

# Mecánica Estadística Avanzada (2022):

Modelos discretos en Sistemas Complejos

## Clase 5: Estados quiméricos en sistemas dinámicos

Mario Cosenza



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea





# Quimeras



- ❖ **Mitología:** criatura fantástica, híbrida, compuesta de partes de varios animales (león, cabra, serpiente).

- ❖ **Biología o genética:** organismo que posee líneas celulares (zigotos) de orígenes distintos.



- ❖ **Sistemas dinámicos espaciotemporales:** estado colectivo caracterizado por la coexistencia de una región sincronizada o coherente, con otra región desincronizada o incoherente.

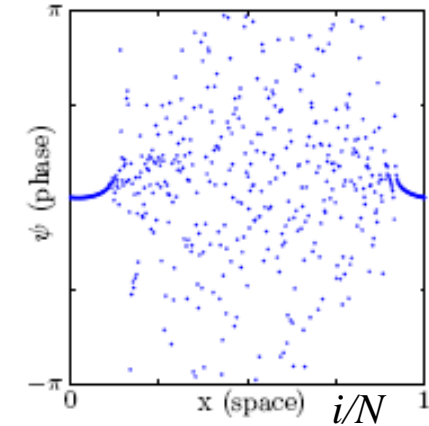
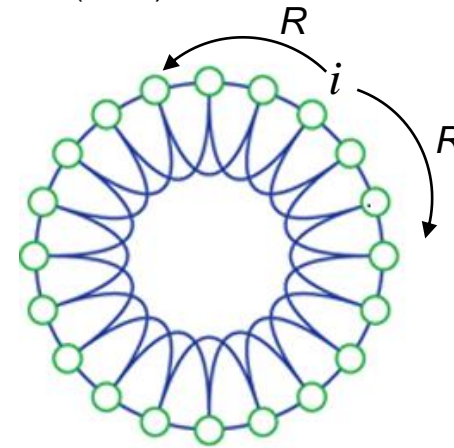


# Estados quiméricos en redes dinámicas

➤ D. Abrams, S. H. Strogatz, *Chimera states for coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett. **93**, 174102 (2004).

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} = \omega - \frac{k}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} \sin[\psi_i(t) - \psi_j(t) + \gamma]$$

$i = 1, \dots, N$  (anillo, conexiones rango  $R$ , condiciones de frontera periódicas)



estados instantáneos

**Estado quimérico** en sistema  $S$ :  $S = \alpha \cup \beta$

$\alpha$  sincronizado:

$\beta$  desincronizado:

$$\psi_i(t) = \psi_j(t), \quad i, j \in \alpha$$

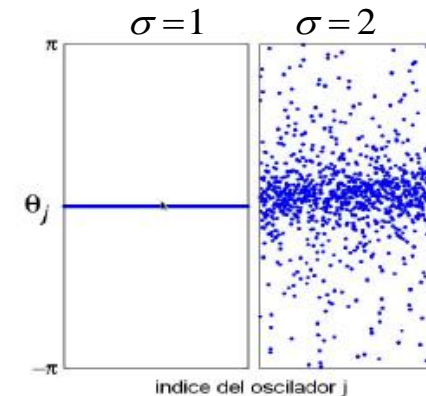
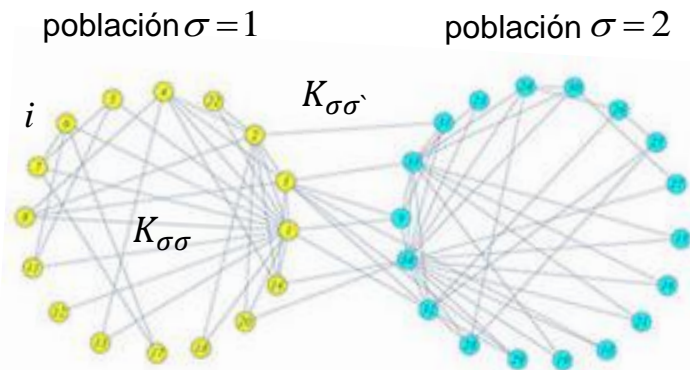
$$\psi_i(t) \neq \psi_j(t), \quad i, j \in \beta$$

➤ D. Abrams, R. Mirollo, S. H. Strogatz, D. Wiley, Phys. Rev. Lett. **101**, 084103 (2008).

Dos poblaciones de osciladores acoplados

$K_{\sigma\sigma}$  = acoplamiento entre elementos dentro de una población.

$K_{\sigma\sigma'}$  = acoplamiento entre elementos de distintas poblaciones.



estados de osciladores en cada población en un instante dado

➤ Y. Kuramoto, D. Battogtokh, *Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators*, Nonlin. Phen. Complex Sys. **4**, 380 (2002).



