Módulo de Teoría
Clase 11, 01-03-2022

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

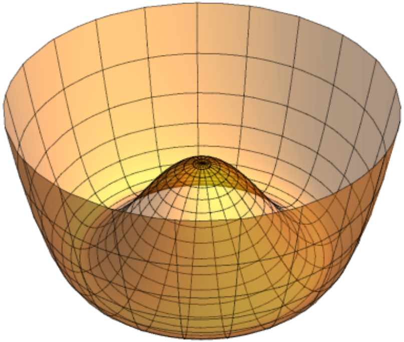
LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

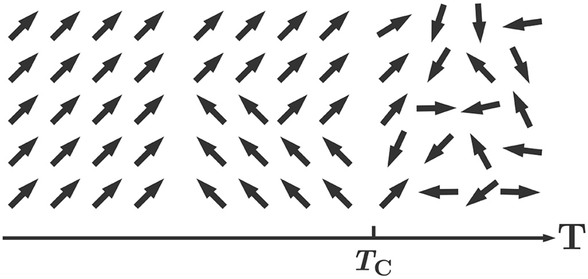
Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Ruptura espontánea de simetría



- idea: Hamiltoniano invariante, i.e. simétrico, bajo transformación de los campos, pero el estado de mínima energía no es invariante, i.e. rompe la simetría

- ejemplo: magnetización $\overrightarrow{M}$ en materiales ferromagnéticos
  H es invariante bajo rotaciones pero $\langle\overrightarrow{M}\rangle \neq 0$ a temperaturas $T < T_C$



Queremos estudiar ruptura espontánea de simetría (RES) en teoría de campos.

Consideraremos campos escalares y analizaremos tres casos:

1. simetrías discretas, e.g. $\mathbb{Z}_2 : \phi \to -\phi$
2. simetrías continuas globales, e.g. $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$
3. simetrías continuas locales, e.g. $\varphi \to e^{i\alpha(x)}\varphi$

En general hay N campos escalares, ϕ_i, $i = 1, \ldots, N$, con Lagrangiano y Hamiltoniano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - V(\phi_1, \ldots, \phi_N), \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \left[(\partial_0 \phi_i)^2 + (\overrightarrow{\nabla}\phi_i)^2\right] + V(\phi_1, \ldots, \phi_N)$$

▷ el estado de mínima energía o estado de vacío satisface:

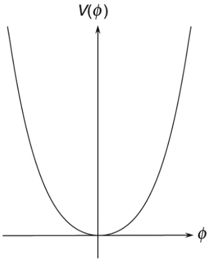
- ⋆ ϕ_i constante, i.e. independiente de $(t, \overrightarrow{x})$
- ⋆ mínimo de $V(\phi_1, \ldots, \phi_N)$, i.e. $\dfrac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0$ en el vacío

Ruptura de simetría discreta

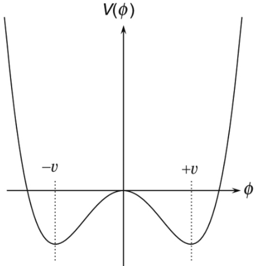
$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \tfrac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \tfrac{1}{4!}\lambda\phi^4, \qquad V(\phi) = -\tfrac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \tfrac{1}{4!}\lambda\phi^4 \quad \text{potencial}$$

- ⋆ $\mathcal{L}$ invariante bajo transformación $\mathbb{Z}_2 : \phi \to -\phi$ $\qquad \phi' = -\phi,\ \mathcal{L}' = \mathcal{L}$
- ⋆ $\lambda > 0$, pero puede ser $\mu^2 < 0$ ó $\mu^2 > 0$ $\qquad v^2 = \frac{6}{\lambda}\mu^2$
- ⋆ extremos de V: $\dfrac{dV}{d\phi} = -\mu^2\phi + \frac{\lambda}{6}\phi^3 = \frac{\lambda}{6}\phi(\phi^2 - v^2) = 0, \quad \dfrac{d^2V}{d\phi^2} = -\mu^2 + \frac{\lambda}{3}\phi^2 \;\Rightarrow$ mín ó máx

