Módulo de Teoría:
Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL
Universidad Antonio Nariño

27/01/2022

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Formulación Lagrangiana

Campos $\phi_a(t, \vec{x}) = \phi_a(x), \qquad a = 1, 2, \ldots, N$

Acción S y Lagrangiano $\mathcal{L}$: $S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a)$

Localidad: $\mathcal{L}$ depende de ϕ_a y $\partial_\mu \phi_a$ evaluados en el mismo punto del espacio tiempo

Ecuaciones de movimiento: $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0$

Ejemplo campo escalar real ϕ : $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$

Ec. de Klein-Gordon: $\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$

Invariancia de Lorentz

Dos observadores *A* y *B* con coordenadas x^μ y $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \, x^\nu$
deben observar las mismas ecuaciones de movimiento (eom)
(en realidad se requiere invariancia de Poincaré $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \, x^\nu + a^\mu$
como las translaciones son sencillas, nos concentramos en las transformaciones de Lorentz.)

Las transformaciones de Lorentz tienen una representación en los campos
→ e.g. campo escalar $\phi(x)$ transforma como $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi\left(\Lambda^{-1} x\right)$

Significado: El campo transformado en el punto transformado
= campo original en el punto antes de transformar, i.e. $\phi'(x') = \phi(x)$

Para campos con índices, la regla incluye la representación de Lorentz
e.g. campo vectorial $A^\mu(x)$: $A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu \, A^\nu \left(\Lambda^{-1} x\right)$

Invariancia de Lorentz

¿Cómo garantizar que *A* y *B* con coordenadas x^μ y $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ observen las mismas eom?

→ Imponiendo que *S* sea invariante, lo cual se cumple si $\mathcal{L}$ transforma como escalar
i.e. $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}\left(\Lambda^{-1}x\right)$, o equivalentemente $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$ [excepto por una derivada total]

Demostración: $$S' = \int d^4x'\, \mathcal{L}'(x') = \int d^4x\, \mathcal{L}(x) = S$$ $$\left[\det\Lambda = 1 \quad \to \quad \int d^4x' = \int d^4x\right]$$

Ejemplo: Campo escalar real ϕ, $\phi'(x') = \phi(x)$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \qquad \to \qquad \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi = 0$$

$$\partial'_\mu\partial'^\mu\phi'(x') = \eta_{\mu\nu}\partial^{\mu\prime}\partial'^\nu\phi'(x') = \eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\alpha\Lambda^\nu_\beta\partial^\alpha\partial^\beta\phi(x) = \eta_{\alpha\beta}\partial^\alpha\partial^\beta\phi(x) = \partial_\beta\partial^\beta\phi(x)$$

$$\to \qquad \partial'_\mu\partial'^\mu\phi'(x') + m^2\phi'(x') = \partial_\mu\partial^\mu\phi(x) + m^2\phi(x) = 0$$

Similarmente, $\partial'_\mu\phi'(x')\partial'^\mu\phi'(x') = \partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) \qquad \to \qquad \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$

$$\left[\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta} \qquad \left(\Lambda^{-1}\right)^\alpha{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\alpha \qquad \eta^{\mu\nu}\Lambda^\sigma{}_\mu\Lambda^\rho{}_\nu = \eta^{\sigma\rho} \qquad \partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha\partial^\alpha\right]$$

Cada simetría continua de $\mathcal{L}$ da lugar a una corriente conservada j^μ

i.e. las eom implican $\partial_\mu j^\mu = 0$, equivalente a $\partial_0 j^0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$ $\left[j^\mu = (j^0, \vec{j})\right]$

Corriente j^μ conservada → carga *Q* conservada (independiente del tiempo)

$$Q \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, j^0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \partial_0 j^0 = -\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \left[\text{asumiendo} \quad \vec{j} \to 0 \quad \text{en} \quad |\vec{x}| \to 0\right]$$

Simetría continua significa parámetros continuos → transformación infinitesimal

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \alpha\,\Delta\phi(x)$$

α infinitesimal

Es una simetría si deja las eom invariantes, i.e. si *S* es invariante, y a su vez si $\mathcal{L}$ es invariante

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \alpha\,\Delta\mathcal{L}(x)$$

siendo $\Delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \mathcal{F}^\mu$ una derivada total

Simetrías y Teorema de Noether

$$\Delta\mathcal{L}(\phi,\,\partial_\mu\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\Delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta(\partial_\mu\phi) = \underbrace{\cancel{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]}}_{\text{se anula por las eom}}\Delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right) = \partial_\mu\mathcal{F}^\mu$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - \mathcal{F}^\mu\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad j^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi - \mathcal{F}^\mu$$

Para varios campos: $$j^\mu \equiv \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\Delta\phi_a - \mathcal{F}^\mu$$

