

## DISPERSIÓN ELÁSTICA EN EL CAMPO COULOMBIANO

• Tenemos **dos partículas** (**entidades puntuales**) con carga  $Z_1e$  y  $Z_2e$ .

• **Potencial coulombiano**:  $\vartheta_c(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$

• **Potencial de largo alcance**: **No hay partículas libres en la región asintótica.**

¿Qué forma asintótica podemos esperar?

**Estado ligado** en el **átomo de hidrógeno**: ( $E < 0$ )

$$R_{nl}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r^{n-1} e^{-\kappa r} \quad \kappa = \frac{1}{a_B} \quad a_B \rightarrow \text{radio de Bohr}$$

**Como:**  $E_n = -\frac{\mu e^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu} \rightarrow n = \frac{\mu e^2}{\hbar^2 \kappa}$

$$R_{nl}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-\kappa r + (\mu e^2 / \hbar^2 \kappa) \log r}}{r} \quad (E < 0)$$

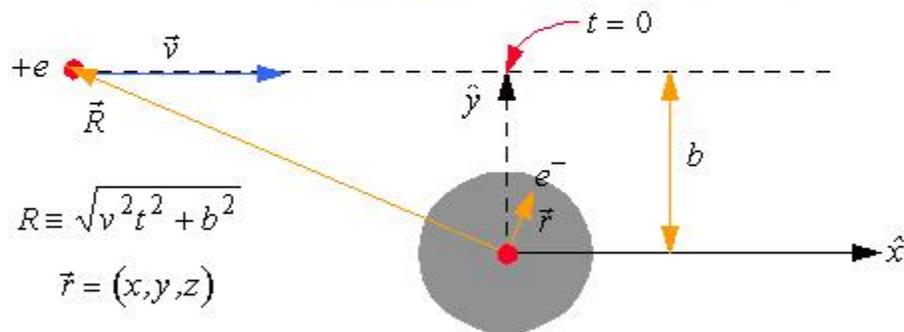
**Relación entre largo y corto alcance**:  $\kappa \rightarrow \pm ik \quad E < 0 \rightarrow E > 0$

Entonces:  $R(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} e^{\pm i(kr - \gamma \log r)} \quad (E > 0)$

**Efecto del potencial coulombiano**  $\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \gamma \equiv -\frac{\mu e^2}{\hbar^2 k} = -\frac{1}{ka_B}$

**INTERACCIÓN DE PARTÍCULAS PESADAS CON ELECTRONES EN ÁTOMOS EN UNA COLISIÓN “SUAVE”**

- Suponemos que tenemos una **partícula cargada** que es **pesada** (ó rápida ó ambas cosas) y que esencialmente su **velocidad no cambia** cuando **colisiona con un átomo**.
- Con la **colisión** un electrón pasa del estado  $|m\rangle$  al  $|n\rangle$ .
- En el instante  $t$ , la **posición** de  $+e$  es  $\vec{R} = (vt, b, 0)$ .



**Interacción** entre la **partícula que bombardea** y el **electrón en el átomo**:

$$\hat{w}(t) = -\frac{Ze^2}{|\vec{R} - \vec{r}|} \quad |\vec{R} - \vec{r}| = \sqrt{(vt-x)^2 + (b-y)^2 + z^2}$$

**En el límite:**

$$|x|, |y| \ll R \quad \rightarrow \quad \hat{w}(t) = -\frac{Ze^2}{R} - \frac{Ze^2}{R^3} (vtx + by) + \dots$$

TEORÍA DE PERTURBACIONES  
DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Suponemos:  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$  con  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{V}(t)]\psi$

La colisión ocurre en un **lapso finito**  $\tau$  :

$$\hat{V}(t) \equiv \begin{cases} \hat{w}(t) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t < 0, t > \tau \end{cases}$$

Entonces:

• El **problema de autovalores**  $\hat{H}_0 \varphi_n = E_n \varphi_n$  está resuelto.

•  $\{\varphi_n\}$  es una base apropiada para el **espacio de Hilbert** asociado a los estados de  $\hat{H}_0$  y  $\hat{H}$ .

• Si el sistema está **inicialmente** en el estado  $|m\rangle$  y como en general tenemos:

$$\psi(t) = \sum_n a_n(t) \varphi_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$$

• Para  $t > \tau$  el **estado final** viene dado por:

$$\psi_f(t) = \sum_n a_{nm}(t) \varphi_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$$

• **Probabilidad de transición**: ¿Cómo encontrar esto?

$$\Lambda_{nm}(\tau) = |a_{nm}(\tau)|^2$$

TEORÍA DE PERTURBACIONES  
DEPENDIENTE DEL TIEMPO

La ecuación de Schroedinger pasa a ser:

$$i\hbar \frac{da_k(t)}{dt} = \sum_n \langle k | \hat{w}(t) | n \rangle e^{i\omega_{kn}t} a_n(t) \quad \omega_{kn} \equiv \frac{E_k - E_n}{\hbar}$$

En nuestro caso:  $\langle n | \hat{w}(t) | n \rangle = 0$   $a_n(0) = \delta_{nm}$

**Sistema de ecuaciones integrales:**

$$a_k(t) = a_k(0) - \frac{i}{\hbar} \sum_n \int_0^t dt' \langle k | \hat{w}(t') | n \rangle e^{i\omega_{kn}t'} a_n(t')$$

Se puede resolver por iteración. Iterando una vez:

$$a_k(t) = a_k(0) - \frac{i}{\hbar} \sum_n a_n(0) \int_0^t dt' \langle k | \hat{w}(t') | n \rangle e^{i\omega_{kn}t'} + \dots$$

Si  $k = n \neq m$ , en una primera iteración:

$$a_{nm}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle n | \hat{w}(t') | m \rangle e^{i\omega_{nm}t'}$$

Entonces la probabilidad de transición queda en primera aproximación como:

$$\Lambda_{nm}(\tau) = |a_{nm}(\tau)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\tau dt' \langle n | \hat{w}(t') | m \rangle e^{i\omega_{nm}t'} \right|^2$$

PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN EN  
PRIMER ORDEN DE TEORÍA DE  
PERTURBACIONES

- La **partícula cargada** tiene carga  $+ze$  y suponemos su colisión con un **electrón**  $-e$ .
- La expresión original para  $\hat{w}(t)$  la modificamos para incluir **efectos relativistas**:

$$\hat{w}(t) = -\frac{ze^2}{|\vec{R} - \vec{r}|} \quad |\vec{R} - \vec{r}| = \sqrt{\gamma^2 (vt - x)^2 + (b - y)^2 + z^2}$$

$$R \equiv \sqrt{\gamma^2 v^2 t^2 + b^2} \quad \gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2} \quad \beta \equiv v/c$$

- **También:**  $|x|, |y| \ll b < R \rightarrow$  **Proceso Suave**

$$\hat{w}(t) = -\frac{Ze^2}{R} - \frac{Ze^2}{R^3} (\gamma vt x + by) + \dots$$

- Al calcular  $\langle n | \hat{w}(t) | m \rangle$  vemos que el **primer término no contribuye**:

$$\langle n | \hat{w}(t) | m \rangle = -\frac{ze^2}{R^3} (x_{nm} \gamma vt + by_{nm})$$

$$x_{nm} = \langle n | \hat{x} | m \rangle \quad y_{nm} = \langle n | \hat{y} | m \rangle$$

- Pasamos de  $[0, \tau]$  a  $(-\infty, +\infty)$ .

**PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN EN PRIMER ORDEN DE TEORÍA DE PERTURBACIONES**

Para calcular la **probabilidad de transición** relevante

$$a_{nm}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle n | \hat{w}(t') | m \rangle e^{i\omega_{nm}t'}$$

La **integral fundamental** a calcular es

$$I_{\mathcal{F}}^{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle n | \hat{w}(t') | m \rangle e^{i\omega_{nm}t'}$$

$$= -2ize^2 \gamma v x_{nm} \int_0^{\infty} \frac{t' dt' \sin \omega_{nm} t'}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t'^2)^{3/2}} - 2ze^2 b y_{nm} \int_0^{\infty} \frac{t' dt' \cos \omega_{nm} t'}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t'^2)^{3/2}}$$

**Usamos:**

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax dx}{(c^2 + x^2)^{3/2}} = a K_0(ac) \quad [a > 0, \text{Re}(c) > 0]$$

**Funciones de Modificadas Bessel**

$$\int_0^{\infty} \frac{x \cos ax dx}{(c^2 + x^2)^{3/2}} = -\frac{a}{c} K_1(ac) \quad [a > 0, \text{Re}(c) > 0]$$

**Para obtener:**

$$I_{\mathcal{F}}^{nm} = \frac{2ze^2}{\gamma v} \left\{ \frac{y_{nm} \omega_{nm}}{\gamma v} K_1\left(\frac{b \omega_{nm}}{\gamma v}\right) - i \frac{x_{nm} \omega_{nm}}{\gamma v} K_0\left(\frac{b \omega_{nm}}{\gamma v}\right) \right\}$$

**PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN EN PRIMER ORDEN DE TEORÍA DE PERTURBACIONES**

**Para el átomo:**  $|x_{nm}|^2 = |y_{nm}|^2$        $\xi_{nm} \equiv \frac{\omega_{nm} b}{v}$

Entonces:

$$\left| I_{\vec{F}}^{nm} \right|^2 = \frac{4z^2 e^4}{v^2} \frac{|x_{nm}|^2}{b^2} \left[ \xi_{nm}^2 K_1^2(\xi_{nm}) + \frac{1}{\gamma^2} \xi_{nm}^2 K_0^2(\xi_{nm}) \right]$$

**Probabilidad de transición total por unidad de tiempo:**  
(integrada en el rango de parámetros de impacto)

$$P_{nm} = 2\pi \phi_i \int_{b_{min}}^{b_{max}} b db \Lambda_{nm} \quad \Lambda_{nm} = \frac{1}{\hbar^2} \left| I_{\vec{F}}^{nm} \right|^2 \quad \phi_i \rightarrow \text{Flujo Inicial Incidente}$$

Como a partir de  $\xi_{nm} \sim 1$  hay una **caída muy rápida del integrando**, se puede llevar el **límite superior** a  $\infty$ .

**Sección eficaz** correspondiente:  $\sigma_{nm} = \frac{P_{nm}}{\phi_i} = 2\pi \int_{b_{min}}^{\infty} b db \Lambda_{nm}$

Al integrar:

$$\sigma_{nm} = \frac{8\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} |x_{nm}|^2 \left[ \xi_{min}^{nm} K_1(\xi_{min}^{nm}) K_0(\xi_{min}^{nm}) - \frac{1}{2} \beta^2 \left( K_1^2(\xi_{min}^{nm}) - K_0^2(\xi_{min}^{nm}) \right) \right]$$

## Interacciones de Partículas Cargadas con la Materia

### APROXIMACIÓN DE COLISIÓN RÁPIDA

Si  $\omega_{nm} \frac{b}{v} \ll 1$  en un **intervalo de tiempo**  $\tau \sim \frac{b}{v}$

**Entonces:**  $e^{i\omega_{nm}\tau} \sim 1$        $\xi_{min}^{nm} \ll 1$

En el **límite**  $\xi \rightarrow 0$  tenemos que

$$K_0(\xi) \sim -\ln \xi \quad K_1(\xi) \sim 1/\xi$$

**Por lo que**

$$\begin{aligned}\sigma_{nm} &= \frac{8\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} \left\{ -\ln \xi_{min}^{nm} - \frac{1}{2} \beta^2 \left[ 1 - \left( \xi_{min}^{nm} \right)^2 \ln^2 \xi_{min}^{nm} \right] \right\} |x_{nm}|^2 \\ &\rightarrow \frac{8\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} |x_{nm}|^2 \left\{ \ln \frac{1}{\xi_{min}^{nm}} - \frac{1}{2} \beta^2 \right\} \\ &= \frac{4\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} |x_{nm}|^2 \left\{ \ln \frac{1}{\left( \xi_{min}^{nm} \right)^2} - \beta^2 \right\} \\ &= \frac{4\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} |x_{nm}|^2 \left\{ \ln \left( \frac{\gamma^2 v^2}{b_{min}^2 \omega_{nm}^2} \right) - \beta^2 \right\}\end{aligned}$$

**Se desprecia**

**Definimos:**

$$I_{nm} \equiv \hbar \omega_{nm} \quad H \equiv \frac{\hbar^2}{2m_e b_{min}^2}$$

**Energía de la  
transición de  $m$  a  $n$**

**Máxima energía para proceso suave**

**APROXIMACIÓN DE COLISIÓN RÁPIDA**

Entonces:

$$\frac{\gamma^2 v^2}{b_{min}^2 \omega_{nm}^2} = \left( \frac{\hbar^2}{2m_e b_{min}^2} \right) \frac{2m_e}{\hbar^2 \omega_{nm}^2} \gamma^2 v^2 = \frac{2m_e c^2 \beta^2 H}{I_{nm}^2 (1 - \beta^2)}$$

$$\sigma_{nm} = \frac{4\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} |x_{nm}|^2 \left\{ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2 H}{I_{nm}^2 (1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \right\}$$

La contribución al **poder de frenado**  $\left( \frac{1}{\rho} \frac{dT_s}{dx} \right)_c$  será

→  $\hbar\omega \frac{n_A \sigma_{nm}}{\rho}$        $n_A$  → **Densidad de átomos**  
 (ó electrones en ellos)

Como:  $\frac{n_A}{\rho} \rightarrow \frac{N_A Z}{P_A}$        $\rho$  → **Densidad de masa**

$Z$  → **Número atómico**       $P_A$  → **Peso atómico**       $N_A$  → **Número de Avogadro**

Entonces:

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{dT_s}{dx} \right)_c = \frac{4\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} \frac{N_A Z}{P_A} \sum_n |x_{nm}|^2 \hbar\omega_{nm} \left\{ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2 H}{I_{nm}^2 (1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \right\}$$

## APROXIMACIÓN DE LA MEDIA GEOMÉTRICA

• **Suponemos** que al **promedio de**  $\ln I_{nm}$  (**media geométrica**  $\langle I \rangle_G$  **de**  $I_{nm}$ ) le corresponde una dispersión muy estrecha de valores.

