Módulo de Instrumentación 2023

Clase 20: Explorando Sistemas No Lineales

Mario Cosenza

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

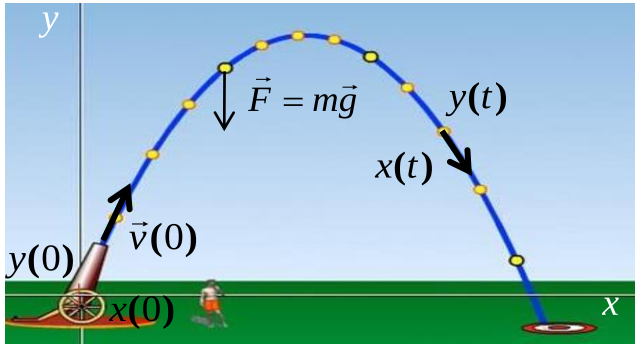
Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Sistemas dinámicos deterministas

Ciencia: fenómenos naturales se pueden comprender como relaciones *causa-efecto*.
Relaciones se expresan en lenguaje matemático: ecuaciones, reglas, funciones.
Sistemas físicos, biológicos, químicos, económicos , etc.

Ejemplo: Mecánica Clásica.
Leyes de Newton para el movimiento.

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$



$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ vector posición en tiempo t

Conociendo posición inicial ($x(0)$, $y(0)$) y velocidad inicial (v_{ox}, v_{oy}) → trayectoria ($x(t)$, $y(t)$) está determinada.

Regla determinista: operación que permite calcular el estado de un sistema en un tiempo posterior a partir del conocimiento de su estado en un tiempo anterior**.**
Regla: *t* continuo, *t* discreto, algoritmo.

$\boldsymbol{x(t)}$ **:** Conjunto de variables del estado del sistema en el tiempo *t.*

antes / después

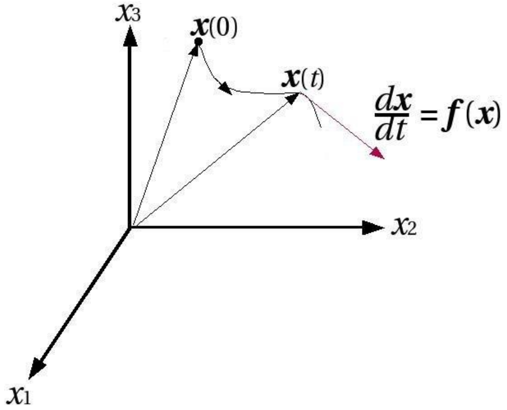
$$x(t) \xrightarrow{\boldsymbol{R}} x(t+\tau)$$

Sistemas dinámicos y espacio de fase

Estado de muchos sistemas se puede describir mediante un conjunto de *N* variables reales (posición, velocidad, presión, densidad, temperatura, etc)

$$\boldsymbol{x}(t) = \big(x_1(t), x_2(t) \cdots, x_N(t)\big) \in U \subset \mathbb{R}^N$$

Espacio de fase: espacio euclidiano *N*-dimensional *U* donde cada coordenada x_i representa una variable del sistema.
Evolución del sistema se puede ver como un cambio del vector ***x***(t) (análogo a posición) en su espacio de fase.



La evolución de muchos sistemas dinámicos con *t* continuo se puede describir mediante ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \lambda) \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)) = (f_1\,(x_1(t)), f_2(x_2(t)) \cdots, f_N(x_N(t))) \qquad \lambda\text{: parámetros.}$$

Equivalente a sistema de *N* ecuaciones diferenciales de primer orden (sistema autónomo):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, x_2, \cdots, x_N) \end{aligned}$$

En general, una ecuación diferencial de orden N se puede expresar como N ecuaciones diferenciales de primer orden.

Solución ***x***(*t*) determinada por condiciones iniciales: $\boldsymbol{x}(0) = \big(x_1 0, x_2(0) \cdots, x_N(0)\big)$.

