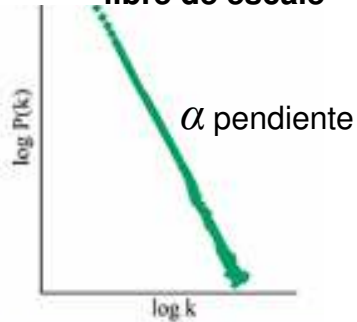


A. Barabasi, R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999).

## aleatorio



## libre de escala

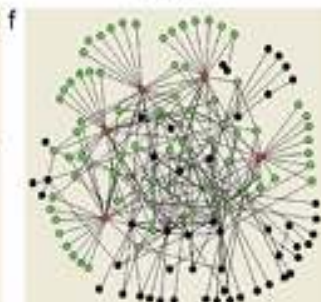
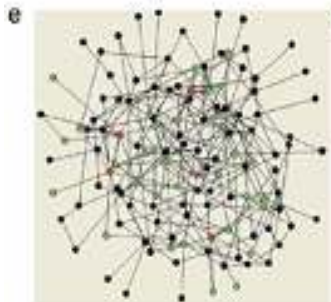


Distribución de probabilidad de links es una ley de potencia:

$$P(k) \propto k^{-\alpha}$$

No existe escala característica (valor medio) de  $k$ :  
eventos ocurren en todas las escalas.

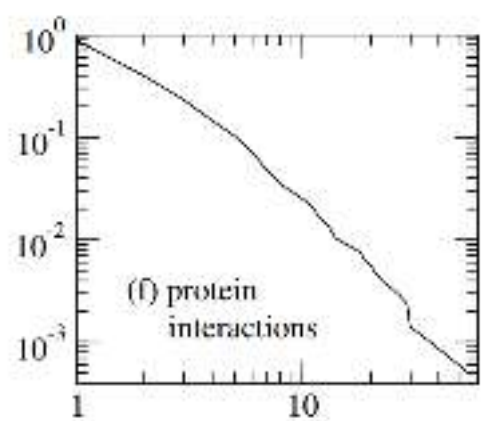
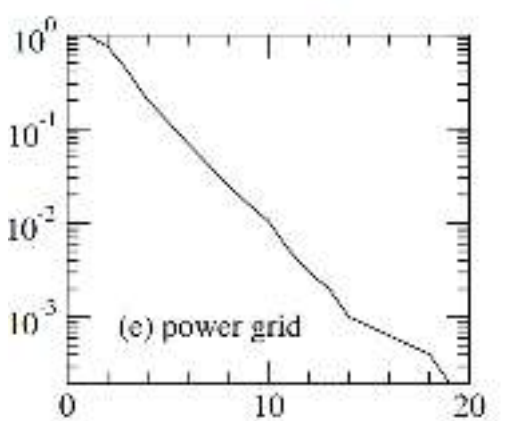
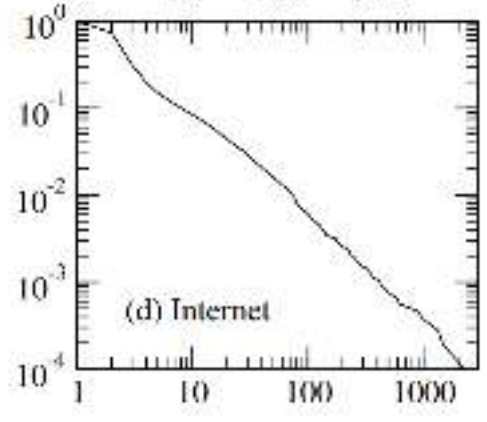
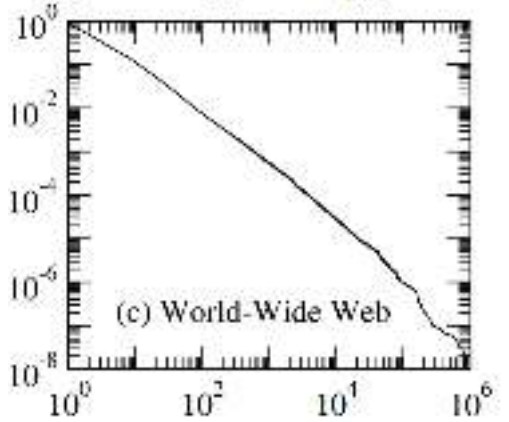
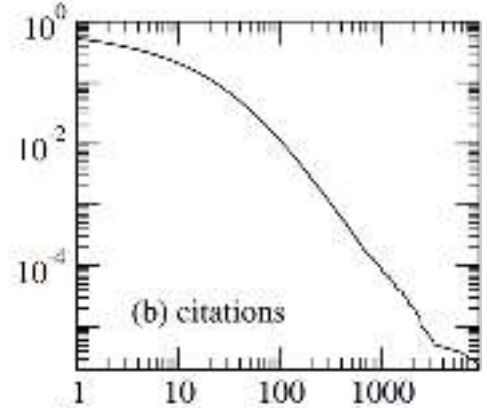
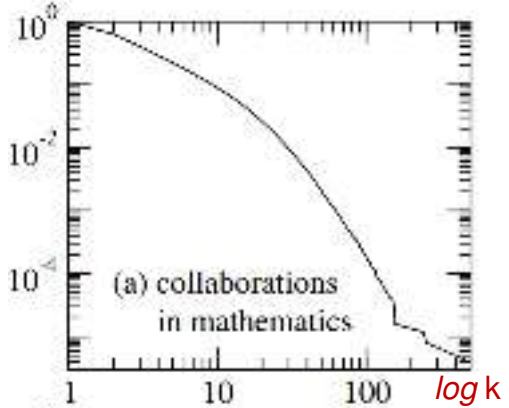
**Mecanismo de formación: conexión preferencial,**  
Nuevos nodos prefieren nodos con más conexiones.