• Se puede entonces **aproximar el poder de frenado anterior por una factorización:**

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{dT_s}{dx} \right)_c \approx \frac{4\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} \frac{N_A Z}{P_A} \left\{ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2 H}{\langle I \rangle_G (1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \right\} \sum_n |x_{nm}|^2 \hbar \omega_{nm}$$

• Pero:

$$\begin{aligned} \hbar \sum_n \omega_{nm} |x_{nm}|^2 &= \sum_n (E_n - E_m) \langle m | \hat{x} | n \rangle \langle n | \hat{x} | m \rangle \\ &= \langle m | \hat{x} \hat{H} \hat{x} | m \rangle - E_m \langle m | \hat{x}^2 | m \rangle = \langle m | \hat{x} (\hat{H} - E_m) \hat{x} | m \rangle \\ &= \langle m | [\hat{x}, \hat{H}] \hat{x} + \hat{H} \hat{x}^2 - E_m \hat{x}^2 | m \rangle = \langle m | [\hat{x}, \hat{H}] \hat{x} | m \rangle = \frac{i\hbar}{m_e} \langle m | \hat{p}_x \hat{x} | m \rangle \end{aligned}$$

• Además

$$\alpha \equiv \frac{i\hbar}{m_e} \langle m | \hat{p}_x \hat{x} | m \rangle = \frac{\hbar^2}{m_e} + \frac{i\hbar}{m_e} \langle m | \hat{x} \hat{p}_x | m \rangle \rightarrow \text{debe ser real}$$

Entonces como:

$$\alpha^* = -\frac{i\hbar}{m_e} \langle m | \hat{x} \hat{p}_x | m \rangle \rightarrow \alpha = \frac{\hbar^2}{m_e} - \alpha^* \rightarrow \alpha + \alpha^* = \frac{\hbar^2}{m_e} = 2\alpha$$

## FÓRMULA DE BETHE PARA EL PODER DE FRENADO

Se tiene que (expresión obtenida por Bethe en 1937):

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{dT_s}{dx}\right)_c = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} \frac{N_{AZ}}{P_A} \left\{ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2 H}{\langle I \rangle_G^2 (1-\beta^2)} \right) - \beta^2 \right\}$$

Si definimos:

$$r_0^2 \equiv \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \quad C \equiv \pi \frac{N_{AZ}}{P_A} r_0^2$$

Llegamos a:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{dT_s}{dx}\right)_c = \frac{2C m_e c^2 z^2}{\beta^2} \left\{ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2 H}{\langle I \rangle_G^2 (1-\beta^2)} \right) - \beta^2 \right\}$$

$$k \equiv \frac{2C m_e c^2 z^2}{\beta^2} = 0.1535 \frac{Z z^2}{P_A \beta^2} \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}}$$

$H \rightarrow$  Representa la **frontera** entre las **colisiones suaves** y **colisiones duras**

$\langle I \rangle_G \rightarrow$  Es muy difícil de calcular a partir de la **teoría atómica** y **se determina a partir de los poderes de frenado**. **Los electrones se desvían fácilmente: Usualmente se emplean protones (depende del medio y no del tipo de partícula cargada)**.

## ¿QUÉ OCURRE CON LA COLISIÓN DURA?

Si la **colisión es rápida** y tenemos que

$$\hat{w}(t) = -\frac{ze^2}{|\vec{R} - \vec{r}|} \quad |\vec{R} - \vec{r}| = \sqrt{\gamma^2 (vt - x)^2 + (b - y)^2 + z^2}$$

$$R \equiv \sqrt{\gamma^2 v^2 t^2 + b^2} \quad \gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2} \quad \beta \equiv v/c$$

Aparte de:

$$|x|, |y| \ll R \quad |x|, |y| \sim b$$

Lo **desarrollado anteriormente** aún puede aplicarse y sigue siendo válido

$$\hat{w}(t) = -\frac{Ze^2}{R} - \frac{Ze^2}{R^3} (\gamma v t x + b y) + \dots$$

Pero ahora

$$\sigma_{nm} = \frac{P_{nm}}{\phi_i} = 2\pi \int_{b_{max}}^{b_{min,H}} b db \Lambda_{nm}$$

Donde:  $b_{min,H}$  está asociado a  $H \sim \hbar^2 / 2m_e b_{min,H}^2$

$b_{max}$  está asociado a  $T_{max} \sim \hbar^2 / 2m_e b_{max}^2$

$M_0$  es la **masa de una partícula pesada** con **energía cinética** menor que su **masa en reposo**.

$H$  es la **energía de frontera** entre las colisiones **suaves** y **duras**.

$T_{max}$  es la **máxima energía transferida** a un **electrón atómico** en una **colisión frontal**.

**COLISIÓN DURA Y RÁPIDA**

Como antes, la suposición de **colisión rápida** conduce a que  $\xi \ll 1$  y entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{nm} &= \frac{8\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} \left\{ -\ln \left( \frac{\xi_{max}}{\xi_{min,H}} \right) - \frac{1}{2} \beta^2 \right\} \\ &= \frac{4\pi z^2 e^4}{\hbar^2 v^2} \left\{ -\ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min,H}} \right)^2 - \beta^2 \right\} \end{aligned}$$

por lo que

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{dT_h}{dx} \right)_c = k \left\{ \ln \left( \frac{T_{max}}{H} \right) - \beta^2 \right\}$$

La **máxima energía transferida** a una **partícula ligera en reposo** con  $\mu_e \equiv m_e c^2$  que **colisiona** con otra **pesada** con  $\mu_\alpha \equiv M_\alpha c^2$  de energía  $E$  se puede demostrar que viene dada por (exacto):

$$T_{max} = 2\mu_e \frac{E^2 - \mu_\alpha^2}{2E\mu_e + \mu_\alpha^2 + \mu_e^2}$$

Si  $\mu_\alpha \gg \mu_e$

$$T_{max} \approx 2\mu_e \frac{E^2 - \mu_\alpha^2}{\mu_\alpha^2} = 2\mu_e \frac{p_\alpha^2 c^2}{E^2 - p_\alpha^2 c^2} = 2m_e c^2 \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$$

$$\frac{p_\alpha^2 c^2}{E^2} = \frac{M_\alpha^2 v_\alpha^2 c^2 (1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2) M_\alpha^2 c^4} = \frac{v_\alpha^2}{c^2} = \beta^2$$