Si ***f***(***x***(t),t) depende explícitamente de *t* → sistema forzado.

Solución estacionaria o punto fijo ***x**** : $\frac{d\boldsymbol{x}^*}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*, \lambda) = 0$

Teorema de existencia y unicidad

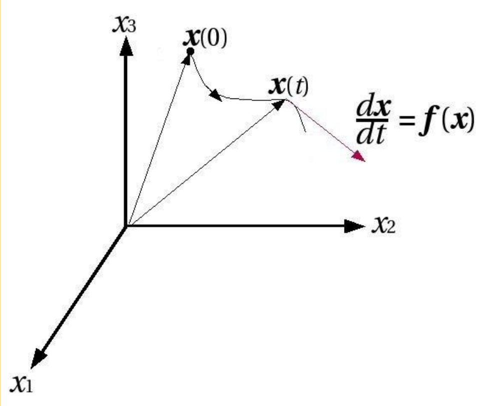
Considerar un sistema dinámico $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$ definido en un subespacio $U \subset \mathbb{R}^N$

tal que **f**(**x**) satisface la *propiedad de Lipschiptz:* $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \leq k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$

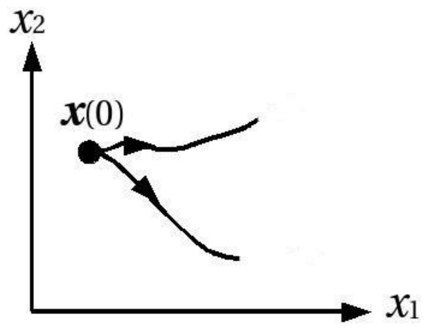
para algún k < ∞, donde $|\boldsymbol{x}| = \left(\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{x}_N^2\right)^{1/2}$

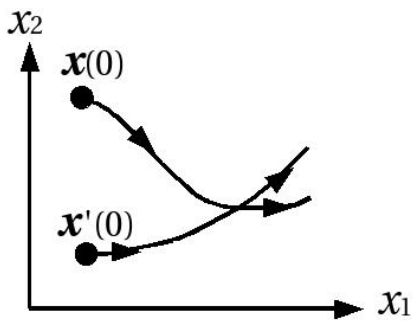
Dada un condición inicial $\boldsymbol{x}(0) \in U$,

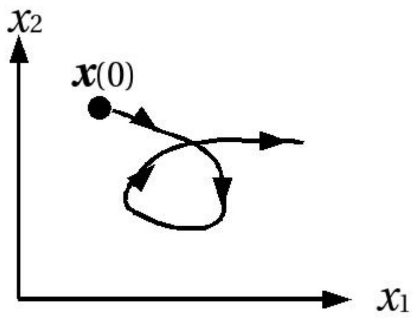
existe una solución única x(t) que satisface el sistema dinámico para *t* ϵ (0, *τ*) y que pasa por ***x***(0).



Situaciones prohibidas por el Teorema de unicidad en el espacio de fase:







Atractor: estado dinámico asintótico en espacio de fase.

Los únicos estados asintóticos posibles en un espacio de fase bidimensional son puntos fijos o trayectorias cerradas (periódicas).

Sistemas lineales vs. no lineales

Lineal: suma de las causas = suma de los efectos. Principio de superposición: si x(t) y y(t) son soluciones, entonces x(t)+y(t) es solución.

No lineal: efecto no es proporcional a la causa. No se cumple principio de superposición: $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$

Sistemas lineales: existen métodos generales para encontrar soluciones en términos de funciones u operaciones elementales: polinomios, exponenciales, trigonométricas. Soluciones son regulares, periódicas, suaves.

