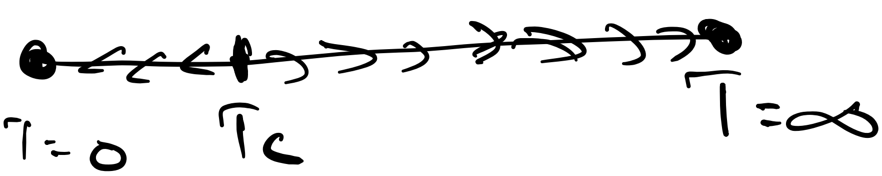
Modelo con varios parámetros

Cada punto fijo → punto crítico.
o trivial.
(por ejemplo para Ising en $D \geq 2$)



Para cada punto crítico no trivial
→ acción S_c
contiene campos $\Phi_i(\vec{r})$ de dimensión
x_i representan cantidades físicas
locales.

Producto de operadores
O.P.E.

$$\Phi_i(\vec{r})\,\Phi_j(\vec{r}') \xrightarrow[|\vec{r}-\vec{r}'|\to 0]{} \sum_k \frac{C_{ijk}\,\Phi_k(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{x_i+x_j-x_k}}$$

Si se sale de el punto P
$$S_c \to S_c - \int d\vec{r} \sum_i a^{x_i - D} g_i \Phi_i(\vec{r})$$

$$\frac{dg_k}{dl} = (d - x_k)\, g_k - \frac{1}{2} S_d \sum_{ij}{}' C_{ijk}\, g_i g_j$$

si $g_i \to \frac{2}{S_d} g_i$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dg_k}{dl} = (d - x_k)\, g_k - \frac{1}{2} \sum_{ij}{}' C_{ijk}\, g_i g_j + O(g^3)}$$

si se consigue un nuevo punto fijo dado por $g_i^* \to p^*$

el flujo alrededor de p^*

$$g_i = g_i^* + \delta g_i$$

$$\frac{d}{dl}\begin{pmatrix} \delta g_1 \\ \delta g_2 \\ \vdots \\ \delta g_N \end{pmatrix} = M^* \begin{pmatrix} \delta g_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta g_N \end{pmatrix}$$

$$M^{*}_{ij} = (d - x_i)\,\delta_{ij} - \sum_{l} C_{lji}\, g^{*}_{l}$$

obs importante

S_c acción de un punto crítico

$\Phi_1 \ldots \Phi_n$ campos.

perturbo a S_c con Φ_1

pero si $\Phi_1 \Phi_1 \to \Phi_2$

$\to$ para el R.G. hay que poner como perturbación al Φ_2

y luego si $\Phi_1 \Phi_2 \to \Phi_4$

$\to$ hay que poner el Φ_4 también etc.

$\to$ hay que poner todos los campos

generados por Φ_1 !

ejemplo

$$S_c = \int d\vec{r} \left[\frac{c}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 \right]$$

$$S_c \to S_c + \int d\vec{r}\; a_6 \phi^6$$

$$\Phi_1(\vec{r}) = \phi^6(\vec{r})$$

$$\phi^6(\vec{r})\,\phi^6(\vec{r}) \to \phi^2, \phi^4, \phi^6, \phi^8, \dots$$

obs ϕ^6 tiene la simetría $\phi \to -\phi$

$\Rightarrow \phi^6$ no va a generar ϕ^3, ϕ^5 etc...

Para las teorías inv. de escala a invariantes por R.G. (Polyakov 1969-70)

$\Phi_i(\vec{r}) \to \dim x_i$

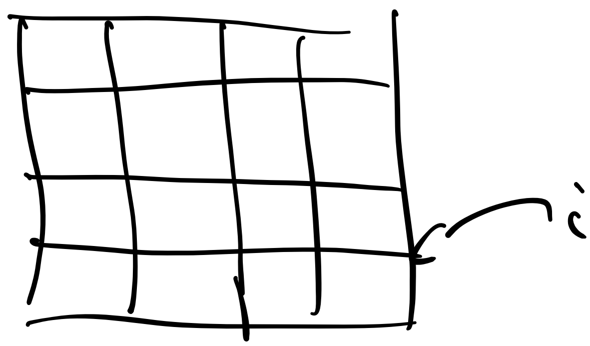
$$\langle \Phi_i(\vec{r}_1)\,\Phi_j(\vec{r}_2)\rangle = \frac{\delta_{x_i,x_j}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^{2x_i}}$$

$$\langle \Phi_i(\vec{r}_1)\,\Phi_j(\vec{r}_2)\,\Phi_k(\vec{r}_3)\rangle = \frac{C_{ijk}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^{x_i+x_j-x_k}\,|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^{x_j+x_k-x_i}\,|\vec{r}_1-\vec{r}_3|^{x_i+x_k-x_j}}$$