**MÁXIMA ENERGÍA TRANSFERIDA**

Antes de la colisión  $\longrightarrow (E + \mu_e, \vec{p}_\alpha c)$

Después de la colisión  $\longrightarrow (E'_\alpha + E'_e, \vec{p}'_\alpha + \vec{p}'_e)$

Producto escalar de cuadvectores es un invariante Lorentz:

$$(E + \mu_e)^2 - \vec{p}_\alpha^2 c^2 = (E'_\alpha + E'_e)^2 - (\vec{p}'_\alpha + \vec{p}'_e)^2 c^2$$

Como  $\mu_\alpha^2 = E^2 - \vec{p}_\alpha^2 c^2 = (E'_\alpha)^2 - \vec{p}'_\alpha^2 c^2$  y  $\mu_e^2 = (E'_e)^2 - \vec{p}'_e^2 c^2$

la expresión asociada al invariante Lorentz se convierte en

$$\mu_\alpha^2 + \mu_e^2 + 2\mu_e E = \mu_\alpha^2 + \mu_e^2 + 2E'_\alpha E'_e - 2\vec{p}'_\alpha \cdot \vec{p}'_e$$

que se simplifica para dar  $\mu_e E = E'_\alpha E'_e - \vec{p}'_\alpha \cdot \vec{p}'_e$  y si consideramos conservación de energía y momentum:

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}'_\alpha + \vec{p}'_e \quad E + \mu_e = E'_\alpha + E'_e$$

lo anterior se reduce a  $\mu_e E + \mu_e^2 = E'_e (E + \mu_e) - \vec{p}'_\alpha \cdot \vec{p}'_e$  por lo que

$$E'_e = \frac{\mu_e (E + \mu_e) + \vec{p}'_\alpha \cdot \vec{p}'_e}{(E + \mu_e)} = \mu_e + \frac{\vec{p}'_\alpha \cdot \vec{p}'_e}{E + \mu_e} = \mu_e + T'_e$$

Entonces:

$$T'_{e,max} = \frac{p_\alpha p'_e}{E + \mu_e} = \frac{p_\alpha \sqrt{(E'_e)^2 - \mu_e^2}}{E + \mu_e} = \frac{p_\alpha \sqrt{T'_{e,max} (T'_{e,max} + 2\mu_e)}}{E + \mu_e}$$

### MÁXIMA ENERGÍA TRANSFERIDA

Tomando el cuadrado de lo anterior y simplificando se obtiene:

$$T'_{e,max} = \frac{p_{\alpha}^2}{(E + \mu_e)^2} (T'_{e,max} + 2\mu_e) \rightarrow T'_{e,max} \left[ 1 - \frac{p_{\alpha}^2}{(E + \mu_e)^2} \right] = \frac{2\mu_e p_{\alpha}^2}{(E + \mu_e)^2}$$

y entonces

$$T'_{e,max} = \frac{2\mu_e p_{\alpha}^2}{(E + \mu_e)^2 - p_{\alpha}^2} = \frac{2\mu_e (E^2 - \mu_{\alpha}^2)}{(E + \mu_e)^2 - E^2 + \mu_{\alpha}^2} = \frac{2\mu_e (E^2 - \mu_{\alpha}^2)}{2\mu_e E + \mu_e^2 + \mu_{\alpha}^2}$$

en el caso particular de que  $\mu_{\alpha} = \mu_e$  tenemos

$$T'_{e,max} = \frac{2\mu_e (E^2 - \mu_e^2)}{2\mu_e E + \mu_e^2 + \mu_e^2} = \frac{E^2 - \mu_e^2}{E + \mu_e} = E - \mu_e = T$$

donde  $T$  es la **energía cinética de la partícula incidente**.

Si las partículas **no solamente tienen la misma masa (ejemplo: positrón y electrón)**, sino que **son idénticas (ejemplo: un par de electrones)**, entonces se toma **convencionalmente el electrón de mayor energía como "incidente"**. Como hay **indistinguibilidad**, se debe tener **simetría** que nos lleva necesariamente a

$$T'_{e,max} = \frac{1}{2}(E - \mu_e) = \frac{1}{2}T$$

## COLISIÓN DURA Y RÁPIDA

Entonces el **poder de frenado de colisión** es

$$\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_c \equiv \left(\frac{dT_s}{\rho dx}\right)_c + \left(\frac{dT_h}{\rho dx}\right)_c = k \left\{ \ln \left[ \frac{2m_e c^2 \beta^2 T_{max}}{\langle I \rangle_G^2 (1 - \beta^2)} \right] - 2\beta^2 \right\}$$

y reemplazando  $T_{max}$  tenemos

$$\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_c = 2k \left\{ \ln \left[ \frac{2m_e c^2 \beta^2}{\langle I \rangle_G^2 (1 - \beta^2)} \right] - \beta^2 \right\}$$

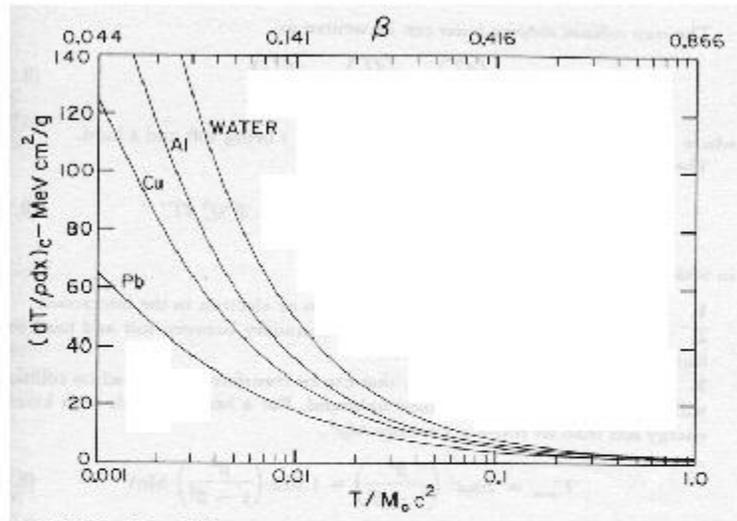
**Notamos que el poder de frenado de colisión másico:**