# Quimeras tempranas: redes de mapas globalmente acoplados

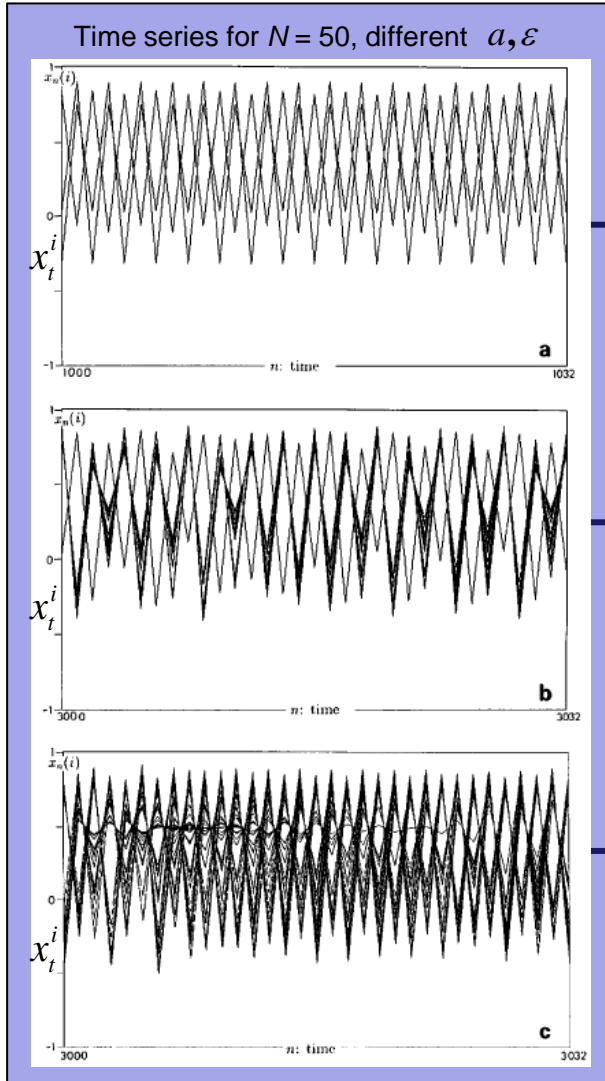
➤ K. Kaneko, *Physica D* **41**, 137 (1990).

$x_t^i$ : estado del mapa  $i$  en tiempo discreto  $t = 0, 1, 2, \dots$

Sistema de mapas acoplados globalmente ( $i = 1, \dots, N$ ):

$$x_{t+1}^i = (1 - \varepsilon) f(x_t^i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j) \quad \varepsilon: \text{Intensidad acoplamiento}$$

Mapa logístico local:  $f(x) = 1 - ax^2$



- *Clusters dinámicos*: elementos se segregan en grupos distinguibles que evolucionan en el tiempo, tal que elementos en grupos distintos están sincronizados.

Un solo cluster = sincronización.

- “*Partially ordered*”: coexistencia de un cluster con elementos incoherentes.  
→ estado quimérico!

“*Later, this kind of mixed state (synchronization and desynchronization) was termed chimera state...*”  
K. Kaneko, *Chaos* **25**, 097608 (2015), 25th Anniversary issue.

- *Incoherente o desincronizado*.

Clusters observados experimentalmente en osciladores químicos globalmente acoplados:

➤ W Wang, IZ Kiss, JL Hudson, *Chaos* **10**, 248 (2000).

Quimeras observadas en lasers globalmente acoplados:

➤ JD Hart, K Bansal, TE Murphy, R Roy, *Chaos* **26**, 094801 (2016).



