

Módulo de Teoría

Clase 9, 22-02-2022

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

UAN
UNIVERSIDAD NACIONAL



UN
UNIVERSIDAD NACIONAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

UNMSM



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Université de Paris

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

UNIVERSITÄT TUM

CNRS



DESY

ICTP



CLARA

DBACCESS

frontier x

Introducción a Teoría Cuántica de Campos

Programa del curso

- Semanas 1-4 – Nicolás Bernal
 - Temas básicos: relatividad especial, mecánica clásica, mecánica cuántica, teoría clásica de campos
 - Cuantización del campo escalar libre
 - Cuantización del campo escalar con interacciones
 - Reglas de Feynman y amplitudes
 - Regularización
- Semanas 5-6 – Anamaría Font
 - Renormalización
 - Ruptura espontánea de simetría

Bibliografía

- M. Peskin, D. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory.
- D. Tong, Lectures on Quantum Field Theory.
<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>
- A. Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell.
- M. Schwartz, Quantum Field Theory and the Standard Model.
- P. Ramond, Field Theory: A Modern Primer.
- M. Thomson, Modern Particle Physics.

Evaluación

- Tareas semanales

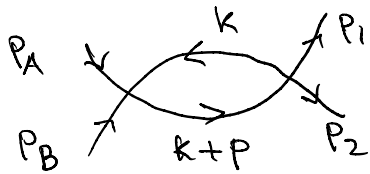
Horas de consulta vía Zoom

- N. Bernal (@nicolasbernal): miércoles, 2pm – 3pm COT
- A. Font (@afont): viernes, 10am – 11pm COT

Recap 2.0

Divergencias

$\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ en teoría $\lambda\phi^4$ a orden λ^2 incluye

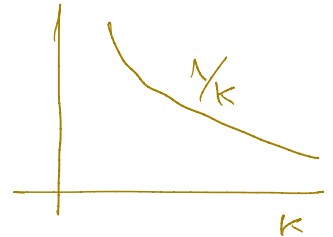


$$\propto \int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$P = p_A + p_B = p_1 + p_2$$

$$\rightarrow \int^{\infty} dk \, k^3 \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} = \int^{\infty} dk \frac{1}{k}$$

la integral diverge cuando $k \rightarrow \infty$
tiene divergencia ultravioleta (UV)
la divergencia es logarítmica



Grado de divergencia superficial D

diagrama genérico \rightarrow tipo de divergencia depende de



$$D = 4L - 2I$$

$L = \#$ de lazos, $I = \#$ de líneas internas
(bucles)

$$\mathcal{I}_F \propto \underbrace{\int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \dots \int d^4 k_L}_{\sim dk k^3 k^{4(L-1)}} \underbrace{\frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \dots \frac{1}{k_I^2 - m^2 + i\epsilon}}_{\sim \left(\frac{1}{k^2}\right)^\pm}$$

$$\mathcal{I}_F \sim \int dk k^{4L - 2I - 1}$$

$D < 0$ integral superficialmente
convergente, puede ser divergente

$$\mathcal{I}_F \sim \int dk k^{D-1}$$

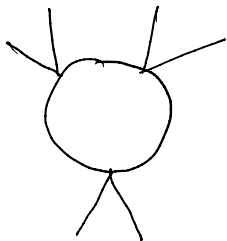
$D \geq 0$ integral divergente

$D=0$ div. logarítmica, $D=2$ div. cuadrática

Teorema de Weinberg

un diagrama es convergente si su grado de divergencia superficial, y el de todos sus subdiagramas, es negativo

Ejemplos

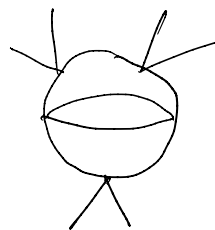


$$L=1, I=3$$

$$D=4L-2I=4-6=-2$$

convergente

no hay subdiagramas divergentes

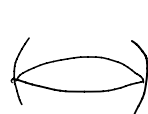


$$L=3, I=7$$

$$D=12-14=-2$$

$D < 0$ pero no es convergente

\exists subdiagrama divergente




$$L'=1, I'=2$$

$$D'=4-4=0$$

subdivergencia logaritmica

D en función de $V = \#$ de vértices, $E = \#$ de líneas externas




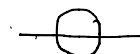
conservación de momento $\Rightarrow L = I - (V - 1)$

en $\lambda\phi^4$ vértice  $\Rightarrow 4V = E + 2I$

sustituyendo en $D = 4L - 2I \Rightarrow \boxed{D = 4 - E}$ ¡independiente de V !