VII El modelo "XY" en 2-D

a) Comportamiento a bajas temperaturas

red cuadrada



$$\bar{S}_i = S_i^x \bar{e}_x + S_i^y \bar{e}_y = \cos\theta_i \bar{e}_x + \sin\theta_i \bar{e}_y$$

$$\|\bar{S}_i\| = 1 \quad \forall i$$

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \bar{S}_i \cdot \bar{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)$$

$J > 0$

$$Z = \int_0^{2\pi} \prod_i d\theta_i \, e^{-\beta H}$$

$$= \int_0^{2\pi} \prod_i d\theta_i \, e^{\frac{J}{k_B T} \sum_{\langle ij \rangle}^{f} \cos(\theta_i - \theta_j)}$$

Convergemos con el límite de bajas temperaturas $T \to 0$

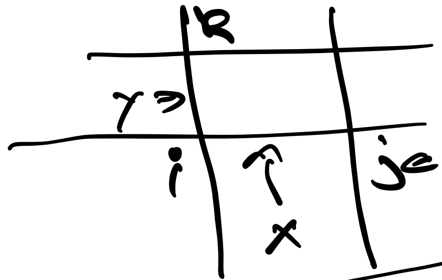
$\Rightarrow$ hay que maximizar todos los

$\cos(\theta_i - \theta_j) \Rightarrow \theta_i \simeq \theta_j$

($\Rightarrow$ todos los espines son casi paralelos)

$\Rightarrow \theta_i - \theta_j \ll 1$

$$\boxed{\cos(\theta_i - \theta_j) = 1 - \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_j)^2 + \ldots}$$



$\theta_j - \theta_i \equiv \Delta_x \theta_i$

$$\boxed{\cos(\theta_i - \theta_j) = 1 - \frac{(\Delta_\mu \theta_i)^2}{2} + \dots}$$

$\theta_i \to \theta(\vec{r}_i)$

$\theta_j \to \theta(\vec{r}_j)$ pero $\vec{r}_j = \vec{r}_i + a\vec{e}_x$

$\theta_j \to \theta(\vec{r}_j) = \theta(\vec{r}_i + a\vec{e}_x)$

$$\theta(\vec{r}_j) \simeq \theta(\vec{r}_i) + a\frac{\partial}{\partial x}\theta(\vec{r}_i) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(\vec{r}_i) + \dots$$

$$\Delta_\mu \theta_i = \theta_j - \theta_i \simeq a\frac{\partial}{\partial x}\theta(\vec{r}_i) + O(a^2)$$

$$\boxed{\cos(\theta_k - \theta_i) \simeq 1 - \frac{(\Delta_y \theta_i)^2}{2} + \dots}$$

$$\sum_{\langle i,j\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j) \simeq -\sum_i \frac{1}{2}\left[(\Delta_x\theta_i)^2+(\Delta_y\theta_i)^2\right]$$

$$\Delta_x\theta_i \to a\,\frac{\partial}{\partial x}\theta(\vec{r})$$

$$\Delta_y\theta_i \to a\,\frac{\partial}{\partial y}\theta(\vec{r})$$

$$\sum_i \to \frac{1}{a^2}\int d\vec{r}$$

$$\sum_{\langle i,j\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j) \to -\frac{1}{2}\int d\vec{r}\,(\vec{\nabla}\theta(\vec{r}))^2$$

osea que

$$-\frac{J}{k_BT}\sum_{\langle i,j\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j) \to \frac{J}{2k_BT}\int d\vec{r}\,(\vec{\nabla}\theta)^2$$

$\to$ en el límite al continuo queda el modelo gaussiano invariante de escala!

