

Módulo de Instrumentación 2023

# Clase 21: Pendúlo doble: caos en un sistema no lineal

Mario Cosenza



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



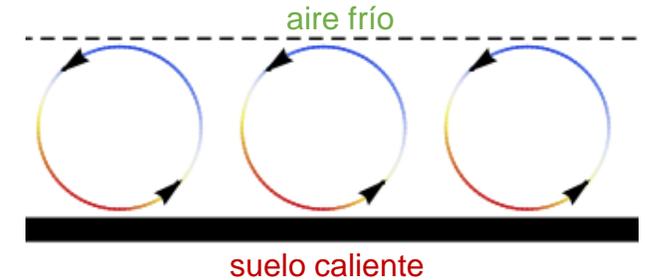
Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea





# Sistema no lineal: Ecuaciones de Lorenz

**Edward Lorenz (1963):**  
modelo simplificado de corrientes de convección en la atmósfera.



Ecuaciones de Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y$$

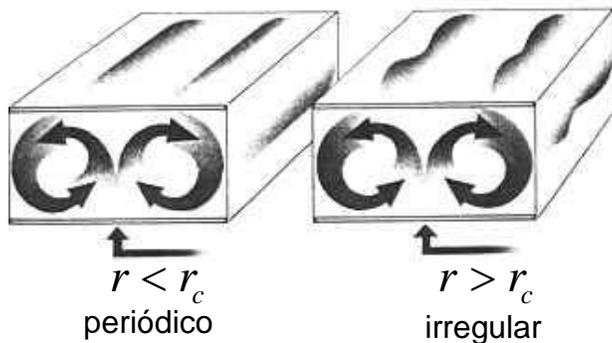
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Variables de estado del sistema:

$x$ : velocidad de convección  
 $y$ : temperatura en dirección longitudinal  
 $z$ : temperatura en dirección vertical

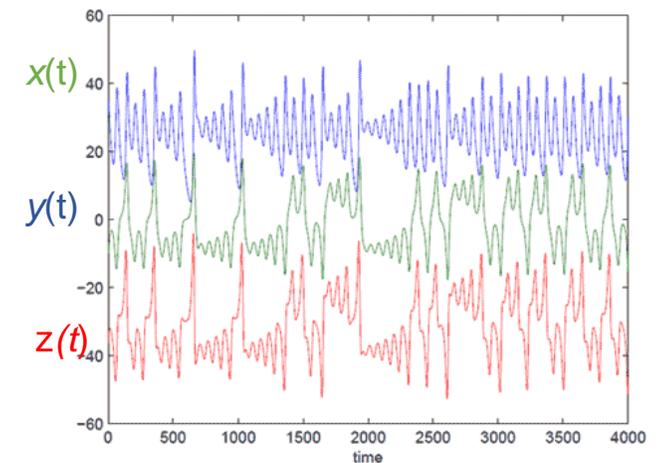
Parámetros:

$a$ : conductividad térmica  
 $b$ : factor geométrico  
 $r$ : número de Rayleigh



Solución numérica:  
parámetros fijos,  $r > r_c$ ,  
dados valores iniciales  $x(0), y(0), z(0)$