$\mu^2 < 0$

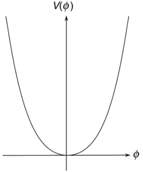


$\mu^2 > 0$



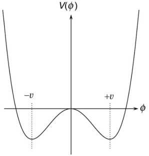
$v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\mu$

$\mu^2 < 0 \qquad \dfrac{dV}{d\phi}=0, \quad \dfrac{d^2V}{d\phi^2} > 0 \;\Rightarrow\;$ mínimo en $\phi = 0$



- la simetría no se rompe
- $\mathcal{L}$ describe un campo escalar real ϕ, con masa $m_\phi = -\mu^2 > 0$

$\mu^2 > 0 \qquad \dfrac{dV}{d\phi}=0, \quad \dfrac{d^2V}{d\phi^2} > 0 \;\Rightarrow\;$ mínimo en $\phi = \pm v, \quad v = \sqrt{\dfrac{6}{\lambda}}\,\mu$



- $\mathcal{L}$ invariante bajo $\phi \to -\phi \;\Rightarrow\;$ se puede escoger el mínimo en v, al hacerlo se rompe la simetría
- en el mínimo, $\langle\phi\rangle = v = \sqrt{\dfrac{6}{\lambda}}\,\mu$

$\langle\phi\rangle \equiv \langle 0|\phi|0\rangle$: valor de expectación de vacío (vev) de ϕ

- para analizar la teoría en el vacío asimétrico se hace el cambio

$$\sigma(x) = \phi(x) - v \;\Rightarrow\; \langle\sigma\rangle = \langle\phi\rangle - v \quad\Rightarrow\quad \langle\sigma\rangle = 0$$

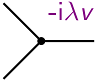
$\sigma(x)$ se cuantiza canónicamente en términos de ops. de creación y aniquilación

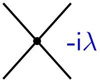
- luego se sustituye $\phi(x) = \sigma(x) + v,\; v = \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\mu,$ en $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \frac{1}{3!}\lambda v\sigma^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma^4 + \text{constante}$$

- $\mathcal{L}$ describe un campo escalar real σ, de masa $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$

- σ tiene interacciones cúbicas y cuárticas

$\frac{1}{3!}\lambda v\sigma^3 \quad \Rightarrow$ 

, $\quad \frac{1}{4!}\lambda\sigma^4 \quad \Rightarrow$ 

- simetría bajo $\phi \to -\phi$ implícita en relaciones entre los coeficientes de σ^2, σ^3 y σ^4,
  $\mathcal{L}$ es invariante bajo $\sigma \to -\sigma - 2v$

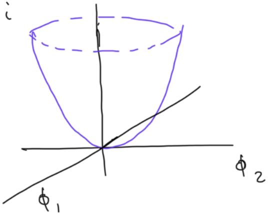
Ruptura de simetrías continuas globales

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$$ modelo $O(2)$

invariante bajo $\phi_i \to R_{ij}\phi_j$, R matriz 2×2 ortogonal, $R^T R = \mathbb{1}$

e.g. $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, ángulo α es un parámetro continuo

$$V(\phi_1,\phi_2) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2+\phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial\phi_i} = \phi_i\left(-\mu^2+\lambda(\phi_1^2+\phi_2^2)\right)$$

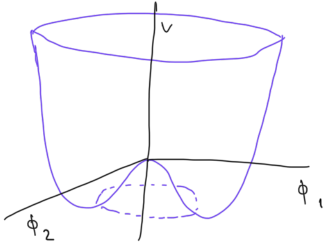


$\mu^2 < 0$ mínimo en $\phi_1 = \phi_2 = 0$

no hay RES

$m_1^2 = -\mu^2$, $m_2^2 = -\mu^2$

$\mu^2 > 0$ familia de mínimos en $\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$



la longitud de $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ está fijada

la dirección es arbitraria. se escoge $\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\langle \phi_1 \rangle = v \,, \quad \langle \phi_2 \rangle = 0$$

cambio de variable $\phi_1(x) = \sigma(x) + v$, $\phi_2(x) = \pi(x)$, $\langle \sigma \rangle = 0$, $\langle \pi \rangle = 0$

Ej. $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \pi \, \partial^\mu \pi + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \, \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma\pi^2 - \frac{\lambda}{2}\pi^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\pi^4 + \text{const.}$$

σ campo masivo $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$.