→ hay una fase de bajas temperaturas invariante de escala!

b) Funciones de correlación

$$\langle \vec{S}(0)\cdot\vec{S}(\vec{r})\rangle \sim \langle e^{i\theta(0)} e^{-i\theta(\vec{r})}\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\langle(\theta(\vec{0})-\theta(\vec{r}))^2\rangle} = \underline{\underline{e^{G(\vec{r})-G(\vec{0})}}}$$

dónde $G(\vec{r}) = \langle \theta(\vec{r})\,\theta(\vec{0})\rangle$

$$G(\vec{r})-G(\vec{0}) = \frac{k_B T}{2\pi J}\int d^2k\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}-1}{k^2}$$

converge para $k\to 0$
pero diverge para $k\to\infty$

→ cut-off U.V. $\Lambda \sim \frac{1}{a}$

$$G(\vec{r}) - G(\vec{0}) = \frac{-T k_B}{2\pi J} \ln \frac{|\vec{r}|}{a}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{S}(0) \cdot \vec{S}(\vec{r}) \rangle \sim \langle e^{i\theta(0)} e^{-i\theta(\vec{r})} \rangle$$

$$\sim \left(\frac{a}{|\vec{r}|} \right)^{\frac{k_B T}{2\pi J}}$$

→ las funciones de correlación decaen algebraicamente con $|\vec{r}|$ con un exponente $\frac{k_B T}{2\pi J}$ que depende de T!

→ Quasi-Long-Range-Order

QLRO.

en 3-D, para $T < T_c$

$$\langle \vec{S}(0) \cdot \vec{S}(\vec{r}) \rangle \underset{|\vec{r}| \to \infty}{\sim} m^2 \neq 0$$

ojo ! esto es cierto solo para bajas temperaturas !

c) Los vórtices

Vórtices: son defectos topológicos

$\vec{S} = \cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\theta\, \vec{e}_y$

en el camino

$$\oint_C \vec{\nabla}\theta \cdot d\vec{\ell} = 2\pi m \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}$$

$$\vec{S} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\partial_\mu \vec{S} = (-\partial_\mu\theta \sin\theta, \partial_\mu\theta\cos\theta, 0)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\oint_C \sum_\mu \underbrace{\vec{S}\wedge\partial_\mu\vec{S}\cdot\vec{e}_z}_{\partial_\mu\theta} \cdot dl_\mu} = \underline{m}$$

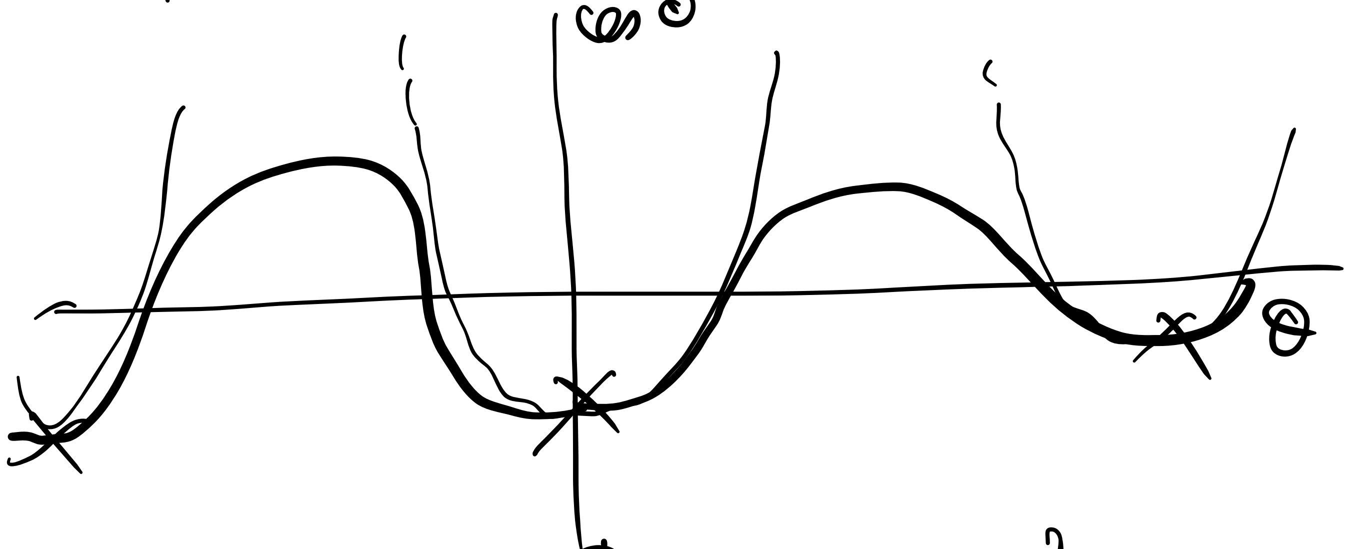
invariante topológico.