Computador Royal McBee

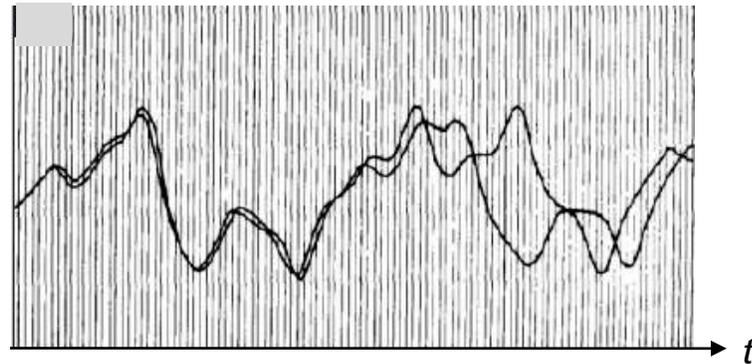




# El efecto mariposa: descubrimiento del caos

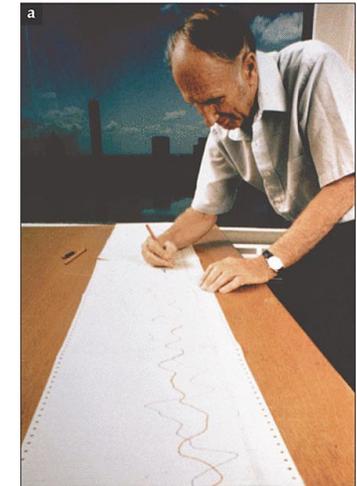
$$x(0) = 5.061271$$
$$x'(0) = 5.06127$$

$$\Delta x(0) = 10^{-6}$$

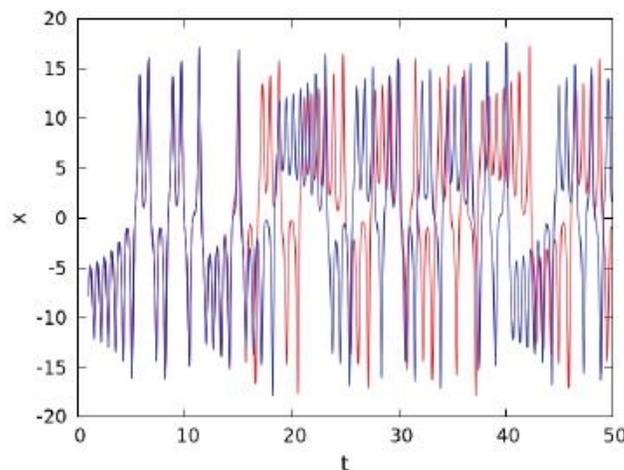


E. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of Atmospheric Sciences **20**, 130 (1963).

- Perturbación inicial → clima impredecible a largo plazo.
- Comportamiento genérico en sistemas de ecuaciones no lineales.



**Caos:** sensibilidad extrema de la evolución de un sistema bajo pequeños cambios en sus condiciones iniciales



Condiciones iniciales de trayectorias  
rojo y azul difieren en  $10^{-12}$ :