# Ejemplos de redes libres de escala

$\log(\# \text{ nodos con } k \text{ links})$

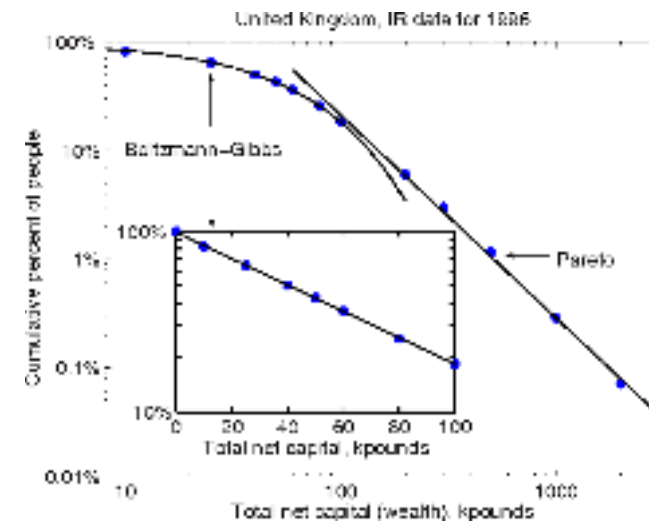


## Ejemplos:

www, rutas de tráfico, interacciones de proteínas, citas, amigos Facebook, frecuencia de palabras en textos, llamadas telefónicas, redes eléctricas, terremotos, distribución de recursos, riqueza (Ley de Pareto en economía).