aquí m es la vorticidad.

si hay vórtices

→ hay un problema con

$$-\cos(\Delta_\mu \theta_i) \simeq -1 + \frac{1}{2}(\Delta_\mu \theta_i)^2 + \dots$$



$$-\cos(\Delta_\mu \theta_i) \simeq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(\Delta \theta_i - 2\pi n)^2$$

$$\tilde{\beta} = \frac{J}{k_B T}$$

$$e^{\tilde{\beta}\cos(\theta_i - \theta_j)}$$

$e^{\tilde{\beta}\cos(\theta)}$ para $\theta \in [0, 2\pi[$

$$e^{\hat{\beta}\cos(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} I_n(\hat{\beta})$$

$$I_n(\hat{\beta}) = \int_0^{2\pi} e^{\tilde{\beta}\cos(\theta)} e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$\hat{\beta} \to \infty$

$$I_n(\tilde{\beta}) \xrightarrow[\hat{\beta}\to\infty]{} e^{\tilde{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\beta}}} e^{-\frac{n^2}{2\hat{\beta}}}$$

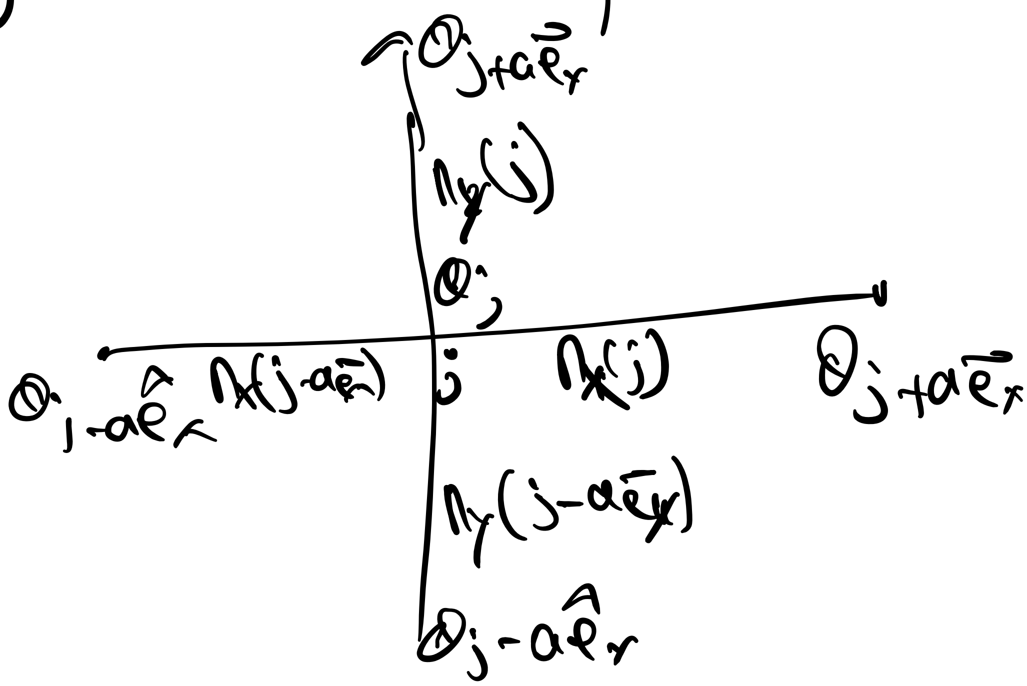
$$e^{\hat{\beta}\cos\theta} \xrightarrow[\hat{\beta}\to\infty]{} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} e^{-\frac{n^2}{2\hat{\beta}}} \frac{e^{\tilde{\beta}}}{\sqrt{2\pi\hat{\beta}}}$$

Como

$$Z = \int_0^{2\pi} \prod_i d\theta_i \, e^{\beta \sum_{i,\mu} \cos(\Delta_\mu \theta_i)}$$

$$\to \text{cte} \int_0^{2\pi} \prod_j d\theta_j \sum_{\{n_\mu\}=-\infty}^{+\infty} e^{i n_\mu \Delta_\mu \theta_j} \, e^{-\frac{n_\mu^2}{2\beta}}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} \, d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$