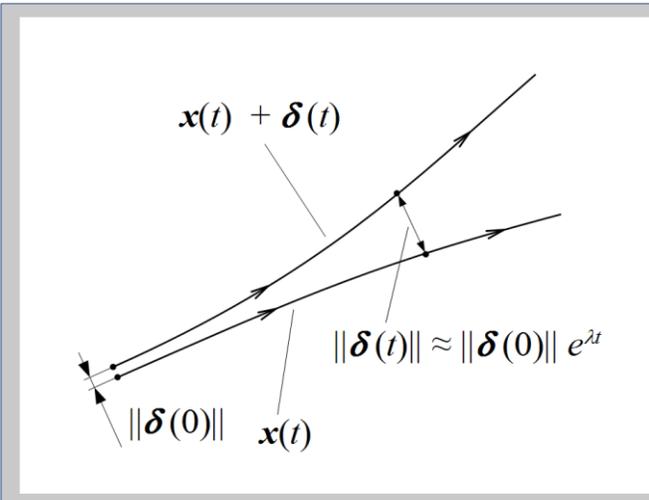
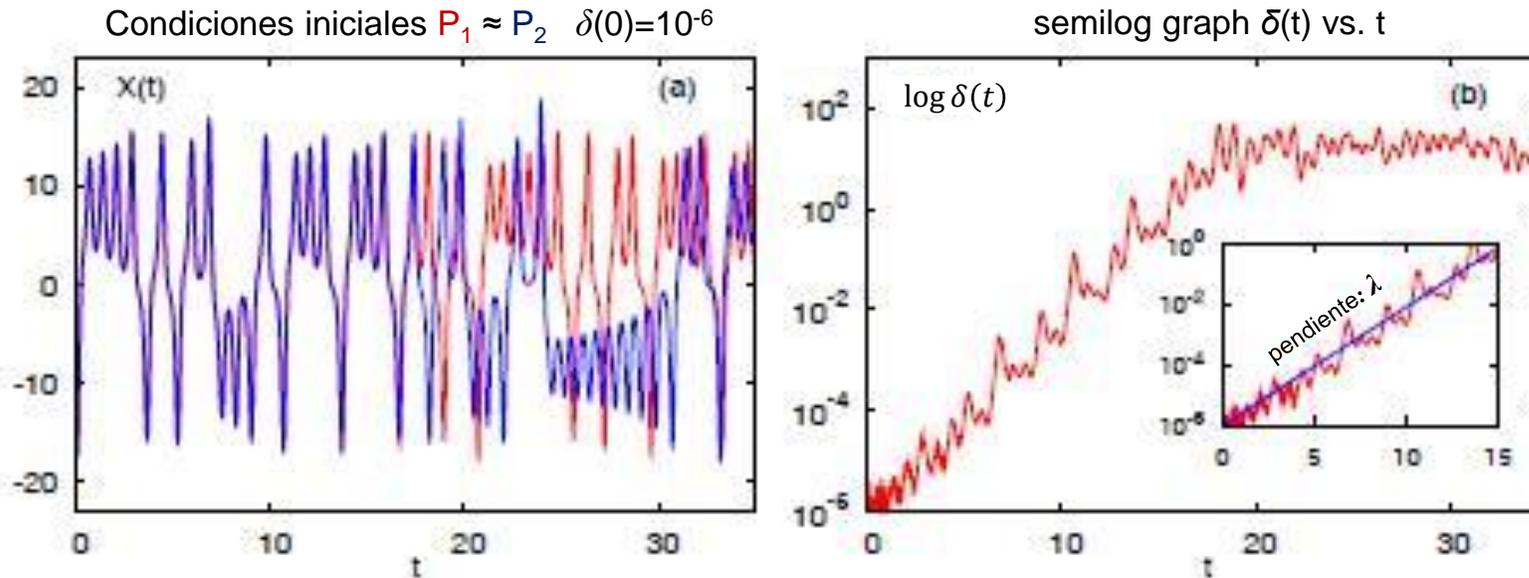
“Does the flap of a butterfly’s wing set off a tornado in Texas?”  
Titulo de una charla de Lorenz en una conferencia en 1972.

Tema literario, arte, cine, cultura.





# Separación de las trayectorias: exponente de Lyapunov



Separación crece exponencialmente:

$$\delta(t) \propto e^{\lambda t}$$

hasta alcanzar la amplitud de la variable.  
Separación varía en el tiempo.  
En promedio para tiempos largos,  
separación aumenta:  $\lambda > 0$ .

$\lambda$  : Exponente de Lyapunov.

**Exponente de Lyapunov**

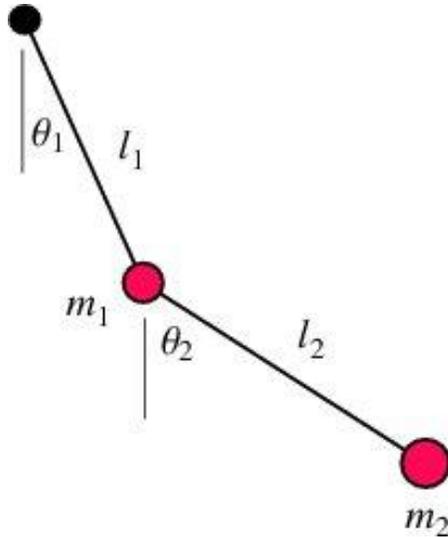
$\lambda > 0$ : caótico.  
 $\lambda < 0$ : periódico o punto fijo.



# Caos en el péndulo doble

Péndulo doble: sistema determinista.