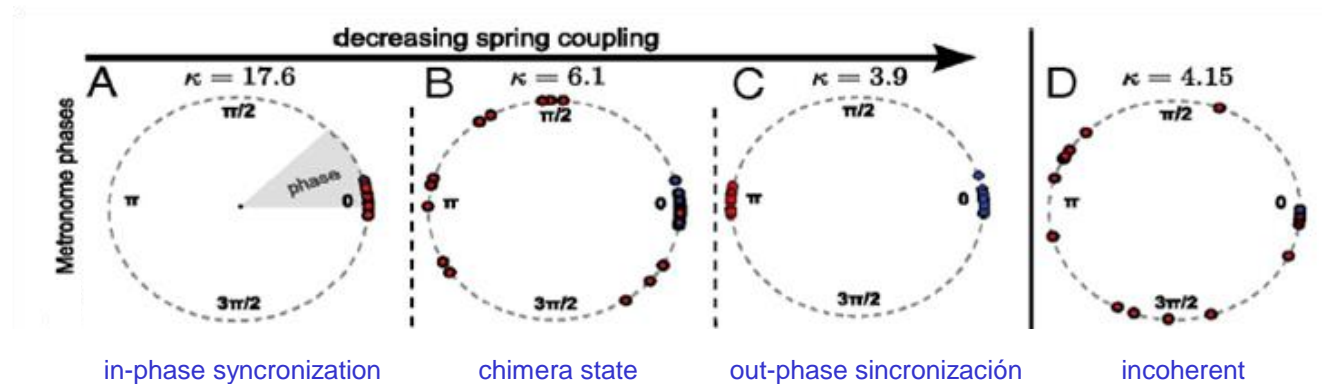
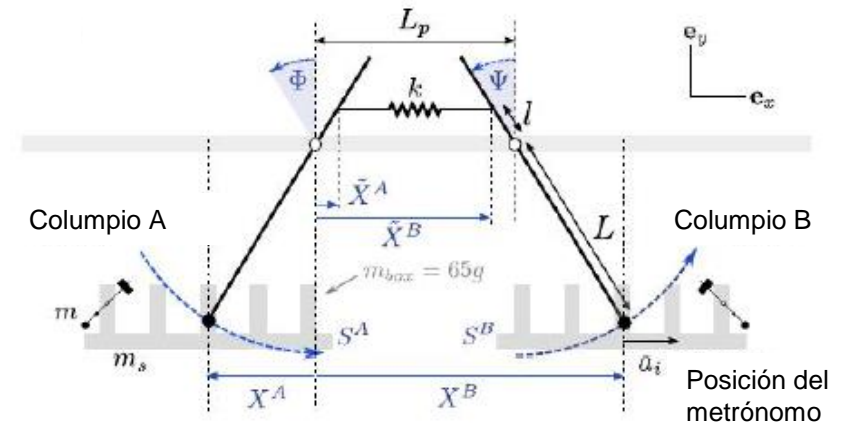
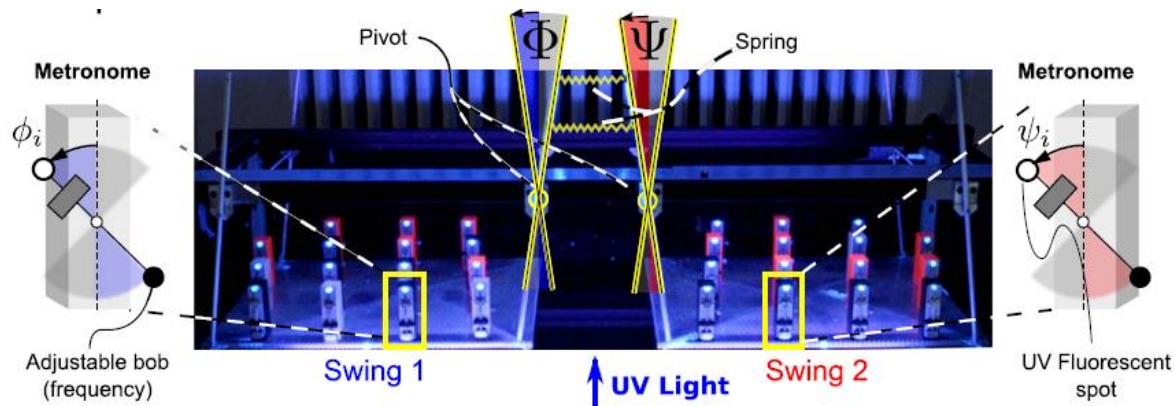
# Estados quiméricos en osciladores mecánicos

Estados quiméricos ocurren con interacciones locales y de largo alcance. Estado de rompimiento espontáneo de simetría de sincronización.

➤ Actualmente, existe mucho interés en estados quiméricos: redes, espacio continuo, sistemas físicos, químicos, biológicos, sociales.

➤ E. A. Martens, S. Thutupalli, A. Fourriere, O. Hallatschek, Proc. Nat. Acad. Sci. **110**, 10563 (2013)

Dos poblaciones de metrónomos globalmente acoplados.



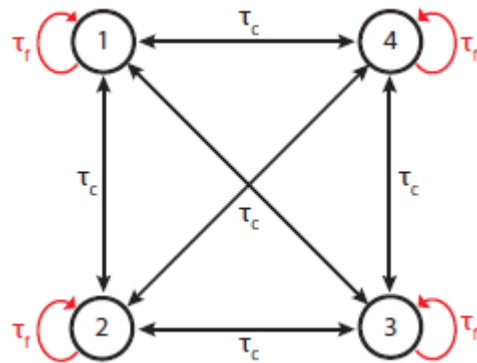


# Quimeras y clusters en lasers globalmente acoplados

➤ JD Hart, K Bansal, TE Murphy, R. Roy, Chaos **26**, 094801 (2016).

Red mínima de 4 opto-osciladores electrónicos globalmente acoplados.