π campo de masa nula: bosón de Goldstone

Propagadores

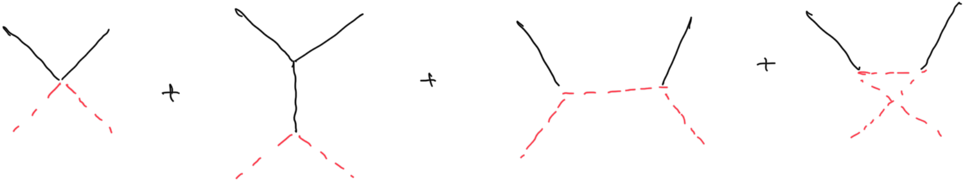
σ $\overset{k}{\overline{\hspace{3em}}}$ $\dfrac{i}{k^2-2\mu^2+i\epsilon}$

π $\overset{k}{- - - -}$ $\dfrac{i}{k^2+i\epsilon}$

vértices

Ejercicio choque $\sigma\pi \to \sigma\pi$ a nivel árbol

$i\mathcal{M} =$



$\mathcal{M} \to 0$ cuando el momento de π's $\to 0$

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$$

Generalización modelo O(N)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \partial_\mu \phi_i \, \partial^\mu \phi_i + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2) - \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2)^2$$

invariante bajo $\phi_i \to R_{ij} \phi_j$, R matriz $N \times N$ ortogonal $R^T R = 1$

hay $\frac{N(N-1)}{2}$ parámetros continuos : ángulos de rotación en los distintos $\frac{N(N-1)}{2}$ planos

---

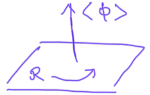
$\mu^2 < 0$ mínimo simétrico en $\phi_i = 0$

$\mathcal{L}$ describe N escalares reales con $m_i^2 = -\mu^2$

$\mu^2 > 0$ familia de mínimos en $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots + \phi_N^2 = v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$ ejercicio

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \longleftarrow O(N) \text{ se rompe a } O(N-1)$$

$$\mathbb{R} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{R} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{deja } \langle \phi \rangle \text{ invariante}$$



$\mathcal{R}$: rotación $O(N-1)$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \pi_1(x) \\ \vdots \\ \pi_{N-1}(x) \\ \sigma(x) + v \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2}\partial_\mu \pi_i \partial^\mu \pi_i + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\,\sigma^3 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4$$

$$-\sqrt{\lambda}\mu\sigma(\pi_1^2 + \dots + \pi_{N-1}^2) - \frac{\lambda}{2}\sigma^2(\pi_1^2 + \dots + \pi_{N-1}^2) - \frac{\lambda}{4}\left(\pi_1^2 + \pi_2^2 + \dots + \pi_{N-1}^2\right)^2$$

σ masivo $m_\sigma = \sqrt{2}\,\mu$

π_k, $k = 1, \dots, N-1$ masa nula

$(N-1)$ bosones de Goldstone

* $$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i \partial\phi_j}\right|_{\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2 = v^2} = 2\lambda\phi_i\phi_j$$ autovalores $\underbrace{0, \dots, 0}_{N-1}, 2\mu^2$

* # de simetrías rotas = # de bosones de Goldstone

$$\underset{O(N)}{\frac{N(N-1)}{2}} - \underset{O(N-1)}{\frac{(N-1)(N-2)}{2}} = N-1$$