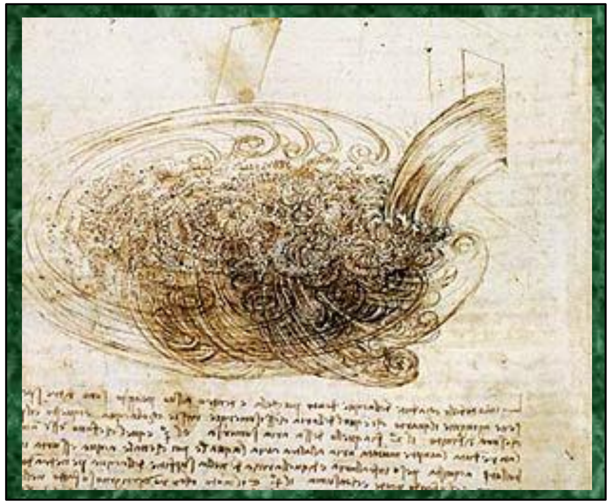
Sistemas no lineales: no hay métodos generales; soluciones son particulares; comportamiento puede ser irregular.
En general, soluciones se obtienen por métodos numéricos, computacionales, o experimentales.

Sistemas no lineales abundan en la naturaleza.

Ejemplo clásico: turbulencia en fluidos, impredecible en tiempo y espacio.

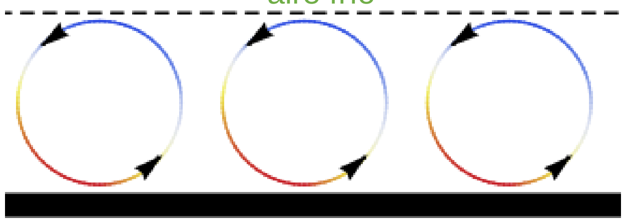
"Hay un problema físico que es común en muchos campos, que es muy antiguo y que no ha sido resuelto: es el problema de la turbulencia".

Richard Feynman, *Lectures on Physics* (1963).



Sistema no lineal: Ecuaciones de Lorenz

Edward Lorenz (1963):
modelo simplificado de corrientes de convección en la atmósfera.



Ecuaciones de Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y$$

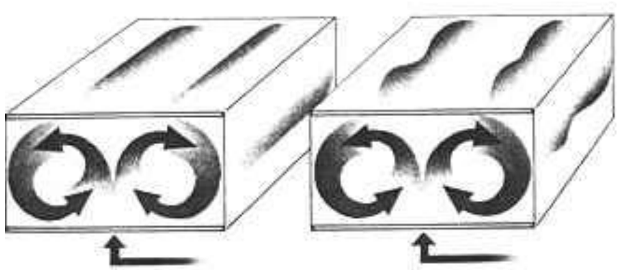
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Variables de estado del sistema:

x: velocidad de convección
y: temperatura en dirección longitudinal
z: temperatura en dirección vertical

Parámetros:

a: conductividad térmica
b: factor geométrico
r: número de Rayleigh

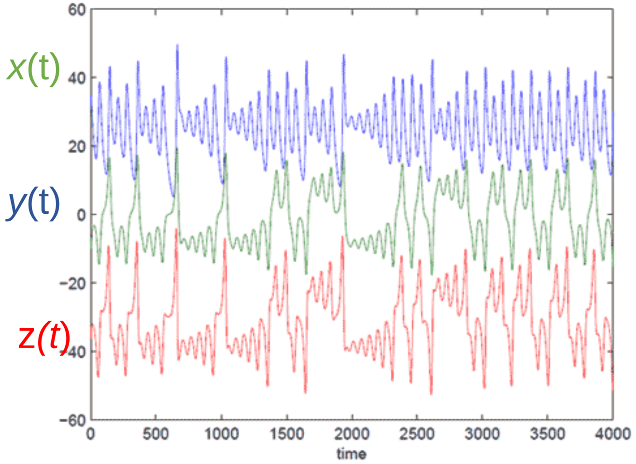


$r < r_c$
periódico

$r > r_c$
irregular

Solución numérica:
parámetros fijos , $r > r_c$,
dados valores iniciales $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$