- **Depende de las características del medio:** Factor  $Z/p_A$  en la constante  $k$  e  $\langle I \rangle_G$
- **Dependencia de la carga** de la partícula en  $k$  como  $z^2$
- **No aparece la masa de la partícula cargada** (pesada)
- **Dependencia de la velocidad de la partícula:** La más importante va como  $1/\beta^2$  cuando  $\beta \rightarrow 0$  (asociado al **pico de Bragg**)

$$\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_c = \frac{4\pi N_A Z}{P_A} \frac{r_0^2 m_e c^2 z^2}{\beta^2} \left\{ \ln \left[ \frac{2m_e c^2 \beta^2}{\langle I \rangle_G^2 (1 - \beta^2)} \right] - \beta^2 \right\}$$

## Interacciones de Partículas Cargadas con la Materia

### DEPENDENCIA DE LA VELOCIDAD PARA PARTÍCULAS PESADAS Y RÁPIDAS



- Poder de frenado de colisión másico para partículas cargadas pesadas con  $z=1$  (tomado de [H. Bichsel](#), *Charged Particle Interactions* en *Radiation Dosimetry*, Vol. I, H. Attix and W. Roesch (editors), Academic Press, New York, New York, USA, 1968).
- Para  $\beta \rightarrow 1$  hay una **subida** que no se muestra en la figura.
- No podemos esperar que la **fórmula para el poder de frenado** sea válida en el límite  $\beta \rightarrow 0$  (por haber considerado la **aproximación de partícula rápida**).

¿QUÉ OCURRE CUANDO LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA CARGADA NO ES MUCHO MAYOR QUE LA DE LOS ELECTRONES ATÓMICOS?

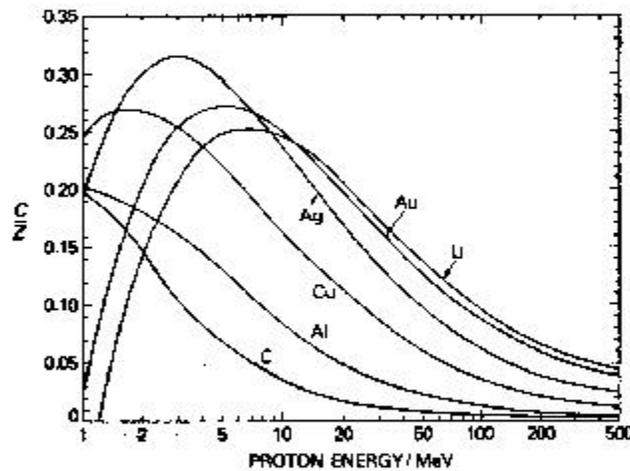
Los **electrones** que tienen **más alta velocidad** se afectan más:

- Los **electrones de la capa K** (más interna) **se afectan primero** ¿Por qué? Hay que proporcionar **más energía** para que la transferencia tenga lugar. Recordemos que a **mayor confinamiento, mayor energía**.
- Después continúan **L, M, etc.**
- Hay una **sobreestimación** del valor de  $\langle I \rangle_G$ , ya que debe **excluir los niveles que no contribuyen** y esto se traduce en una **subestimación** por del poder de frenado.
- Se introduce un término **semiempírico**  $C_K/Z$  es decir

$$\left( \frac{dT}{\rho dx} \right)_c = \frac{4\pi N_A Z}{P_A} \frac{r_0^2 m_e c^2 Z^2}{\beta^2} \left\{ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2}{\langle I \rangle_G (1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 - \frac{C_K}{Z} \right\}$$

## Interacciones de Partículas Cargadas con la Materia

¿QUÉ OCURRE CUANDO LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA CARGADA NO ES MUCHO MAYOR QUE LA DE LOS ELECTRONES ATÓMICOS?

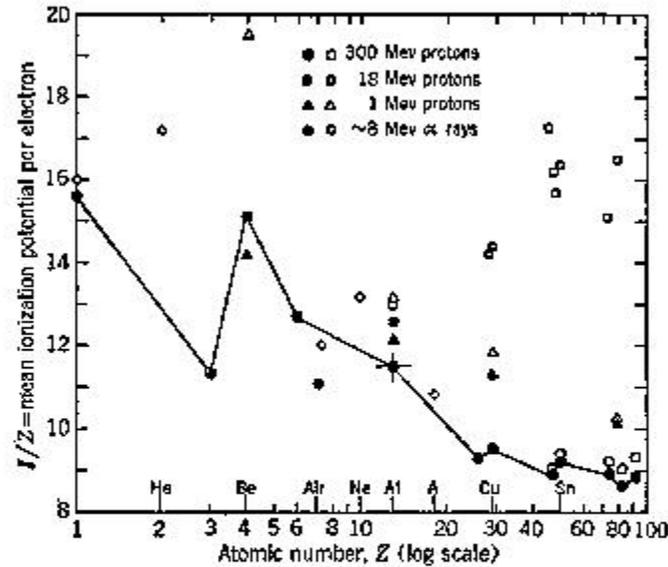


- El término  $C_K/Z$  depende del medio y de la velocidad de la partícula.
- Si más de una capa tiene que ser removida, entonces:

$$C = C_K + C_L + C_M + \dots$$

[propuesto por D. C. Sachs and J. R. Richardson, *Phys. Rev.* 83(1951)834].

¿QUÉ SUCEDE CON  $\langle I \rangle_G$  AL INTRODUCIR LAS CORRECCIONES DE CAPA?



- En la figura se representa  $\langle I \rangle_G / Z$  vs  $Z$ .
- Cuando  $C_K = 0$  los **valores** están **dados** en la gráfica por **símbolos sin relleno** (crece con el número atómico).
- Cuando  $C_K \neq 0$  los **valores** están **dados** en la gráfica por **símbolos con relleno** (decrece con el número atómico).
- Resulta muy **difícil estimar**  $\langle I \rangle_G$  a partir de la **teoría**.

## PODER DE FRENADO DE COLISIÓN PARA ELECTRONES Y POSITRONES

Para **obtener la fórmula** en este caso hay que combinar:

- **Fórmula de Bethe** para las **colisiones suaves**.
- Expresión para **colisiones duras** basada en **dispersión de Moller** (electrones) ó de **Bhabha** (positrones).

Con **electrones** la **contribución** de las **colisiones suaves** viene dada por:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{dT_s}{dx}\right)_c = k \left\{ \ln \left[ \frac{2m_e c^2 \beta^2 H}{(I)_G^2 (1-\beta^2)} \right] - \beta^2 \right\} = k \left\{ \ln \left[ \frac{2\mu_e^2 h \tau (\tau + 2)}{(I)_G^2} \right] - \beta^2 \right\}$$

ya que:

$$h \equiv \frac{H}{\mu_e} \quad \mu_e \equiv m_e c^2 \quad \tau \equiv \frac{T}{\mu_e}$$

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{p_e^2 c^2}{E^2 - p_e^2 c^2} = \frac{E^2 - \mu_e^2}{\mu_e^2} = (\tau + 1)^2 - 1 = \tau(\tau + 2)$$

Para incluir la **contribución** de las **colisiones duras** tomamos en el **orden más bajo** la **sección eficaz diferencial de Moller** (C. Moller, Ann. Physik 14(1932)531)), es decir, hemos considerado dos procesos con intercambio de un fotón.