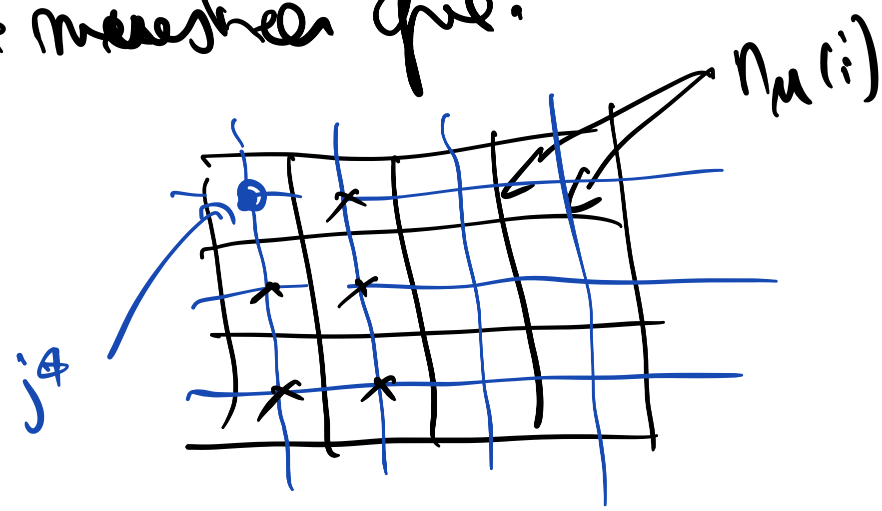
hay que pedir que

$$n_x(j) - n_x(j - a\hat{e}_x) + n_y(j) - n_y(j - a\hat{e}_y) = 0$$

"$\nabla \cdot \vec{n} = 0$"

Condición de los n_μ

Se muestra que.



j^* puntos de la red dual.

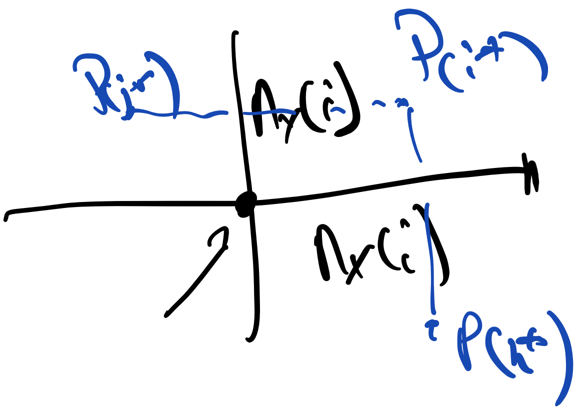
ni, a cada punto de la red dual se le atribuye un número entero

$$P(j^*) \to \Delta_\mu P(j_*)$$

Se muestra que

si $\boxed{n_\mu(i) = \sum_\nu \epsilon_{\mu\nu} \Delta_\nu P(j^*)}$

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = x, \nu = y \\ -1 & \text{si } \mu = y, \nu = x \\ 0 & \text{si } \mu = \nu \end{cases}$$



$$n_x(i) = P(i^*) - P(k^*)$$

$$n_y(i) = P(j^*) - P(i^*)$$

→ se satisface la condición de los n_μ

$$\underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

→ Transformación de dualidad

$$Z = \text{cte} \sum_{\{P(i^*)\}=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\beta} \sum_{i^*,\mu} (\Delta_\mu P(i^*))^2\right)}$$

Fórmula de Poisson.

Eg.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \, g(\varphi) \, e^{2\pi i m \varphi}$$

$$\Rightarrow Z = \text{cte} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j^*} d\varphi_{j^*} \sum_{\{m(j^*)\}=-\infty}^{\infty}$$

$$e^{-\frac{1}{2\beta} \sum_{j^*,\mu} (\Delta_\mu \varphi_{j^*})^2 + 2\pi i \sum_{j^*} m(j^*) \varphi_{j^*}}$$

1ra aproximació:

considerem únicament

los $n(j^\alpha) = 0, \pm 1$

$$Z \simeq \text{ctc} \int \prod_{j^\alpha} d\varphi_{j^\alpha} \, e^{-\frac{1}{2\hat{\beta}} \sum_{j^\alpha, \mu} (\partial_\mu \varphi_{j^\alpha})^2}$$

$$\Big(1 + \sum_{j^\alpha, k^\alpha}' e^{2\pi i \varphi_{j^\alpha}} e^{-2\pi i \varphi_{k^\alpha}}$$

$$+ \sum_{j^\alpha, h^\alpha, \ell^\alpha, n^\alpha}' e^{2\pi i \varphi_{j^\alpha}} e^{2\pi i \varphi_{h^\alpha}} e^{-2\pi i \varphi_{\ell^\alpha}} e^{-2\pi i \varphi_{n^\alpha}}$$

$$+ \ldots \Big)$$

$$\Rightarrow Z \simeq \text{cte} \int \prod_{j\alpha} d\varphi_{j\alpha}$$

$$e^{-\frac{1}{2\beta}\sum (\Delta_\mu \varphi_{j\alpha})^2 + \lambda \sum_{j\alpha}\left(e^{2\pi i\varphi_{j\alpha}} + e^{-2\pi i \varphi_{j\alpha}}\right)}$$