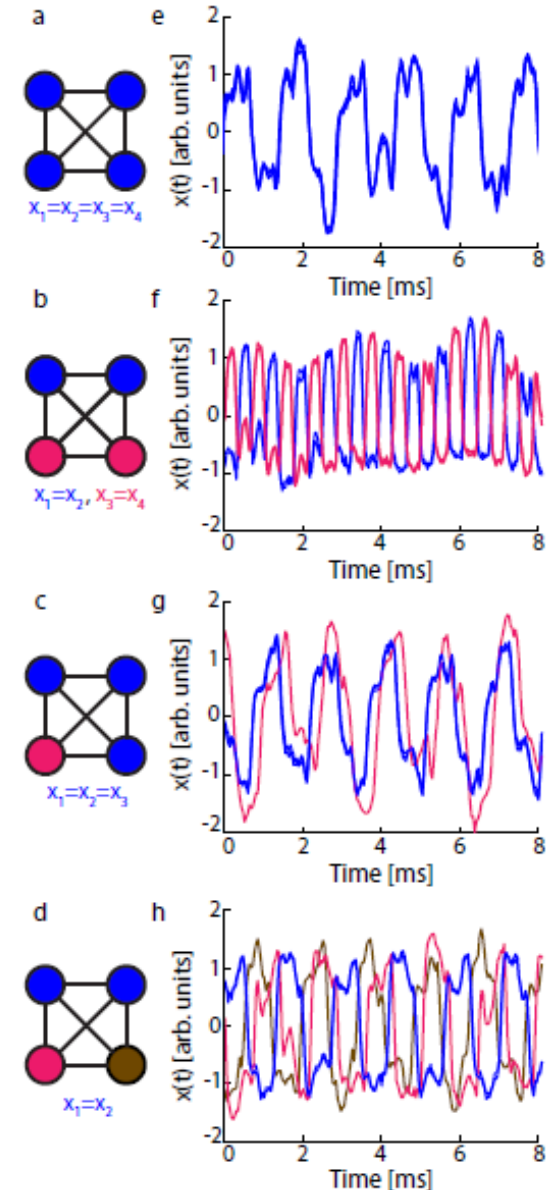
Cada nodo: diodo laser acoplado con fibra óptica cuya luz pasa a través de un modulador y es convertido en una señal eléctrica por un fotoreceptor.



Cada nodo tiene una retro-alimentación con retardo temporal  $\tau_f$  es acoplado con todos los otros nodos con retardo  $\tau_c$

Líneas rojas: conexiones ópticas.

Líneas negras: conexiones electrónicas.



sincronización

clusters

clusters

quimera



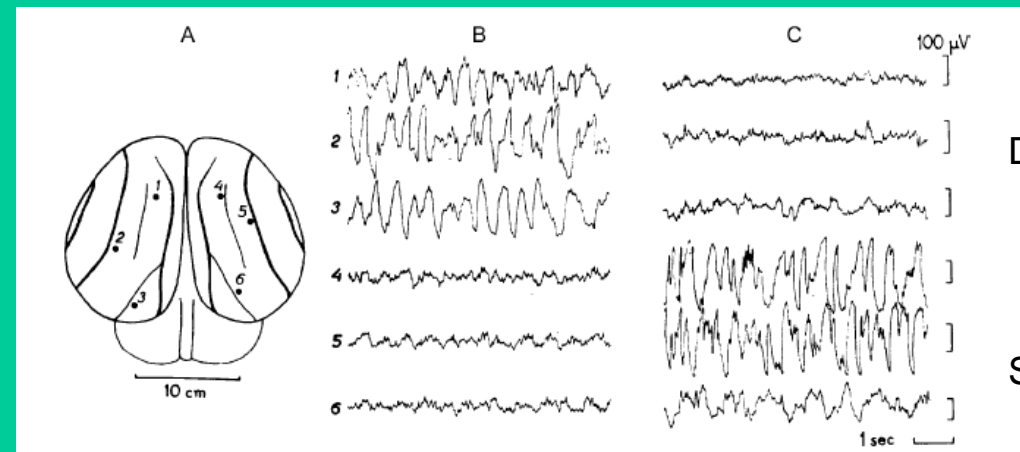
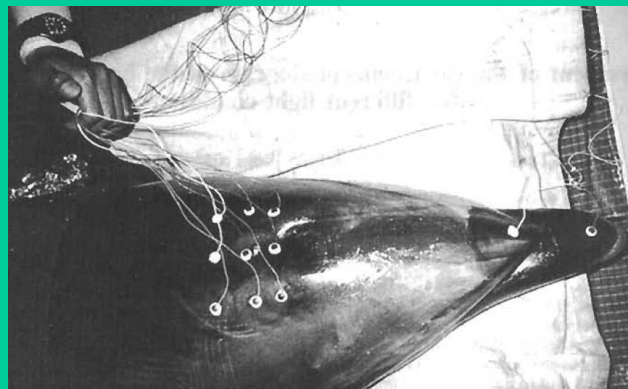
# Sueño unihemisférico

- ❖ En mamíferos y aves, el sueño se asocia a dos estados fisiológicos del cerebro reflejados en un EEG: REM y ondas lentas.
- ❖ En el sueño unihemisférico se observan ondas lentas sincronizadas en un hemisferio cerebral, asociadas al sueño, y actividad desincronizada asociada a la vigilia, en el otro.
- ❖ Ventaja evolutiva: vigilancia por depredadores, sueño durante migraciones, control de respiración (cetáceos).