Teorema de Goldstone

Por cada simetría continua interna rota espontáneamente existe una partícula de masa nula, llamada bosón de Goldstone

demo: ϕ_i campos escalares reales, $\mathcal{L} = $ términos cinéticos $- V(\phi_1, \dots, \phi_N)$

$\mathcal{L}$ invariante bajo transformaciones de un grupo G

$$\phi'_i = (\underbrace{e^{i\alpha_a T^a}}_{\text{matriz}})_{ij}\phi_j, \quad \alpha_a \text{ infinitesimal} \quad \phi'_i = (\delta_{ij} + i\alpha_a T^a_{ij} + \dots)\phi_j$$

$a = 1, \dots, \dim G$, T^a: generador de G

ejemplos: $G = SO(2)$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{i\alpha T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\dim G = 1$

$G = SO(3)$, $\dim G = 3$

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \qquad e^{i\alpha_1 T^1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_1 & -\operatorname{sen}\alpha_1 \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

T^2, T^3 similares

invariancia $\Rightarrow$ $V(\phi'_i) = V(\phi_i + i\alpha_a T^a_{ij}\phi_j) = V(\phi_i)$

exp. de Taylor $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial V}{\partial \phi_i}\alpha_a T^a_{ij}\phi_j = 0$ $\xrightarrow{\alpha_a \text{ arbitrarios}}$ $\Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a_{ij}\phi_j = 0$

derivando respecto a ϕ_k: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} T^a_{ij}\phi_j + \dfrac{\partial V}{\partial \phi_i} T^a_{ik} = 0$

evaluando en el mínimo, $\langle \phi_i \rangle = \bar{\phi}_i$

(*) $$\underbrace{\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i}\right|_{\bar{\phi}_i}}_{\text{matriz } M^2_{ik} \text{ de masas}} T^a_{ij}\bar{\phi}_j = 0 \qquad \text{ya que } \left.\frac{\partial V}{\partial \phi_i}\right|_{\bar{\phi}_i} = 0$$

$$V(\phi_i) = V(\bar{\phi}_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \phi_i}\right|_{\bar{\phi}_i}(\phi - \bar{\phi}_k)(\phi - \bar{\phi}_i) + \cdots$$

$$M^2_{ki}\, T^a_{ij}\, \bar{\phi}_j = 0 \qquad (*)$$

G se rompe a un subgrupo H_{nr} nr: no roto

para los generadores de H_{nr} $\quad T^a_{ij}\,\bar{\phi}_j = 0 \quad (*)$ trivial

para los generadores de G que no están en H_{nr}, $T^a_{ij}\,\bar{\phi}_j \neq 0$

$(*) \Rightarrow$ autovectores de M^2 con autovalor cero

de autovectores cero = # de bosones de Goldstone = dim G − dim H_{nr}

ejemplo $\quad V = \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \dots + \phi_N^2)^2$

$$G = O(N), \qquad H_{nr} = O(N-1)$$

Ruptura con campo complejo

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\varphi^*\varphi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

ejemplo $O(2)$

$U(1) \simeq SO(2)$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda(\varphi^*\varphi)^2$$

invariante bajo $\varphi \to e^{i\alpha}\varphi$ $\quad U(1)$

$$V = -\mu^2 \varphi^*\varphi + \lambda(\varphi^*\varphi)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \varphi^*(-\mu^2 + 2\lambda\varphi^*\varphi) \, ,$$

$\mu^2 > 0$ mínimo en $|\varphi|^2 = \frac{v^2}{2}$, $v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$

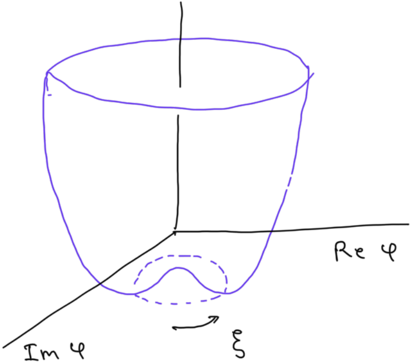
Se escoge $\langle \varphi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$