## SECCIÓN EFICAZ DIFERENCIAL DE MOLLER

• Si definimos adicionalmente  $q \equiv Q/\mu_e$  donde  $Q$  es la **energía cedida** por el **electrón incidente**.

• La contribución al **poder de frenado de colisión másico** para **colisiones duras** corresponde a

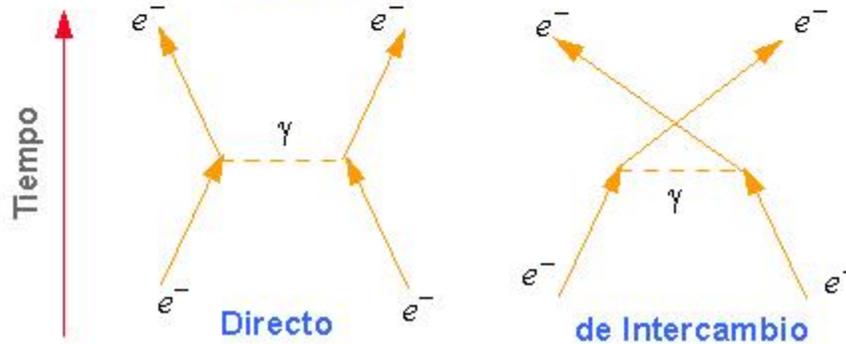
$$\mu_e \frac{n_A}{\rho} q d\sigma$$

• La **sección eficaz diferencial** de Moller (en términos de la energía cedida) viene dada por

$$d\sigma = \frac{2\pi e^2}{\mu_e^2 \beta^2} \frac{dq}{q^2} \frac{1}{(\tau - q)^2} \left\{ \tau^2 - \left[ 3 - \left( \frac{\tau}{\tau + 1} \right)^2 \right] q(\tau - q) + \frac{1}{(\tau + 1)^2} q^2 (\tau - q)^2 \right\}$$

$$= I_M(q) dq$$

• Los **procesos** asociados a lo anterior se resumen a través de los **diagramas**



**PODER DE FRENADO DE COLISIÓN DURA Y DISPERSIÓN ELECTRÓN-ELECTRÓN**

El **poder de frenado de colisión dura másico** en este caso es

$$\left(\frac{dT_h}{\rho dx}\right)_c = \mu_e \frac{n_A}{\rho} \int_h^{\tau/2} q dq \Gamma_M(q) \equiv \frac{2\pi e^4 n_A}{\mu_e \rho \beta^2} I_F$$

de manera que la **integral fundamental** se reduce a

$$\begin{aligned} I_F &\equiv \tau^2 \int_h^{\tau/2} \frac{dq}{q(\tau-q)^2} - \left[ 3 - \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^2 \right] \int_h^{\tau/2} \frac{dq}{\tau-q} + \frac{1}{(\tau+1)^2} \int_h^{\tau/2} q dq \\ &= 2 - \frac{\tau}{(\tau-h)} + \ln\left(\frac{\tau-h}{h}\right) - 2 \ln\left[\frac{2(\tau-h)}{\tau}\right] - \frac{(2\tau+1)}{(\tau+1)^2} \ln\left[\frac{2(\tau-h)}{\tau}\right] \\ &+ \frac{1}{2(\tau+1)^2} \left(\frac{\tau^2}{4} - h^2\right) \int_h^{\tau/2} \frac{dq}{q(\tau-q)^2} - \left[ \frac{1}{\tau(\tau-q)} - \frac{1}{\tau^2} \ln\left|\frac{\tau-q}{q}\right| \right] \Bigg|_h^{\tau/2} \end{aligned}$$

y entonces el **poder de frenado de colisión total** será

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_c &= \ln\left(\frac{2\mu_e^2 h \tau(\tau+2)}{\langle l \rangle_G^2}\right) - \beta^2 + 2 - \frac{\tau}{(\tau-h)} + \ln\left(\frac{\tau-h}{h}\right) \\ &- 2 \ln\left[\frac{2(\tau-h)}{\tau}\right] - \frac{(2\tau+1)}{(\tau+1)^2} \ln\left[\frac{2(\tau-h)}{\tau}\right] + \frac{1}{2(\tau+1)^2} \left(\frac{\tau^2}{4} - h^2\right) \end{aligned}$$

**PODER DE FRENADO DE COLISIÓN DURA  
Y DISPERSIÓN ELECTRÓN-ELECTRÓN**

Que es **equivalente** a

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \left( \frac{dT}{\rho dx} \right)_c &= \ln \left( \frac{2\mu_e^2 h \tau (\tau + 2) (\tau - h)}{\langle I \rangle_G^2} \frac{\tau^2}{4 h (\tau - h)^2} \right) - \beta^2 + 2 - \frac{\tau}{(\tau - h)} \\ &\quad - \frac{(2\tau + 1)}{(\tau + 1)^2} \ln \left[ \frac{2(\tau - h)}{\tau} \right] + \frac{1}{2(\tau + 1)^2} \left( \frac{\tau^2}{4} - h^2 \right) \\ &= \ln \left( \frac{\mu_e^2 \tau (\tau + 2)}{2 \langle I \rangle_G^2} \frac{\tau^2}{(\tau - h)} \right) - \beta^2 + 2 - \frac{\tau}{(\tau - h)} \\ &\quad - \frac{(2\tau + 1)}{(\tau + 1)^2} \ln \left[ \frac{2(\tau - h)}{\tau} \right] + \frac{1}{2(\tau + 1)^2} \left( \frac{\tau^2}{4} - h^2 \right) \end{aligned}$$

Si se **supone**  $\tau \gg h$

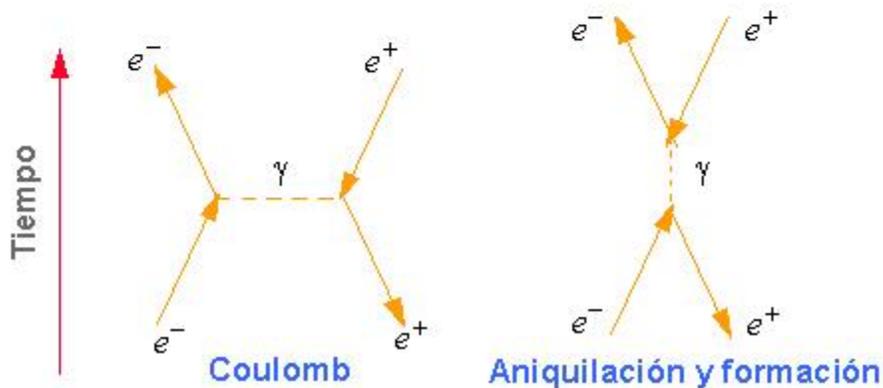
$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \left( \frac{dT}{\rho dx} \right)_c &= \ln \left( \frac{\mu_e^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2 \langle I \rangle_G^2} \right) + 1 - \beta^2 - \frac{(2\tau + 1)}{(\tau + 1)^2} \ln 2 + \frac{\tau^2}{8(\tau + 1)^2} \\ &= \ln \left( \frac{\mu_e^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2 \langle I \rangle_G^2} \right) + F^-(\tau) \end{aligned}$$