oBS

- * diagramas con E impar se cancelan por simetría $\phi \rightarrow -\phi$
- * $E=0, D=4$ es la divergencia en la energía de vacío, no observable
- * quedan 2 tipos con $D \geq 0$ (divergentes)

$E=2, D=2$ 
e.g.   

divergencia cuadrática

$E=4, D=0$

e.g.   

divergencia logarítmica

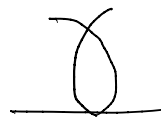
* $E > 4 \Rightarrow D = 4 - E < 0$ pero el diagrama puede ser divergente

e.g.



$$E = 6, D = 4 - 6 = -2$$

pero contiene



$$E' = 2$$

$$D' = 0$$

subdivergencia logarítmica

* $D = 4 - E$ independiente de V porque λ es adimensional

tarea 4, $L_{int} = -\frac{\lambda_5}{5!} \phi^5$, $[\lambda_5] = -1$ dimensión (masa)⁻¹

D aumenta con V
 \exists infinitos diagramas divergentes

3 tipos de comportamiento UV

tipo de teoría	dimensión de constante de acoplo	divergencias # finito de diagramas diverge superficialmente	ejemplos
super renormalizable	> 0	# finito de diagramas diverge superficialmente	$\lambda_3 \phi^3$
renormalizable	$= 0$	# finito de amplitudes diverge superficialmente, divergencias ocurren a todo orden	$\lambda \phi^4$ QED
no-renormalizable	< 0	todas las amplitudes divergen a un orden suficientemente grande	$\lambda_5 \phi^5$ gravedad

* en una teoría renormalizable las divergencias se absorben en un número finito de parámetros, equivalentemente en un número finito de contraterminos

Regularización

Después de rotación de Wick $k^0 = i k_4$

* Cut-off Λ

$$\int k^{D-1} dk \rightarrow \int^{\Lambda} k^{D-1} dk, \quad \Lambda \text{ tiene unidades de energía (masa)}$$

Ej. $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\log \frac{\Lambda^2}{c^2} - 1 + \dots \right)$

\dots = términos que se anulan para $\Lambda^2 \gg c^2$

$$\log = \ln$$

* regularización dimensional

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}, \quad \epsilon = 4 - d$$

Para mantener λ adimensional se introduce un parámetro μ (masa)

$$\lambda \rightarrow \lambda \mu^\epsilon \Rightarrow \lambda \mu^\epsilon \phi^4 \text{ tiene dimensión } d = [L] \text{ ejercicio}$$

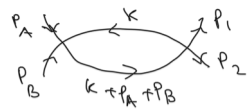
Ej. $\lambda^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2} \rightarrow \lambda^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2}$

$$= \frac{i\lambda^2 \mu^\epsilon}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{c^2} \right)^{\epsilon/2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \quad \epsilon = 4-d, \quad \gamma = 0.5772\dots$$

$$= \frac{i\lambda^2 \mu^\epsilon}{16\pi^2} \left\{ \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \log \frac{4\pi\mu^2}{c^2} + \dots \right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots \right) \right\} \quad \dots = \text{términos de orden } \epsilon$$

$$= \frac{i\lambda^2 \mu^\epsilon}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{c^2}{\mu^2} + \dots \right) \quad \text{divergencias} = \text{polos en } \epsilon$$

Regresamos a



$$P = p_A + p_B, \quad S = (p_A + p_B)^2$$

$$iM_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2 - i\epsilon}$$

se usa el truco de Feynman: $\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}$

luego se cambia variable a $l = k + xp$


$$iM_2(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - c^2 + i\epsilon)^2}, \quad c^2 = m^2 - x(1-x)S$$

evaluada anteriormente

$$I = \frac{i}{16\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{c^2} + \dots$$

$$iM_2(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \frac{\Lambda^2}{m^2 - x(1-x)S}$$

$$iM_2(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{S}, \quad s \gg m^2$$

 en regularización dimensional
como antes se llega a

$$iM_2(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - c^2 + i\epsilon)^2}, \quad c^2 = m^2 - x(1-x)s$$

