Tarea 6 – Introducción a Teoría Cuántica de Campos

1. Considere el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 , \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} ,$$

donde $\lambda > 0$ y $v > 0$ son constantes. φ_i, $i = 1, 2$, son dos campos escalares complejos. Φ es un doblete de $SU(2)$.

a) Demuestre que $\mathcal{L}$ es invariante bajo:

i. transformación $SU(2)$ global, i.e. bajo $\Phi' = U\Phi$, donde U es una matriz que satisface $U^\dagger U = \mathbb{1}$, $\det U = 1$, y tiene elementos de matriz constantes,

ii. transformación $U(1)$ global, i.e. bajo $\Phi' = e^{i\alpha \frac{\sigma_0}{2}} \Phi$, donde α es una constante y $\sigma_0 = \mathbb{1}$.

b) Determine los mínimos del potencial $V(\Phi^\dagger, \Phi) = \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2$.

c) Rompa la simetría escogiendo

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

Defina campos $\tilde{\varphi}_i$, $i = 1, 2$, como las componentes de $\tilde{\Phi} = \Phi - \langle \Phi \rangle$, de tal manera que $\langle \tilde{\varphi}_i \rangle = 0$. Reescriba el Lagrangiano en términos de los campos $\tilde{\varphi}_i$. Demuestre que el Lagrangiano describe 3 bosones de Goldstone, i.e. 3 campos escalares reales de masa nula, y un campo escalar real masivo. Determine la masa del campo masivo.

d) Demuestre que el número de bosones de Goldstone es igual al número de generadores del grupo de simetría $G = SU(2) \times U(1)$ rotos, i.e. que no dan cero actuando sobre $\langle \Phi \rangle$. Determine el generador de G que da cero actuando sobre $\langle \Phi \rangle$.

`Ayuda:` Los generadores de $SU(2)$ en la representación doblete son $T_a = \frac{1}{2}\sigma_a$, $a = 1, 2, 3$, donde σ_a son las matrices de Pauli. Se tiene entonces $U = e^{i\alpha_a T_a}$. Similarmente, el generador del $U(1)$ es $T_0 = \frac{1}{2}\sigma_0$.