➤ N. C. Rattenborg, C. J. Almaner, *J. Neuro. Behiv. Rev.* **24**, 817 (2000).

Sueño unihemisférico en delfines.



- ❖ Sueño unihemisférico ha sido relacionado con estado quimérico modelos de 2 poblaciones acopladas de neuronas.



# Caracterización de estados quiméricos y clusters dinámicos

En la práctica,  $i, j$  pertenecen a un cluster si  $|x_t^i - x_t^j| < \delta$   $\delta$  pequeño definido,

Fracción de elementos pertenecientes a algún cluster en tiempo  $t$ :

$$p_t = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \Theta(|x_t^i - x_t^j| - \delta) \quad \Theta(x) = 0, \text{ if } x < 0 \text{ and } \Theta(x) = 1, \text{ if } x \geq 0$$

Desviación standard (dispersión) en el tiempo  $t$ :

$$\sigma_t = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_t^i - \bar{x}_t)^2 \right]^{1/2} \quad \bar{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_t^j$$

$p, \sigma$  = promedios temporales asintóticos de valores  $p_t, \sigma_t$ , después de  $T$  transitorios, para una realización de condiciones iniciales.

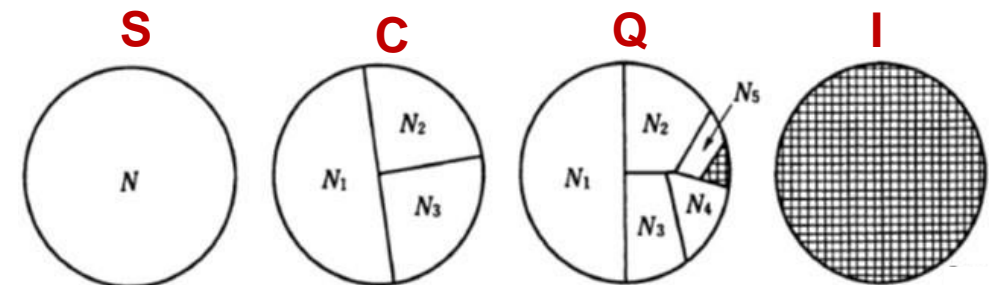
$\langle p \rangle, \langle \sigma \rangle$  = promedios sobre muchas realizaciones de condiciones iniciales aleatorias.

$\langle p \rangle = 1, \langle \sigma \rangle = 0$ : sincronización (**S**)

$\langle p \rangle = 1, \langle \sigma \rangle > 0$ : clusters (**C**)

$p_{\min} < \langle p \rangle < 1$ : quimera (**Q**)

$\langle p \rangle = 0, \langle \sigma \rangle > 0$ : incoherente (**D**)







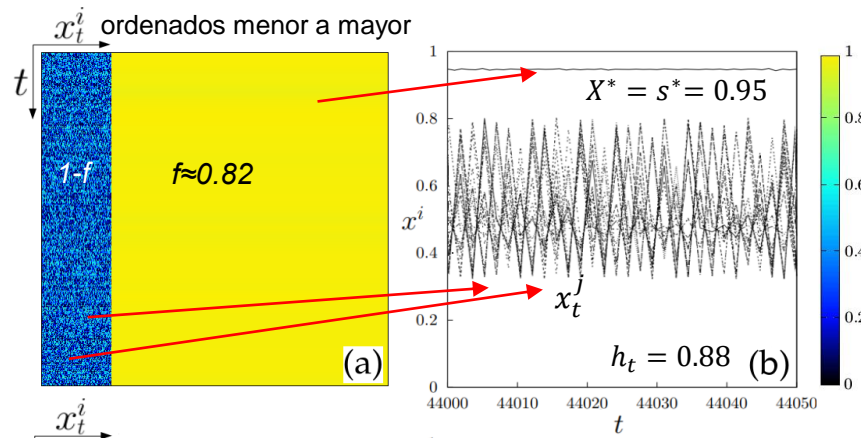
# Estados quiméricos con campo medio constante

Red de mapas caóticos globalmente acoplados:

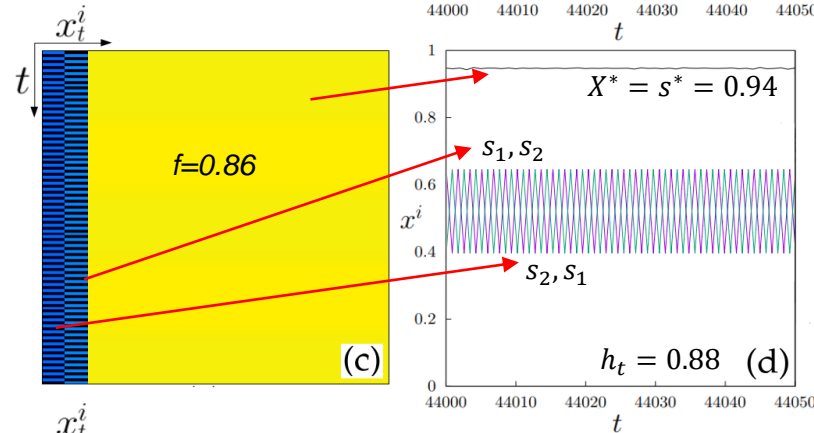
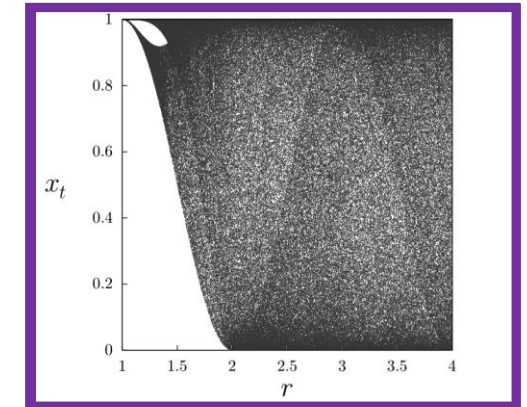
$$x_{t+1}^i = (1 - \varepsilon)f(x_t^i) + \varepsilon h_t, \quad h_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j)$$

mapa local con caos robusto:

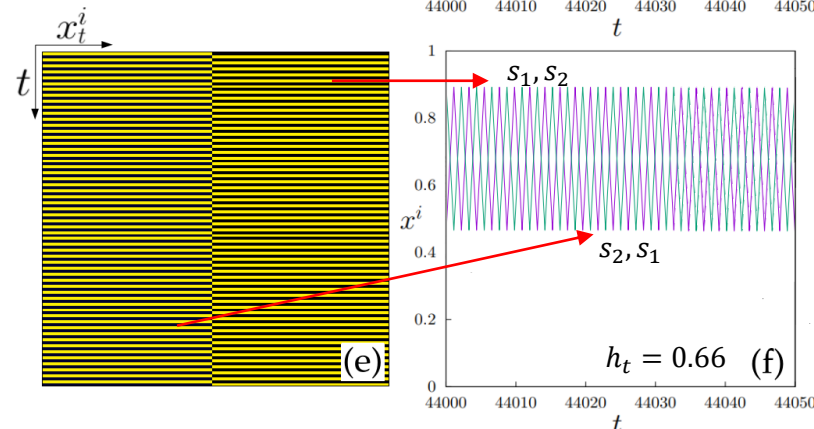
$$x_{t+1} = f(x_t) = \sin^2(r \sin^{-1}(\sqrt{x_t}))$$



(a-b) Estado quimérico dinámico asimétrico:  
1 subset en punto fijo  
+ 1 subset desincronizado caótico  
 $h_t = \text{cte}$



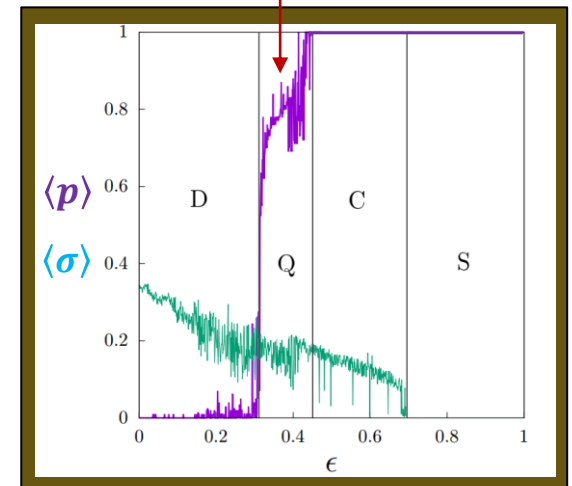
(c-d) Estado periódico asimétrico de 3 clusters:  
2 clusters de periodo-2, fuera de fase e igual tamaño  
+ 1 cluster en punto fijo  
 $h_t = \text{cte}$



(e-f) Estado simétrico de cluster periódicos:  
2 clusters de periodo-2, fuera de fase e igual tamaño.  
 $h_t = \text{cte}$

$r=3.5$  fijo  
50 realizaciones  
para cada valor  
 $\langle p \rangle, \langle \sigma \rangle$