Leyes de Newton → Ecuaciones de movimiento para  $\theta_1, \theta_2$  son no lineales:



$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin\theta_2 \cos\Delta\theta - \mu \sin\theta_1) - (l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos\Delta\theta) \sin\Delta\theta}{l_1 (\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

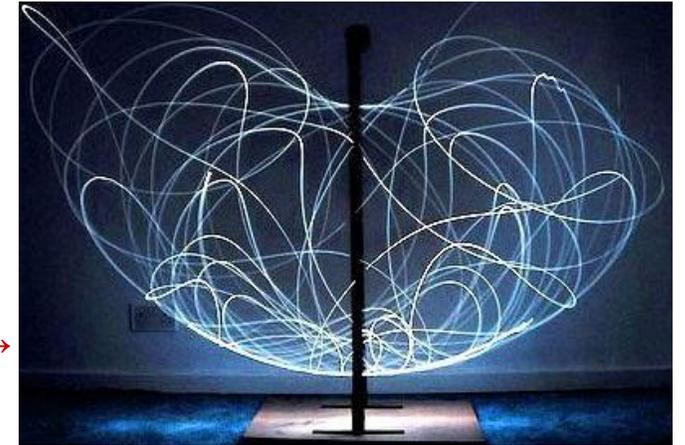
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\sin\theta_1 \cos\Delta\theta - \sin\theta_2) - (\mu l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos\Delta\theta) \sin\Delta\theta}{l_2 (\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

$$\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

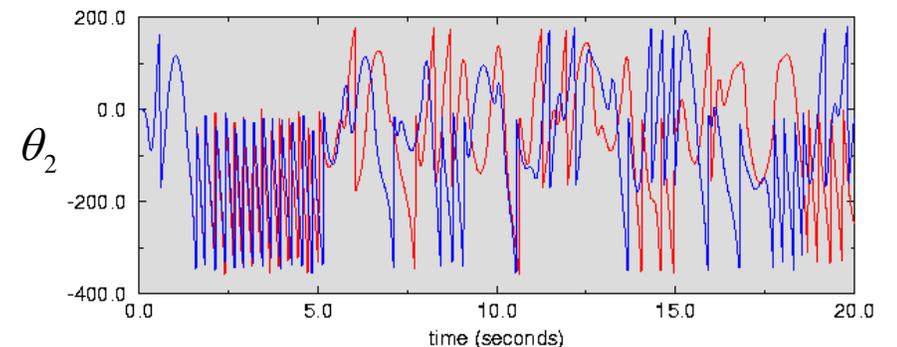
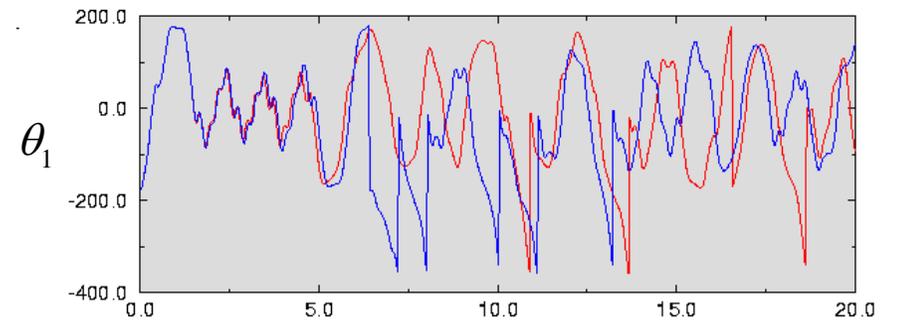
Evolución de  $\theta_1, \theta_2$  periódica, predecible para ángulos iniciales pequeños.

Trayectoria de  $m_2$  para amplitudes iniciales grandes →



**Caos:** evolución de  $\theta_1, \theta_2$  irregular, impredecible; *extremadamente sensible a cambios infinitesimales en condiciones iniciales rojo-azul.*

$$\Delta\theta_2(0) = \Delta\theta_2(0) = 10^{-3}$$





<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongaphysics



Latin American alliance for  
Capacity buildiNG in Advanced physics

**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.