→ límite del continuo.

$$Z = \int D\varphi(\vec{r})\, e^{-\frac{1}{2\beta}\int d\vec{r}\left[(\vec{\nabla}\varphi)^2 + g\cos(2\pi\varphi(\vec{r}))\right]}$$

vortices

acción de Sine-Gordon.

→ análisis por R.G.

¿cuál es la dimensión de escala de g?

$$\langle e^{i2\pi\varphi(0)}\, e^{-i2\pi\varphi(\vec{r})}\rangle \sim \frac{1}{|\vec{r}|^{2\pi\beta}}$$

$$\left[\cos(2\pi\,\varphi(\vec{r}))\right] = L^{-\pi\hat{\beta}}$$

$$\Rightarrow [g] = L^{\pi\hat{\beta}-2}$$

R.G.

$$\frac{dg}{d\ell} = (2-\pi\hat{\beta})\,g + \mathcal{O}(g^2)$$

g es relevante si $2-\pi\hat{\beta} > 0$

$$\Rightarrow 2-\frac{\pi S}{k_B T} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T > \frac{\pi S}{2k_B} = T_{B.K.T}}$$

si $T > T_{B.K.T}$ $\rightarrow$ los vortices van a ser cada vez más importantes a grandes escalas!

0 $\qquad T_{BKT} \qquad T$

los vórtices no son importantes → resultado ~~abrumito~~ entre acción invariante de escala.

vórtices son importantes

$$\langle \vec{S}(0)\cdot\vec{S}(\vec{r})\rangle \sim e^{-|\vec{r}|/\xi}$$

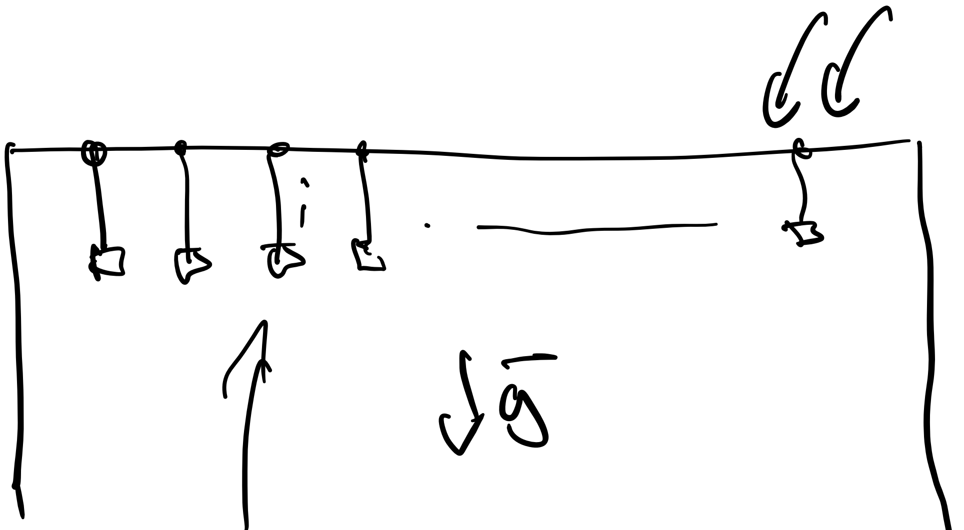
donde ξ longitud de correlación ~ espacio promedio entre vórtices.

$$\int d\vec{r}\,\Big[(\vec{\nabla}\varphi)^2 + g\,\underline{\cos(2\pi\varphi)} + g_4\cos(4\pi\varphi) + g_6\cos(6\pi\varphi) + \dots\Big]$$

$$\boxed{-\Delta\varphi + m^2 \sin(2\pi\varphi) = 0}$$

$$(-\Delta\varphi + 2\pi\varphi) = 0$$

K.G.



$\theta_i \to \theta(x)$