quimeras viven entre clusters e incoherencia



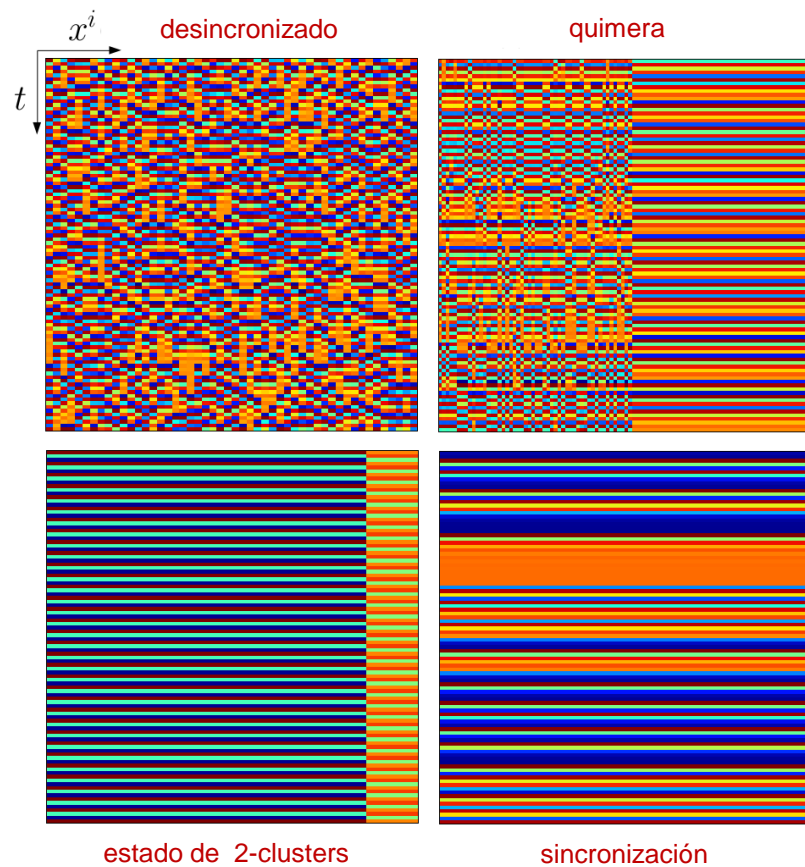


# Quimeras caóticas

Red de mapas caóticos globalmente acoplados:

$$x_{t+1}^i = (1 - \varepsilon) f(x_t^i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j)$$

Ordering:  $i < j$  if  $x_t^i < x_t^j$ , for  $t > T$



$N = 100$  para visualización  
 $b = 0.5$  fijo  
 $T = 2 \times 10^5$  transitorios

distintos valores de  $\varepsilon$

$$f(x) = \frac{1 - b^{x(1-x)}}{1 - b^{1/4}}, \quad x \in [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

mapa diferenciable con caos robusto para  $b \in [0, 1]$

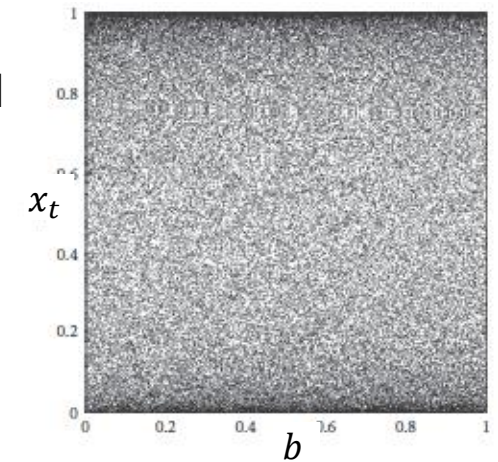
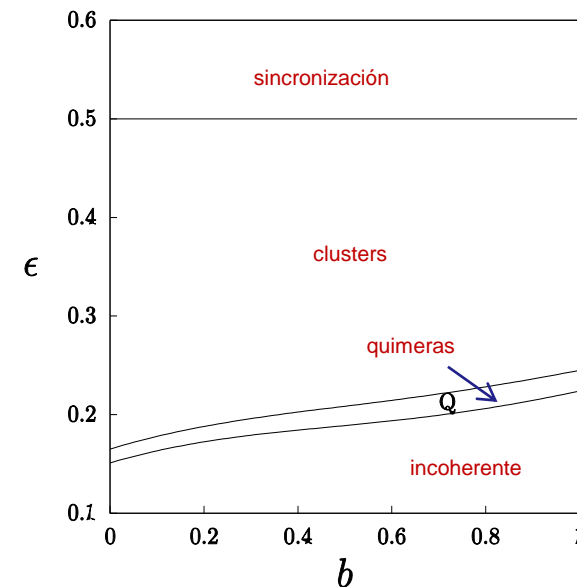


Diagrama de fases





# Estados quiméricos en modelo de dos sociedades acopladas

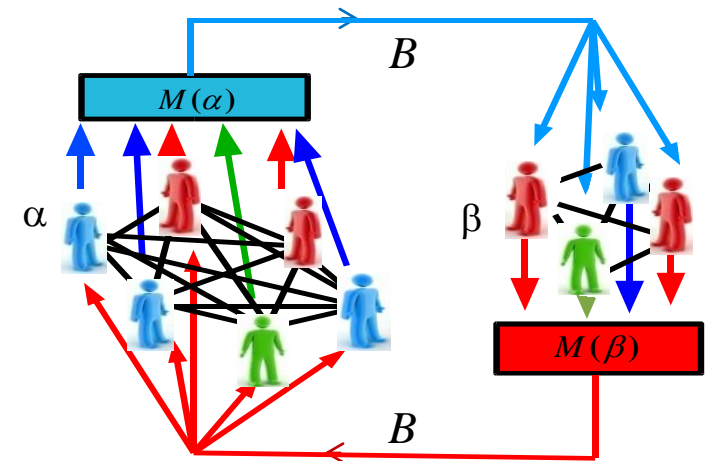
Dos poblaciones  $\alpha$  y  $\beta$  con tamaños  $N_\alpha$  y  $N_\beta$ , tales que  $N_\alpha + N_\beta = N$   
Cada población: red completamente conexas (todos con todos).