Ejemplo: Campo escalar complejo

$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$ simetría *U(1)* global: $\phi \to e^{i\,\alpha}\,\phi\,, \quad \phi^* \to e^{-i\,\alpha}\,\phi^* \qquad \alpha$ constante

$$\phi \to e^{i\,\alpha}\,\phi = (1 + i\,\alpha + \cdots)\phi \qquad \to \qquad \Delta\phi = i\,\phi \quad \text{y} \quad \Delta\phi^* = -i\,\phi^*$$

Tarea:

→ demostrar que existe una corriente de Noether conservada asociada a la simetría *U(1)* global

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \qquad \text{donde} \qquad j^\mu = i\,(\phi\,\partial^\mu\phi^* - \phi^*\,\partial^\mu\phi)$$

NB: Al acoplar con A_μ habrá un término $A_\mu j^\mu$ en $\mathcal{L}$

Simetrías y Teorema de Noether

Ejemplo: Invariancia ante translaciones y tensor energía-momento

$$x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu \,, \qquad \phi_a(x) \to \phi_a(x+\epsilon) = \phi_a(x) + \epsilon^\mu\,\partial_\mu\phi_a(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

De la misma forma: $\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \epsilon^\mu\,\partial_\mu\mathcal{L}(x)\,, \quad \text{notar que} \quad \epsilon^\nu\partial_\nu\mathcal{L}(x) = \epsilon^\nu\partial_\mu(\mathcal{L}\,\delta^\mu_\nu) \quad \to \quad \mathcal{F}^\mu_\nu = \mathcal{L}\,\delta^\mu_\nu$

Existen 4 corrientes de Noether asociadas a las 4 translaciones en *t* y $\vec{x}$

$$j^\mu = \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\Delta\phi_a - \mathcal{F}^\mu \qquad \to \qquad (j^\mu)_\nu = \sum_a \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\nu\phi_a - \mathcal{L}\,\delta^\mu_\nu \equiv T^\mu_\nu$$

→ T^μ_ν es el tensor energía-momento, satisface $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$

4 cargas conservadas: $H = \int d^3x\, T^{00}\,, \quad P^i = \int d^3x\, T^{0i}$

Tarea: Para $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ demostrar que

$$\begin{cases} H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \\ P^i = \int d^3x\, \dot{\phi}\,\partial^i\phi \end{cases}$$

Formulación Hamiltoniana

- Momento conjugado de $\phi_a(x)$: $\pi^a(x) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}$
- Densidad Hamiltoniana $\mathcal{H} = \pi^a(x)\,\dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(x)$ → depende de ϕ_a y π^a
- Hamiltoniano $H = \int d^3\vec{x}\,\mathcal{H}$
- Ecuaciones de movimiento $\dot{\phi}_a(t,\,\vec{x}) = \dfrac{\partial H}{\partial \pi^a(t,\,\vec{x})}\,, \qquad \dot{\pi}^a(t,\,\vec{x}) = -\dfrac{\partial H}{\partial \phi_a(t,\,\vec{x})}$

Ejemplo, campo escalar real ϕ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\,, \qquad \pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

$$H = \int d^3\vec{x}\left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]$$

Interludio matemático

Interludio matemático

Transformadas de Fourier

- 3D: $$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\, e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}\, \tilde{f}(\vec{p})\,, \qquad \tilde{f}(\vec{p}) = \int d^3\vec{x}\, e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}\, f(\vec{x})$$

[a veces se omite la tilde!]

- Minkowski: $$f(x) = \int \frac{d^4\vec{p}}{(2\pi)^4}\, e^{i\,x\cdot p}\, \tilde{f}(p)\,, \qquad \tilde{f}(p) = \int d^4x\, e^{-i\,x\cdot p}\, f(x)$$

Delta de Dirac

- 1D: $$\int dx\,\delta(x) = 1\,, \qquad \delta(x) = \int \frac{dp}{(2\pi)}\, e^{i\,x\,p}$$

- 3D: $$\int d^3\vec{x}\,\delta^{(3)}(\vec{x}) = 1\,, \qquad \delta^{(3)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\, e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

Cuantización del campo escalar libre

Klein-Gordon como osciladores armónicos

Mecánica cuántica $\quad q,\, p,\, H \quad \rightarrow \quad \text{operatores}$

En QFT $\quad \phi,\, \pi,\, H \quad \rightarrow \quad \text{operatores}$ → ¿Espectro de *H* con infinitos grados de libertad?

Para el campo libre es posible desacoplar los grados de libertad!