$\underbrace{\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - c^2 + i\epsilon)^2}}_{\text{evaluado anteriormente}}$
 $\frac{i\mu^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + 4\pi - \log \frac{c^2}{\mu^2} + \dots \right)$

$$iM_2(s) = \frac{i\lambda^2 \mu^2}{16\pi^2 \epsilon} - \frac{i\lambda^2 \mu^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\gamma - \log 4\pi + \log \left(\frac{m^2 - x(1-x)s}{\mu^2} \right) \right]$$

esquema MS (minimal subtraction)
contratérmino absorbe polo en ϵ

esquema $\overline{\text{MS}}$ (modified MS)
contratérmino absorbe polo en ϵ
y $-\gamma + \log 4\pi$

Renormalización

Volvemos a la amplitud $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ en $\lambda\phi^4$

Refs. Zee, III.1
Schwartz 15.4

$$i\mathcal{M} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$i\mathcal{M}_2(s)$ $i\mathcal{M}_2(t)$ $i\mathcal{M}_2(u)$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right] + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

problema aparente: \mathcal{M} depende de $\Lambda \rightarrow \infty$

solución: entender el significado de λ

λ determina la magnitud de la interacción ϕ^4

Para medir λ se hace un experimento $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ y se mide $d\sigma/d\Omega$ a ciertos valores s_0, t_0, u_0 . Como $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \lambda^2$

efectivamente se mide λ , pero λ también incluye las correcciones en λ^2 . Lo que se mide se define como un λ renormalizado λ_R (o λ_p , p de physical en Zee) y por lo tanto

$$-i\lambda_R = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left[\log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right] + O(\lambda^3)$$

Esta ecuación relaciona la λ en el Lagrangiano \mathcal{L} con el valor observado λ_R

$$\lambda_R = \lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} L_0, \quad L_0 = \log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0}$$

Para despejar λ , $\lambda = \lambda_R + a\lambda_R^2 + O(\lambda_R^3)$

$$\lambda_R = \lambda_R + a\lambda_R^2 - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 + \dots \Rightarrow a = \frac{L_0}{32\pi^2}$$

$$\lambda = \lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 + O(\lambda_R^3)$$

se sustituye en $\mathcal{M} = -\lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \underbrace{\left(\log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right)}_L + O(\lambda^3)$

$$\mathcal{M} = -\left(\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 \right) + \frac{\left(\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 \right)^2}{32\pi^2} L + O(\lambda_R^3)$$

daria λ_R^3, λ_R^4 pero es $O(\lambda_R^3)$

$$\mathcal{M} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} (L - L_0) + O(\lambda_R^3)$$

$$L - L_0 = \left(\log \frac{\Lambda^2}{S} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right) - \log \left(\frac{\Lambda^2}{S_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right)$$

$$\mathcal{M} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left(\log \frac{S_0}{S} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right) + O(\lambda_R^3)$$

finito, independiente de Λ

además predice $\mathcal{M}(S_1, t_1, u_1) - \mathcal{M}(S_0, t_0, u_0) = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left(\log \frac{S_0}{S_1} + \log \frac{t_0}{t_1} + \log \frac{u_0}{u_1} \right)$

Divergencias en $G^{(2)}$

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{p} \\ \xrightarrow{k} \quad \xleftarrow{k} \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{p} \\ \textcircled{p+k+q} \\ \xrightarrow{k} \quad \xleftarrow{k} \\ x_1 \quad x_2 \end{array} + \dots$$

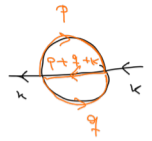
$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx_1} e^{ikx_2} \tilde{G}^{(2)}(k, -k) \leftarrow \text{transformada de Fourier}$$