$$P(k) \propto k^{-\alpha}$$

$$2 < \alpha < 3$$



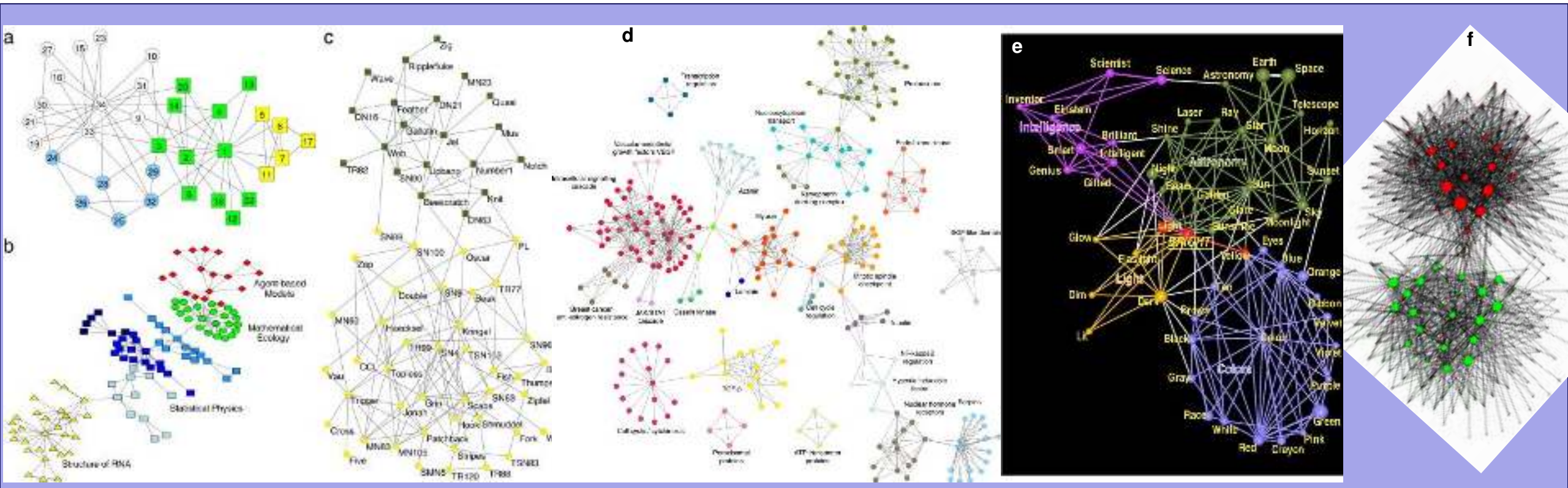
Ley de Pareto



# Redes de comunidades o modulares

**Comunidades** (módulos): subconjuntos de nodos altamente conectados, con pocas conexiones entre subconjuntos distintos. Existen varios métodos para caracterizar estructura modular en redes.

- Ejemplos:**
- a) Amigos en un club de karate.
  - b) Colaboraciones en el Instituto Santa Fe.
  - c) Manada de delfines.
  - d) Interacciones proteína-proteína.
  - e) Palabras relacionadas con “bright”.
  - f) Red llamadas celulares en Bélgica.



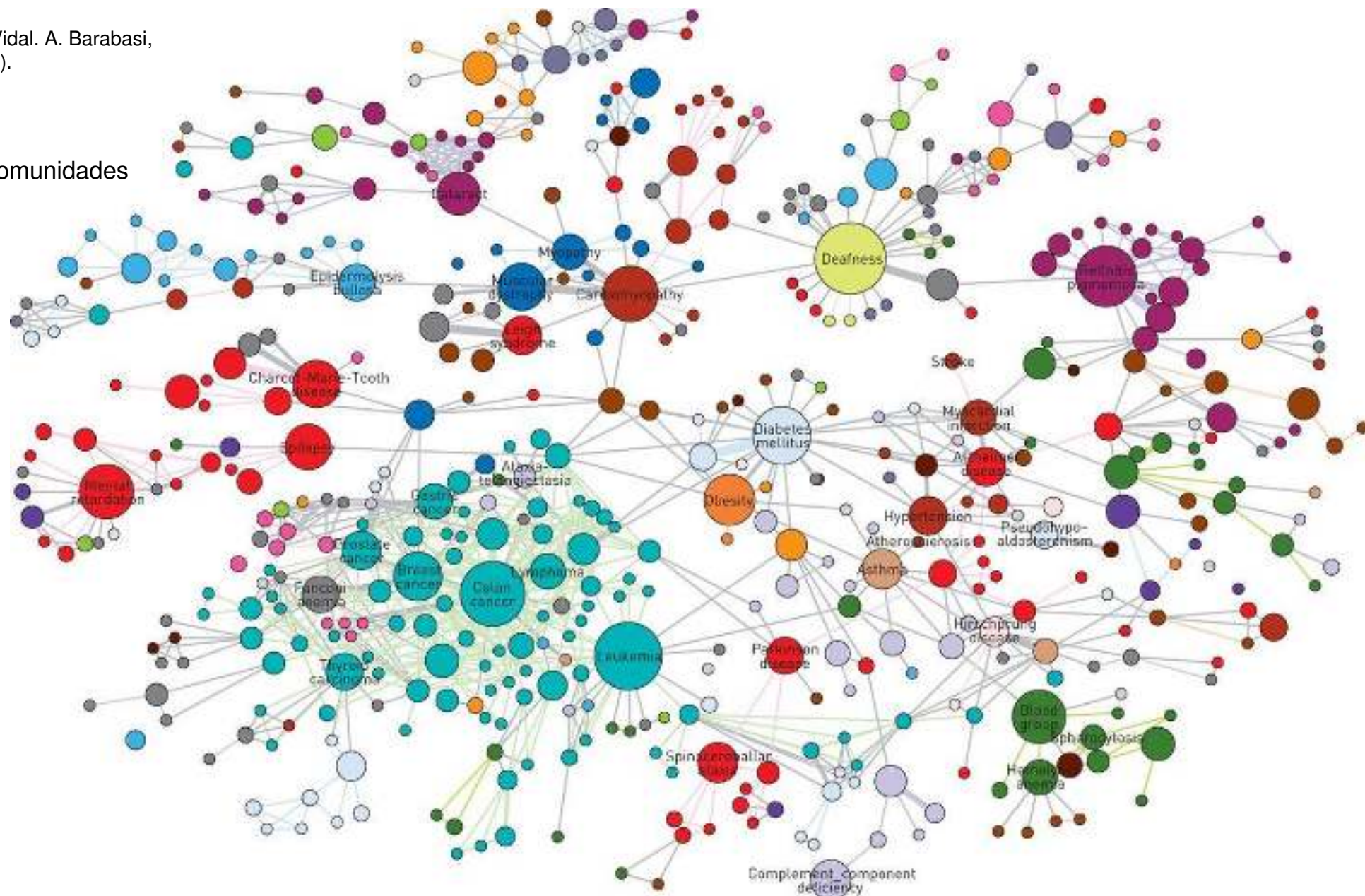


# Red de enfermedades humanas

K. Goh, M. Cusick, D. Valle, B. Childs, M. Vidal, A. Barabasi,  
*Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 104, 8685 (2007).