## SECCIÓN EFICAZ DIFERENCIAL DE BHABHA

La **sección eficaz diferencial de Bhabha** describe en el **orden más bajo** la **colisión positrón-electrón** (H. J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. (London) **A154** (1936) 195).

$$d\sigma = \frac{2\pi e^2}{\mu_e^2 \beta^2} \frac{dq}{q^2} \left\{ 1 - \beta^2 \left[ 2 \frac{q}{\tau} - 3q^2 \left( \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \right) - (q\tau - q^3\tau) \left( \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \right)^2 - (q^2\tau^2 - q^3\tau^3 + q^4\tau^2) \left( \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \right)^3 \right] \right\} = \Gamma_B(q) dq$$

Los **procesos asociados** se resumen a través de los **diagramas** de la figura. Las **partículas son ahora distinguibles** y hay dos posibilidades.



**PODER DE FRENADO DE COLISIÓN DURA  
Y DISPERSIÓN POSITRÓN-ELECTRÓN**

El **poder de frenado de colisión dura másico** en este caso es

$$\left(\frac{dT_h}{\rho dx}\right)_c = \mu_e \frac{n_A}{\rho} \int_h^\tau q dq \Gamma_B(q) \equiv \frac{2\pi e^4 n_A}{\mu_e \rho \beta^2} \tilde{I}_F$$

La **integral fundamental** se puede calcular de manera similar a como se hizo con la dispersión electrón-electrón: El **poder de frenado de colisión total** será

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_c &= \ln \left( \frac{\mu_e^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2 \langle I \rangle_G^2} \right) + 2 \ln 2 - \frac{\beta^2}{12} \left\{ 23 + \frac{14}{\tau + 2} + \frac{10}{(\tau + 2)^2} + \frac{4}{(\tau + 2)^3} \right\} \\ &= \ln \left( \frac{\mu_e^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2 \langle I \rangle_G^2} \right) + F^+(\tau) \end{aligned}$$

El **poder de frenado de colisión másico** para colisiones **electrón-electrón** y **positrón-electrón** puede resumirse como

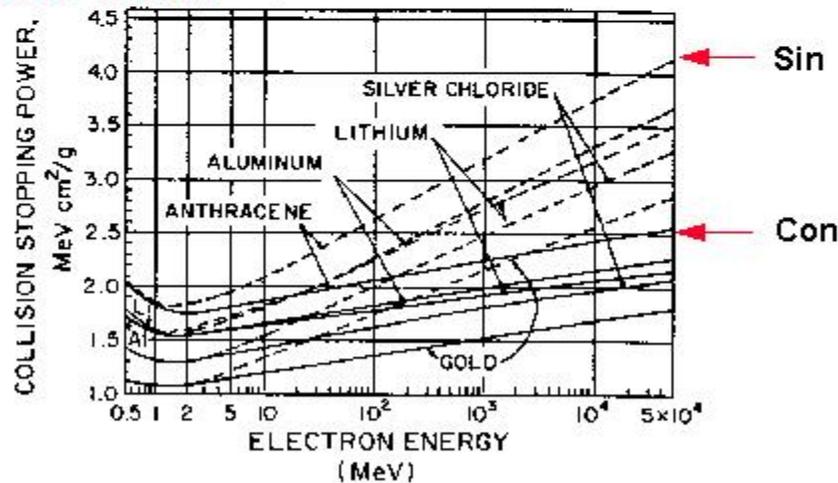
$$\frac{1}{k} \left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_c = \ln \left( \frac{\mu_e^2 \tau^2 (\tau + 2)}{2 \langle I \rangle_G^2} \right) + F^-(\tau) - 2 \frac{C}{Z} - \delta$$

donde  $\delta$  representa la **corrección de polarización**.

## CORRECCIÓN POR EFECTO DE LA DENSIDAD (POLARIZACIÓN)

- En **materia condensada** tiene lugar una **polarización** (formación de dipolos) con el **paso de la partícula cargada**.
- El efecto es despreciable en gases.
- Es apreciable en **líquidos y sólidos** (hay apantallamiento del campo coulombiano)

Lo anterior permite que haya una **disminución en la pérdida de energía**  $-\delta$ .



[Sternheimer et al., Density Effect for the Ionization Loss of Charged Particles, Phys. Rev. B3 (1982) 3681].

## PODER DE FRENADO RADIATIVO MÁSCICO

- **Electrones y positrones** son suficientemente **ligeros** para producir **Bremsstrahlung**.
- Si tenemos un **núcleo** de carga  $Ze$ .
- La **sección eficaz diferencial** (en términos de la **energía del electrón incidente** y la **energía del fotón emitido**) viene dada por (H. A. Bethe and W. Heitler, Proc. Roy. Soc. A146 (1934) 83).

$$d\sigma(\omega, E) = \alpha_{FS} Z^2 r_0^2 \frac{E}{E - \mu_e} \tilde{B}(\omega, E) \frac{d\omega}{\omega}$$

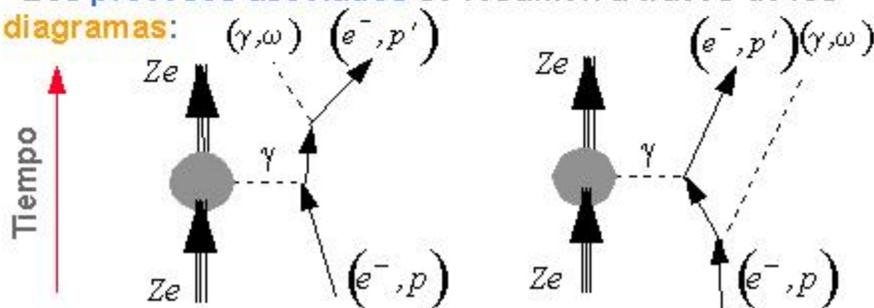
donde

$$\alpha_{FS} \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \quad r_0 \equiv \frac{e^2}{m_e c^2}$$

$$\gamma \equiv \frac{E}{\mu_e} \quad \gamma' \equiv \frac{E'}{\mu_e} \quad \zeta \equiv \frac{\omega}{\mu_e} \quad \gamma' = \gamma - \zeta \quad E = T + \mu_e$$

y la **función**  $\tilde{B}(\omega, E)$  **varía lentamente** con  $\omega$  y  $E$ .