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} I_1 \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} I_2 \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$I_1 = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = i\lambda C_1 \left(\Lambda^2 - m^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots \right)$$

$$\textcircled{p} \\ \xrightarrow{k} \quad \xleftarrow{k}$$

$$I_2 = \frac{(-i\lambda)^2}{6} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p+q)^2 - m^2 + i\epsilon}$$



Por invariancia de Lorentz

$$I_2 = D + E k^2 + F k^4 + \dots$$

$$D = I_2 \Big|_{k=0} \sim i C_2 \lambda^2 \Lambda^2 + \dots$$

D tiene divergencia cuadrática

Para determinar E se deriva respecto a $r = k^2$, luego se evalúa en $k=0$

$$\frac{\partial I_2}{\partial r} = \frac{1}{2r} k^\mu \frac{\partial I_2}{\partial k^\mu} \xrightarrow{k=0} \int d^4 p \int d^4 q \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{[(p+q)^2 - m^2 + i\epsilon]^2}$$

divergencia logarítmica

$$E \sim i C_3 \lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots$$

similarmente se obtiene que F es finita

$$I_2 = i \lambda^2 \left(C_2 \Lambda^2 + C_3 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \dots$$

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left\{ 1 - \frac{\lambda c_1 \Lambda^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{\lambda^2 (c_2 \Lambda^2 + c_3 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2})}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \right\}$$

← serie geométrica

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda c_1 \Lambda^2 + \lambda^2 (c_2 \Lambda^2 + c_3 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}} \right) \rightarrow O(\lambda^3)$$

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + c_1 \lambda \Lambda^2 + c_2 \lambda^2 \Lambda^2 + c_3 \lambda^2 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + i\epsilon + \dots}$$

se concluye .

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(1+b)k^2 - (m^2 - a) + i\epsilon}$$

$$a = \Lambda^2 (c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots)$$

$$b = c_3 \lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots$$

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{(1+b)^{-1}}{k^2 - \frac{(m^2 - a)}{1+b} + i\epsilon}$$

* el polo en k^2 se corre a m_R^2 (o m_p^2 en Zee)

$$m_R^2 = \frac{m^2 - a}{1+b} = m^2 + \delta m^2$$

renormalización de masa

$$m^2 = m_R^2 + C_1 \lambda \Lambda^2 + \dots$$

* el residuo en el polo se modifica de 1 a $(1+b)^{-1}$
corresponde a renormalización del campo ϕ

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \dots \rightarrow \frac{1}{2} (1+b) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi.$$

$$\frac{1}{k^2 \dots} \rightarrow \frac{1}{(1+b)k^2 \dots}$$

en el propagador

CONTRATÉRMINOS

Hasta ahora: se ajustan los parámetros originales, e.g. λ en términos de λ_R , o m en términos de m_R , tal que la dependencia en Λ desaparece

Funciona a orden λ^2 . Para demostrar que funciona a todo orden se procede sistemáticamente incluyendo contratérminos en \mathcal{L} dependiente de ϕ_R, m_R, λ_R :

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{\lambda_R}{4!} \phi_R^4}_{\mathcal{L}_R} + \underbrace{\frac{1}{2} \delta_\lambda \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_R^4}_{\mathcal{L}_{CT}}$$

sólo se necesitan 3 contratérminos, todos de la forma de términos originales

Los coeficientes $\delta_\lambda, \delta_m, \delta_\lambda$ dependen de λ_R , se determinan iterativamente

Ejemplo : amplitud $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$

$$i\mathcal{M} = \underbrace{X + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3}}_{\text{se calculan con } \mathcal{L}_R} + \underbrace{\text{diagrama 4}}_{\text{contribución de } -\frac{\delta\lambda}{4!}\phi_R^4 \text{ en } \mathcal{L}_{CT}} + \dots$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[\log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right] - i\delta\lambda$$

$$\mathcal{M} \Big|_{s_0, t_0, u_0} = -\lambda_R \Rightarrow \delta\lambda = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[\log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right]$$

sustituyendo

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[\log \frac{s_0}{s} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right] + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$$

igual que antes

Próximamente

reglas de Feynman con contraterminos

grupo de renormalización



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongapysics



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.