Transformada de Fourier de $\phi(t,\, \vec{x})$

$$\phi(t,\, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\, e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}\, \phi(t,\, \vec{p}) \qquad [\phi^*(t,\, \vec{x}) = \phi(t,\, \vec{x})\,, \qquad \phi^*(t,\, \vec{p}) = \phi(t,\, -\vec{p})]$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \phi(t,\, \vec{p})}{\partial t^2} + \underbrace{\left[\vec{p}^{\,2} + m^2\right]}_{\omega_{\vec{p}}^2} \phi(t,\, \vec{p}) = 0 \qquad \left[\text{análogo a} \quad \ddot{q} + \omega^2\, q = 0\right]$$

para cada valor de $\vec{p}$, $\phi(t,\, \vec{p})$ resuelve la eom de un oscilador armónico de frecuencia $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$

Cada modo de Fourier es un oscilador *independiente*, con frecuencia $\omega_{\vec{p}}$

Cuantización canónica

Se comienza en la representación de Schödinger, con $\phi(\vec{x})$ y $\pi(\vec{x})$ independientes de *t*

$$[q_a,\, p^b] = i\,\delta_a^b\,, \qquad [q_a,\, q_b] = [p^a,\, p^b] = 0 \qquad \text{se generalizan a}$$

$$[\phi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\,, \qquad [\phi(\vec{x}),\, \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = 0$$

En la expansión de Fourier de $\phi(\vec{x})$ y $\pi(\vec{x})$ los modos de Fourier se tratan como osciladores de frecuencia $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$, con sus propios $a_{\vec{p}}$ y $a_{\vec{p}}^\dagger$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left[a_{\vec{p}}\,e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger\,e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}\right] \qquad \left[\text{análogo a } q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a+a^\dagger\right)\right]$$

$$\pi(\vec{x}) = -i\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}\left[a_{\vec{p}}\,e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} - a_{\vec{p}}^\dagger\,e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}\right] \qquad \left[\text{análogo a } p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a-a^\dagger\right)\right]$$

$$\to \quad \phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\left(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger\right)\,e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}\,, \qquad \pi(\vec{x}) = -i\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}}\left(a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger\right)\,e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

$$[\text{cambiando } p \to -p \text{ y usando } \omega_{-\vec{p}} = \omega_{\vec{p}}]$$

Reglas de conmutación de $\phi(\vec{x})$ y $\pi(\vec{x})$ $\leftrightarrow$ reglas de conmutación de $a_{\vec{p}}$ y $a^\dagger_{\vec{p}}$

$$[a_{\vec{p}}\,,\, a_{\vec{p}'}] = [a^\dagger_{\vec{p}}\,,\, a^\dagger_{\vec{p}'}] = 0 \qquad \rightarrow \qquad [\phi(\vec{x}),\, \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = 0$$

$$[a_{\vec{p}}\,,\, a^\dagger_{\vec{p}'}] = (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \qquad \rightarrow \qquad [\phi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = i\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

En donde se usó

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} + a^\dagger_{-\vec{p}}\right) e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}, \qquad \pi(\vec{y}) = -i \int \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{2}} \left(a_{\vec{p}'} - a^\dagger_{-\vec{p}'}\right) e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}'}$$

$$[\phi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3\vec{p}\; d^3\vec{p}'}{(2\pi)^6} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{p}}}} \left([a^\dagger_{-\vec{p}}\,,\, a_{\vec{p}'}] - [a_{\vec{p}}\,,\, a^\dagger_{-\vec{p}'}]\right) e^{i\,(\vec{x}\cdot\vec{p}+\vec{y}\cdot\vec{p}')} = i\, \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[a_{\vec{p}},\, a^\dagger_{-\vec{p}'}] = (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\vec{p}+\vec{p}') \qquad \text{y} \qquad \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\, e^{i\,(\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{p}}$$

Tarea: comprobar todo esto!

Cuantización canónica

Hamiltoniano del campo de Klein-Gordon

$$H = \int d^3\vec{x} \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right]$$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} + a^\dagger_{-\vec{p}}\right) e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}, \qquad \pi(\vec{x}) = -i\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} - a^\dagger_{-\vec{p}}\right) e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

$$H = \int d^3x \int \frac{d^3\vec{p}\, d^3\vec{p}\,'}{(2\pi)^6} e^{i\,\vec{x}\cdot(\vec{p}+\vec{p}\,')} \left[-\frac{\sqrt{\omega_{\vec{p}}\,\omega_{\vec{p}\,'}}}{4} \left(a_{\vec{p}} - a^\dagger_{-\vec{p}}\right)\left(a_{\vec{p}\,'} - a^\dagger_{-\vec{p}\,'}\right) + \frac{m^2 - \vec{p}\cdot\vec{p}\,'}{4\sqrt{\omega_{\vec{p}}\,\omega_{\vec{p}\,'}}} \left(a_{\vec{p}} + a^\dagger_{-\vec{p}}\right)\left(a_{\vec{p}\,'} + a^\dagger_{-\vec{p}\,'}\right) \right]$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}\,,\, a^\dagger_{\vec{p}}\right] \right)$$

← Tarea: Comprobar esta ecuación
i.e. Eq. (2.31) de Peskin & Schroeder

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.