- Los **procesos asociados** se resumen a través de los **diagramas**:



**PODER DE FRENADO RADIATIVO MÁSIKO**

$$\tilde{B}(\omega, E) = B(\zeta, \tau) = \frac{\tau}{\tau+1} \frac{\gamma\beta' d\zeta}{\gamma\beta c} \left\{ \frac{4}{3} - \frac{2}{(\beta'\beta)^2} \left( \frac{\gamma}{\gamma'} + \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{2}{\gamma\gamma'} \right) + \left( \Lambda_1 \frac{\gamma'}{\gamma^2-1} + \Lambda_2 \frac{\gamma}{(\gamma')^2-1} - \Lambda_1\Lambda_2 \right) \right. \\ \left. + \Lambda_0 \left[ \frac{8}{3} \gamma\gamma' + \zeta^2 \left( \frac{1}{(\beta'\beta)^2} + 1 \right) + \frac{1}{2}\zeta \left( \Lambda_1 \left( 1 + \frac{\gamma'}{\beta^2\gamma} \right) - \Lambda_2 \left( 1 + \frac{\gamma}{(\beta')^2\gamma'} \right) + 2 \frac{\zeta}{(\beta'\beta)^2\gamma\gamma'} \right) \right] \right\}$$

$$\sigma_0 \equiv \frac{1}{137} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 0.580 \text{ mb}$$

donde

$$\Lambda_0 \equiv \frac{2}{\beta\gamma\beta'\gamma'} \ln \left[ \frac{\gamma\gamma'(1+\beta\beta')-1}{\zeta} \right] \quad \Lambda_1 \equiv \frac{1}{\beta\gamma} \ln \left( \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \quad \Lambda_2 \equiv \frac{1}{\beta'\gamma'} \ln \left( \frac{1+\beta'}{1-\beta'} \right)$$

El poder de frenado radiativo másiko está dado por

$$\left( \frac{dT}{\rho dx} \right)_\gamma = \mu_e \frac{n_A}{\rho} \int_0^\tau \zeta d\sigma = \mu_e \sigma_0 \frac{n_A}{\rho} Z^2 (\tau+1) \int_0^1 B(\zeta, \tau) d\left( \frac{\zeta}{\tau} \right)$$

como

$$\langle B_\gamma \rangle \equiv \int_0^1 B(\zeta, \tau) d\left( \frac{\zeta}{\tau} \right) \quad \frac{n_A}{\rho} = \frac{N_A}{P_A}$$

resulta

$$\left( \frac{dT}{\rho dx} \right)_\gamma = \mu_e \sigma_0 \frac{n_A}{\rho} Z^2 (\tau+1) \langle B_\gamma \rangle$$

## PODER DE FRENADO RADIATIVO MÁSIKO

Con lo anterior se puede hacer la **estimación**:

$$T \ll 0.5 \text{ MeV} \rightarrow \langle B_r \rangle = \frac{16}{3}$$

$$T = 1 \text{ MeV} \rightarrow \langle B_r \rangle = 6$$

$$T = 10 \text{ MeV} \rightarrow \langle B_r \rangle = 12$$

$$T = 100 \text{ MeV} \rightarrow \langle B_r \rangle = 15$$

**Tablas para**  $\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_r$  : M. J. Berger and S. M. Seltzer, **Stopping Powers and Ranges of Electrons and Positrons**, NBSIR 82-2550-A. National Bureau of Standards (hoy NIST), Washington, D.C., 20234, **1983**. (Attix: Apéndice E).

Como: 
$$\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_r = \sigma_0 \frac{n_A}{\rho} Z^2 (T + m_e c^2) \langle B_r \rangle$$

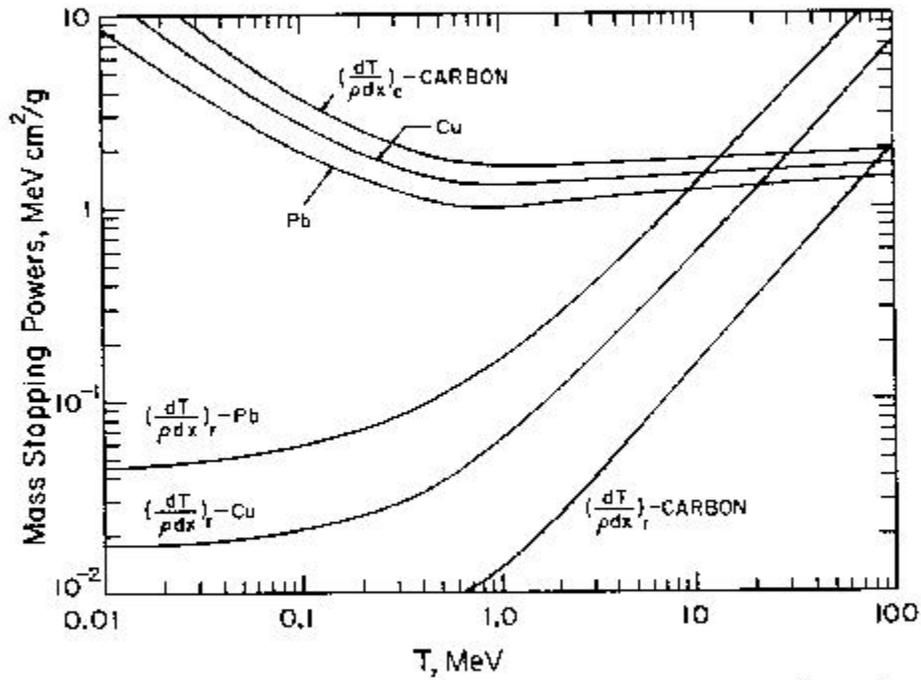
Para  $T \gg m_e c^2$  se tiene (**altas energías**: **Comparables**)

$$\frac{\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_r}{\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_c} \approx \frac{T Z}{\tilde{C}_0} \quad \text{con} \quad \tilde{C}_0 \rightarrow 700 \sim 800 \text{ MeV}$$

**Poder de frenado másiko total:**

$$\left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_{\text{Total}} = \left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_c + \left(\frac{dT}{\rho dx}\right)_r$$

PODER DE FRENADO RADIATIVO MÁSIICO  
PARA ELECTRONES



[Tomado de [H. Bichsel](#), *Charged Particle Interactions* en *Radiation Dosimetry*, Vol. I, H. Attix and W. Roesch (editors), Academic Press, New York, New York, USA, 1968].