Computador Royal McBee

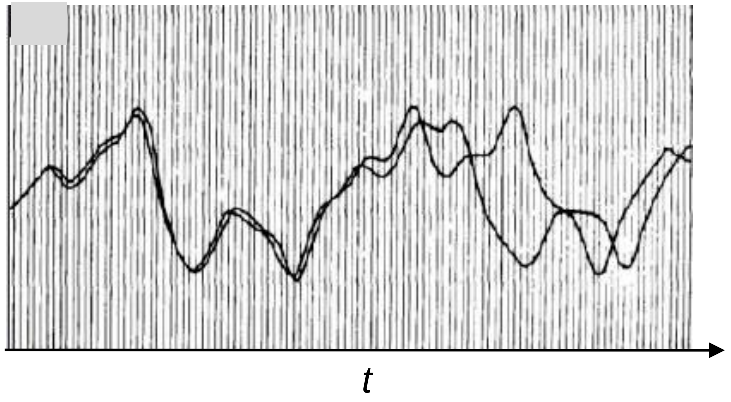


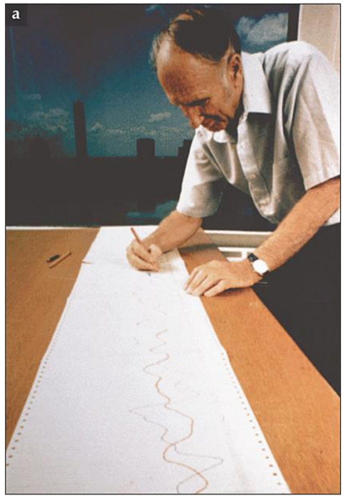
El efecto mariposa: descubrimiento del caos

Caos: sensibilidad extrema de la trayectoria ante pequeños cambios en las condiciones iniciales

x(0)= 5.061271
x'(0)=5.06127

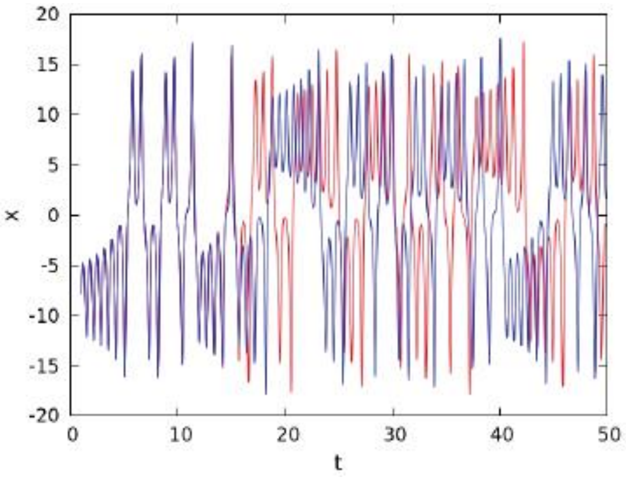
$\Delta x(0) = 10^{-6}$





E. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow,* Journal of Atmospheric Sciences **20**, 130 (1963).

- Perturbación inicial → clima impredecible a largo plazo.
- Comportamiento genérico en sistemas de ecuaciones no lineales.



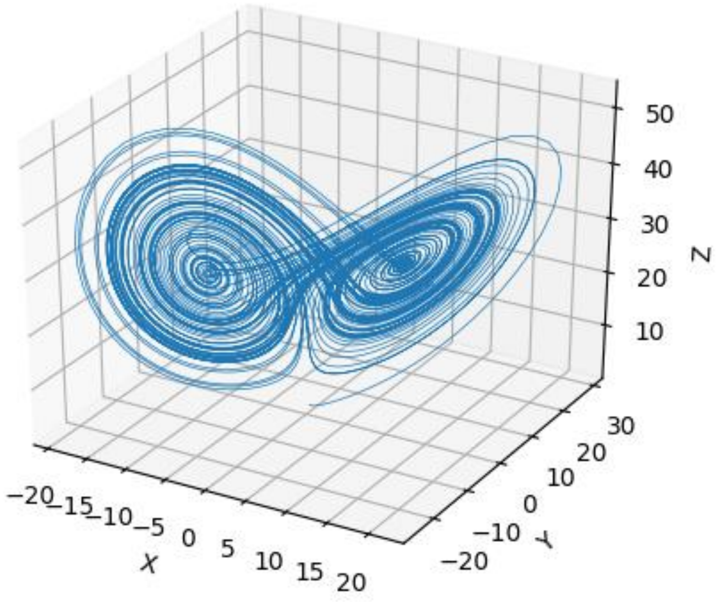
Condiciones iniciales de trayectorias
rojo y azul difieren en 10^{-12}:

"Does the flap of a butterfly's wing set off a tornado in Texas?"
Titulo de una charla de Lorenz en una conferencia en 1972.

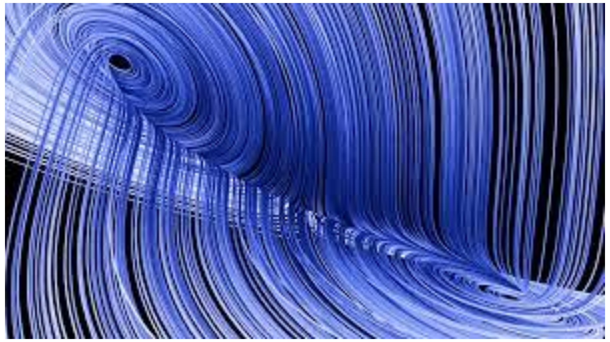
Tema literario, arte, cine, cultura.

Atractor de Lorenz

Solución en espacio de variables x,y,z: “atractor extraño”

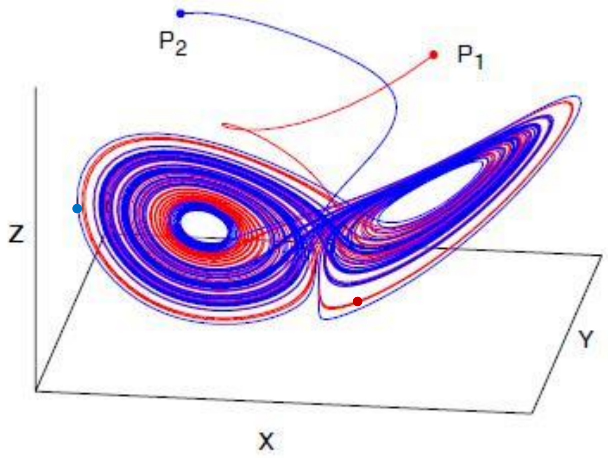


Magnificación



Atractor “extraño” posee geometría fractal.

Distintas condiciones iniciales recorren el atractor en forma diferente.

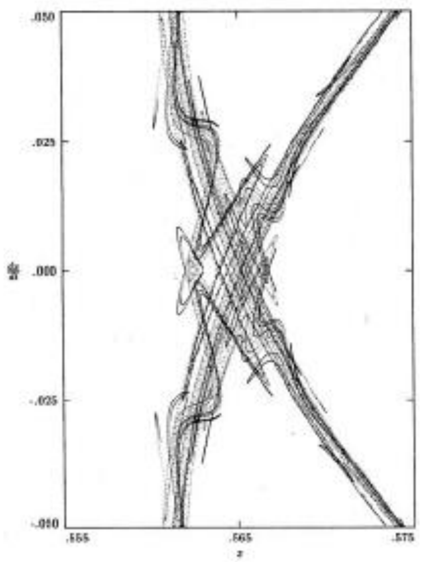


¡Lorenz pasó desapercibido por 12 años!

El nombre *“caos”* aparece por primera vez:

T. Y. Li, J. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82**, 985 (1975).

La increíble visión de Poincaré



Henri Poincaré estudió la estabilidad del sistema solar;
en particular el problema gravitacional de 3 cuerpos:

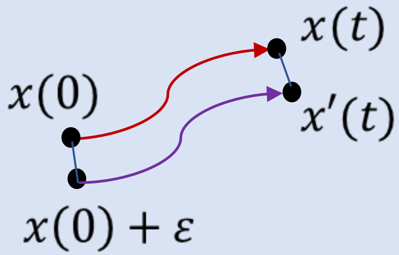
“Puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales conduzcan a grandes diferencias en los resultados finales. La predicción se vuelve imposible”.