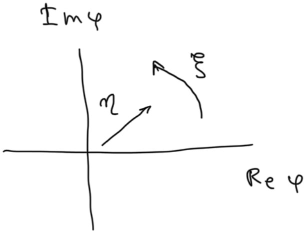
$$\varphi = e^{i\xi/v}\left(\frac{\eta + v}{\sqrt{2}}\right) \, , \quad \langle \xi \rangle = 0 \, , \quad \langle \eta \rangle = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2}\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 + \frac{\eta}{v}\left(1 + \frac{\eta}{2v}\right)\partial_\mu \xi \partial^\mu \xi$$

η masivo $m_\eta = \sqrt{2}\mu$, $\quad \xi$ bosón de Goldstone $\quad m_\xi = 0$

acoplos con ∂_μ





η masivo : dirección radial
V varía, cuesta energía cambiar η

ξ masa nula : dirección circular
V no varía, no cuesta energía cambiar ξ

TRANSFORMACIONES DE SIMETRÍA LOCALES

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi + \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2$$

simetría global $U(1)$: $\varphi' = e^{i\alpha} \varphi \Rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$, $\mu^2 > 0 \Rightarrow$ ruptura espontánea

α constante

si $\alpha = g\chi(x) \neq$ constante , $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$

$$\partial_\mu \varphi' = \partial_\mu (e^{ig\chi} \varphi) = e^{ig\chi} (\partial_\mu \varphi + ig\, \partial_\mu \chi\, \varphi) \neq e^{ig\chi} \partial_\mu \varphi$$

Es necesario introducir un campo de calibre (gauge) $B_\mu(x)$

y reemplazar ∂_μ por $D_\mu = \partial_\mu + igB_\mu$ derivada covariante

g : constante de acoplo

EM : $g = e$, campo de calibre A_μ

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ig B_\mu \varphi$$

$$(D_\mu \varphi)' = \partial_\mu \varphi' + ig B'_\mu \varphi' = \partial_\mu \left(e^{ig\chi} \varphi \right) + ig B'_\mu \left(e^{ig\chi} \varphi \right)$$

$$= e^{ig\chi} \left(\partial_\mu \varphi + ig \partial_\mu \chi \varphi + ig B'_\mu \varphi \right)$$

se impone $(D_\mu \varphi)' = e^{ig\chi} D_\mu \varphi \Rightarrow \partial_\mu \chi + B'_\mu = B_\mu$

$$\boxed{B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \chi}$$

transformación de calibre del campo de calibre

EM $\quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\vec{E} = -\partial_0 \vec{A} - \vec{\nabla} A^0$

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$

$A'^0 = A^0 - \partial_0 \chi$

$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$

$\Rightarrow \quad \vec{B}' = \vec{B}$

$\vec{E}' = \vec{E}$

Lagrangiano para el campo de calibre

se quiere $\mathcal{L}_B$ invariante, i.e $\mathcal{L}'_B = \mathcal{L}_B$, $B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \chi$

$$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad \text{tensor de campo}$$

$\frac{1}{2}(\partial_0 B^i)^2$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \Leftarrow \partial_\mu \partial_\nu \chi = \partial_\nu \partial_\mu \chi$$

recordar: $\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

notar que un término de masa $\frac{1}{2} m_B^2 B_\mu B^\mu$ no es invariante de calibre

$\mathcal{L}_B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ describe un campo vectorial B_μ (espin 1) de masa nula con dos grados de libertad (dos polarizaciones)

Es posible

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_B^2 B_\mu B^\mu$$

pero no hay invariancia de calibre

$\mathcal{L}$ describe un campo vectorial B_μ (espín 1)

masivo con 3 grados de libertad

(tres polarizaciones)

Ruptura espontánea de simetrías locales - Mecanismo Higgs

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \varphi (D^\mu \varphi)^* + \mu^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2$$

Próximamente ...

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.