Estado de agente  $i \in \alpha$  está dado por un vector  $F$ -componentes (modelo de interacción cultural de Axelrod):

$$x_i(\alpha) = (\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^F) \quad \text{Similarmente, } j \in \beta \rightarrow x_j(\beta)$$

Campo global de  $\alpha$ :  $M(\alpha) = (M^1, M^2, \dots, M^F)$

$M^f(\alpha) =$  Moda estadística de los estados en  $\alpha$ , en un tiempo dado:  
vector con  $f$ -componente más abundante de vectores  $x_i(\alpha)$ ,  $\forall i$



$B \in [0, 1]$ : parámetro de intensidad de campos globales; probabilidad.

### Interacción agente-campo con probabilidad $B$ :

- probabilidad interacción = similitud entre  $x_i(\alpha)$ ,  $M(\beta)$
- $i$  adopta un atributo no compartido de  $M(\beta)$

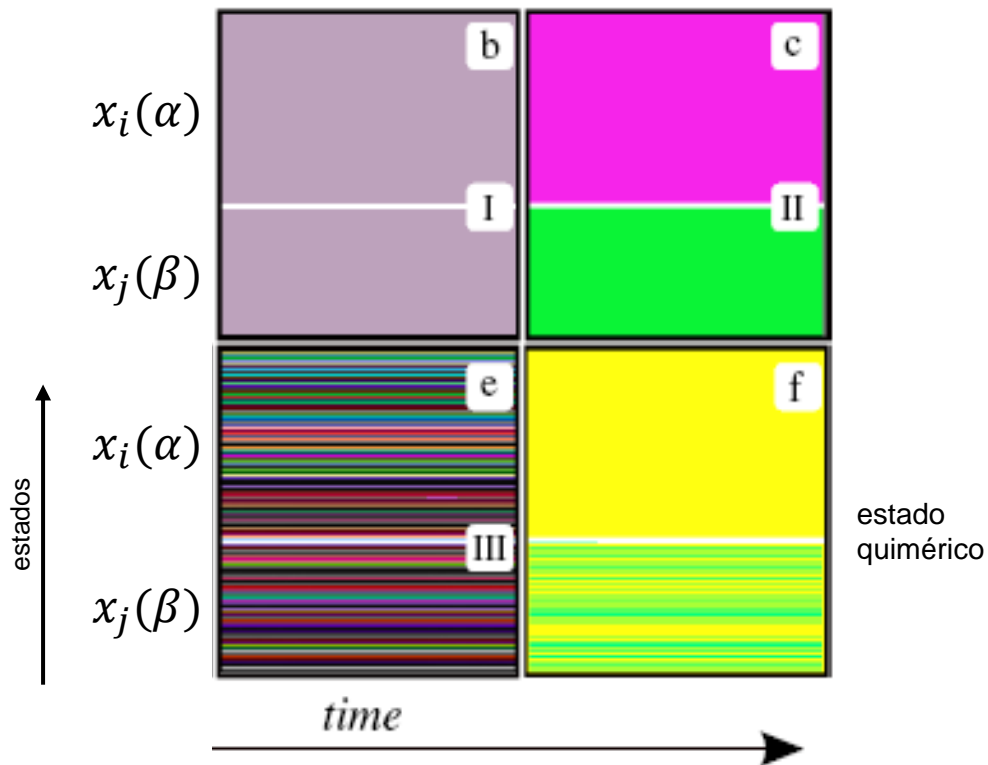
### Interacción agente-agente con probabilidad $1-B$ :

- probabilidad interacción = similitud entre  $x_i(\alpha)$ ,  $x_j(\alpha)$
- $i$  adopta un atributo no compartido de  $j$



# Estados quiméricos en dinámica social

$$N^\alpha = 0.6N, \quad N^\beta = 0.4N, \quad F = 5$$



## Estados colectivos variando $B, q$ :

- (b) Ambas poblaciones en mismo estado homogéneo (coherente).
- (c) Ambas poblaciones en estado homogéneo, pero distinto.
- (e) Ambas poblaciones en estado desordenado (incoherentes).
- (f) Una población en estado coherente, otra incoherente.  
→ **Coherencia localizada: estado quimérico en dinámica social.**

➤ JC González-Avella, MG Cosenza, M San Miguel, Physica A, 399, 24 (2014).

Estados colectivos con 2 poblaciones ocurren también con dinámica de opinión de Deffuant  
→ condición de umbral de interacción es importante.



<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongaphysics



Latin American alliance for  
Capacity buildiNG in Advanced physics

**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.