“Cada curva nunca se intersecta a sí misma, sino que se pliega sobre sí misma de un modo muy intrincado. Uno se queda atónito frente a la complejidad de esta forma, la cual no intentaré siquiera dibujarla”.

Les Méthodes Nouvelles de la Mecanique Céleste (1903).

Comportamiento de sistema no lineal puede experimentar grandes cambios al variar un parámetro:

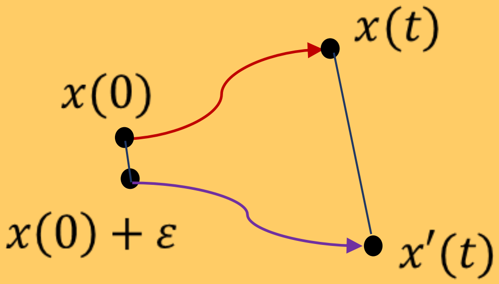
Regular, predecible



ε: pequeña perturbación de condición inicial

variariando parámetro

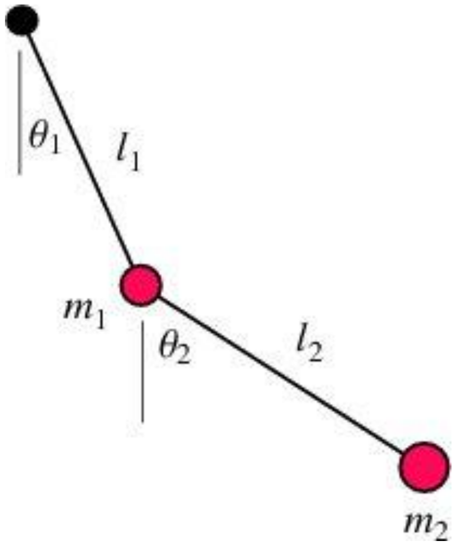
CAOS:
Sensibilidad extrema de la evolución de un sistema determinista no lineal ante perturbaciones de sus condiciones iniciales.



- **No viola el Teorema de Unicidad: determinismo implica predicción.**
- **Predicción no es estable.**

Caos en el péndulo doble

Péndulo doble: sistema determinista.
Leyes de Newton → Ecuaciones de movimiento para θ_1, θ_2 son no lineales:



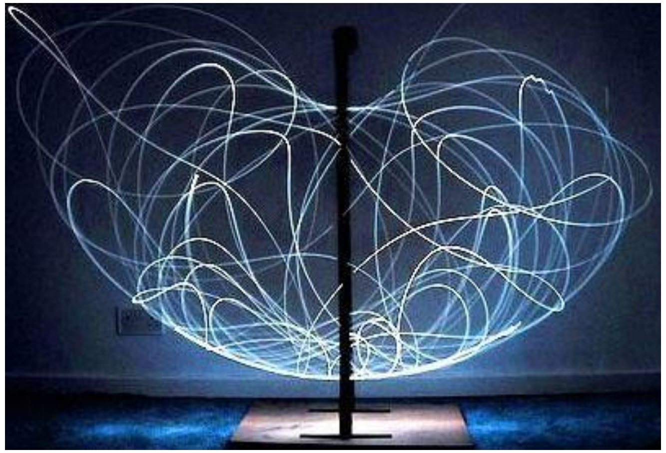
$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin\theta_2\cos\Delta\theta - \mu\sin\theta_1) - (l_2\dot{\theta}_2^2 + l_1\dot{\theta}_1^2\cos\Delta\theta)\sin\Delta\theta}{l_1(\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\sin\theta_1\cos\Delta\theta - \sin\theta_2) - (\mu l_1\dot{\theta}_1^2 + l_2\dot{\theta}_2^2\cos\Delta\theta)\sin\Delta\theta}{l_2(\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

$$\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2} \qquad \Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