pequeño mundo + libre de escala + comunidades

- Bone
- Cancer
- Cardiovascular
- Connective tissue
- Dermatological
- Developmental
- Ear, Nose, Throat
- Endocrine
- Gastrointestinal
- Hematological
- Immunological
- Metabolic
- Muscular
- Neurological
- Nutritional
- Ophthalmological
- Psychiatric
- Renal
- Respiratory
- Skeletal
- multiple
- Unclassified



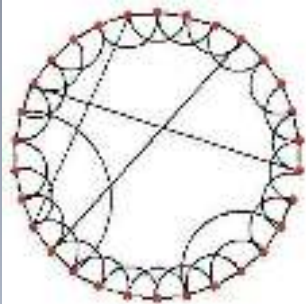




# Resumen

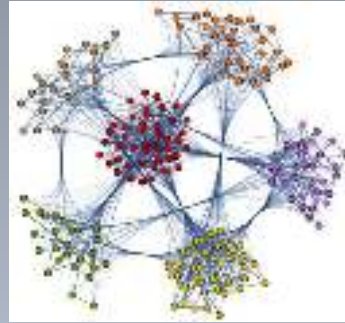
**Redes Complejas:** estructuras características en sistemas complejos de diversos contextos.

## Pequeño mundo



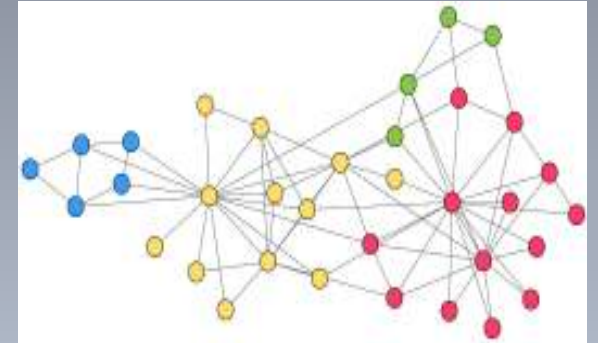
Distancia media entre nodos  $\ll N$   
clustering alto, entre ordenada y aleatoria

## Libre de escala



Distribución de links:  $P(k) \sim k^{-\alpha}$   
Pocos nodos con muchos links, muchos nodos con pocos links

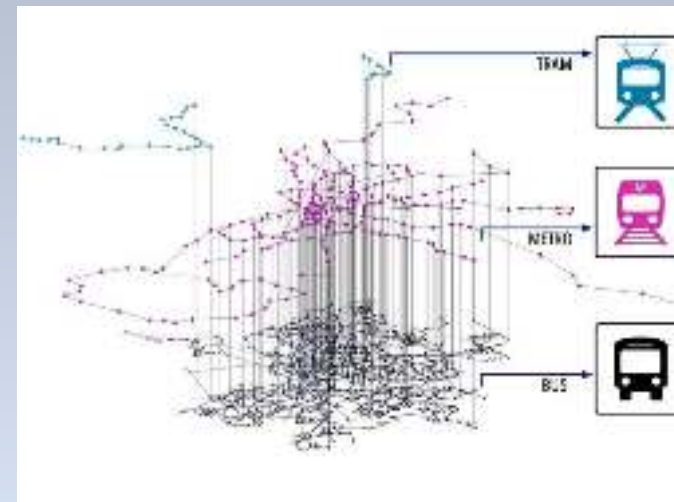
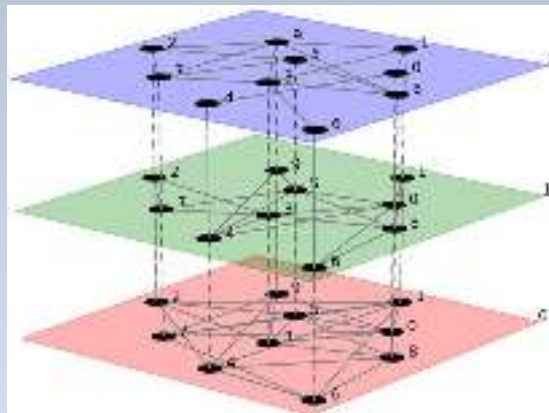
## Comunidades



Subgrupos con muchos links internos,  
pocos links entre distintos subgrupos

## Multicapas

Diferentes redes coexistentes





<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongaphysics



Latin American alliance for  
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.