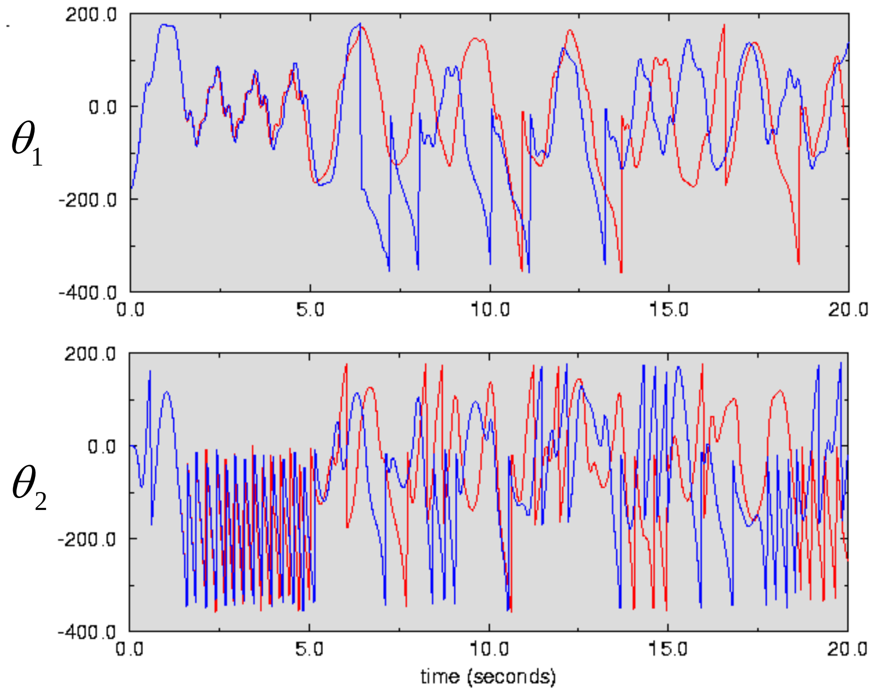
Evolución de θ_1, θ_2 periódica, predecible para ángulos iniciales pequeños.

Trayectoria de m_2 para amplitudes iniciales grandes →



Caos: evolución de θ_1, θ_2 irregular, impredecible; *extremadamente sensible a cambios infinitesimales en condiciones iniciales rojo-azul.*

$\Delta\theta_2(0) = \Delta\theta_2(0) = 10^{-3}$



Sistemas dinámicos con tiempo discreto: mapas

Mapas o **funciones iterativas** son sistemas dinámicos deterministas:

$$x_{n+1} = f(x_n, r) \qquad n = 0,1,2\ldots \qquad r = \text{parámetro}$$

$x_n, f \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ estados continuos, una variable.

Secuencia de iterados $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ para un valor r fijo: evolución con tiempo discreto.

$$x_0 \rightarrow x_1 = f(x_o) \rightarrow x_2 = f(x_1) \rightarrow x_3 = f(x_2) \cdots \Rightarrow x_n = f^{(n)}(x_0)$$

Mapas aparecen en muchos contextos:

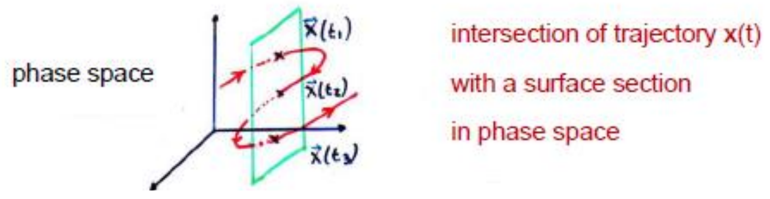
i) Series de datos experimentales en el tiempo.

ii) Integración numérica: $\dfrac{dx(t)}{dt} = g(x(t))$

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = g\big(x(t)\big) \rightarrow \text{asumir} \qquad t = n\Delta t, \;\; n=1,2,3,\ldots$$

$$\rightarrow x[(n+1)\Delta t] = g(x(n\Delta t)\Delta t + x(n\Delta t) \quad \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$

iii) Sección de Poincaré en espacio de fase de sistemas con estados continuos:



Serie temporal: $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \ldots, x(t_m)$

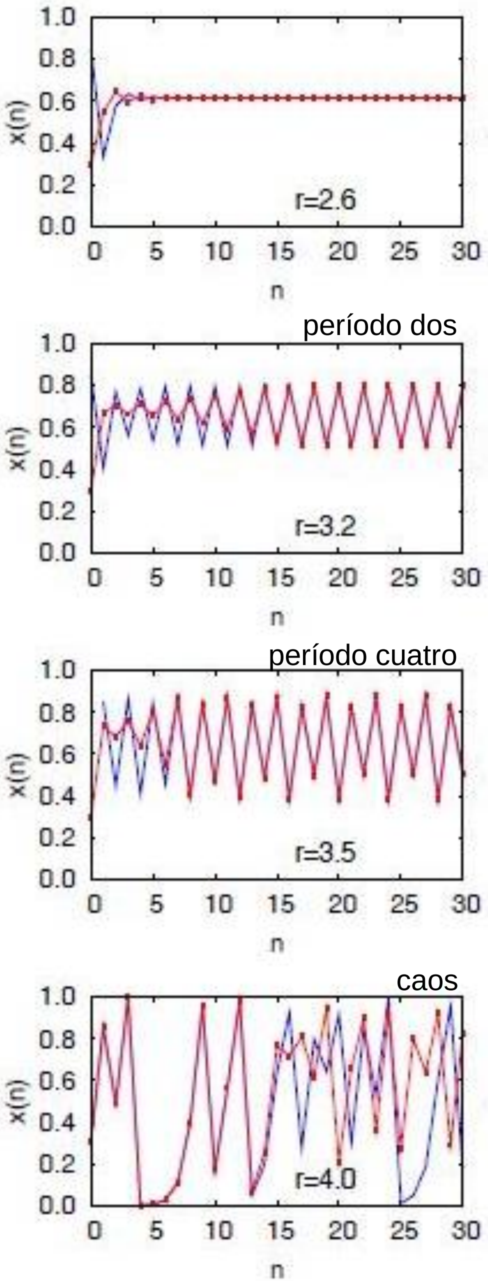
Ejemplo:
mapa logístico
(modelo de crecimiento
de población con
recursos limitados).

$$x_{n+1} = f(x_n) = r x_n (1 - x_n)$$

$$x_n \in [0,1]$$

Condiciones iniciales
rojo y azul diferentes

Caos: evolución irregular, extremadamente sensible a pequeños cambios Δx_o en condiciones iniciales rojo y azul
→ falta de predicción.



Resumen

Sistema dinámico determinista: $x(t) \xrightarrow{R} x(t+\tau)$ Dado x(o), evolución está determinada para $t > 0$.

R: ecuaciones diferenciales, funciones, mapas, algoritmo, instrucciones. *t*: continuo, discreto. **R** puede depender de parámetros λ.

R $\begin{cases} \text{lineal} \rightarrow \text{evolución regular, periódico, punto fijo, predecible, solución analítica (en general).} \\ \text{no lineal} \rightarrow \text{evolución puede ser irregular, impredecible, caótico (sensible a pequeños cambios en condiciones iniciales).} \end{cases}$

Propiedades de sistemas no lineales:

1) Comportamientos dinámicos distintos al variar λ (bifurcaciones). *E*xiste valor crítico λ_c para transición orden-caos.

periódico λ_c caos λ

2) $\lambda > \lambda_c$ comportamiento caótico.

- *No linealidad*: condición necesaria, pero no suficiente para caos.
- Dimensión espacio de fase > 2 para caos en sistemas con tiempo continuo.

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA **physics**

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.