

Módulo de Instrumentación 2023

Clase 21: Pendúlo doble: caos en un sistema no lineal

Mario Cosenza



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



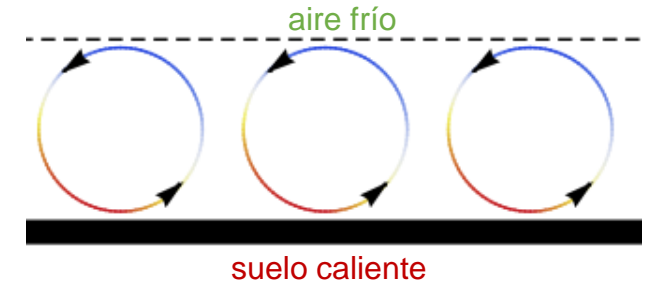
Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Sistema no lineal: Ecuaciones de Lorenz

Edward Lorenz (1963):
modelo simplificado de corrientes de convección en la atmósfera.



Ecuaciones de Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y$$

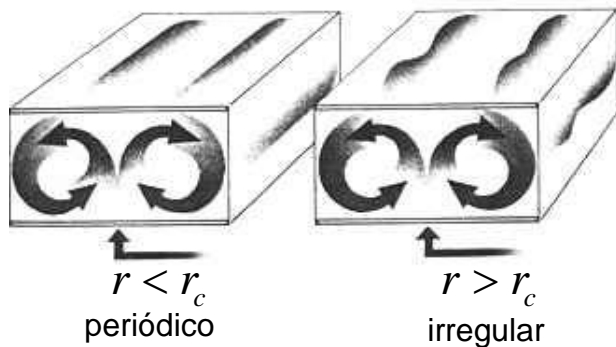
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Variables de estado del sistema:

x : velocidad de convección
 y : temperatura en dirección longitudinal
 z : temperatura en dirección vertical

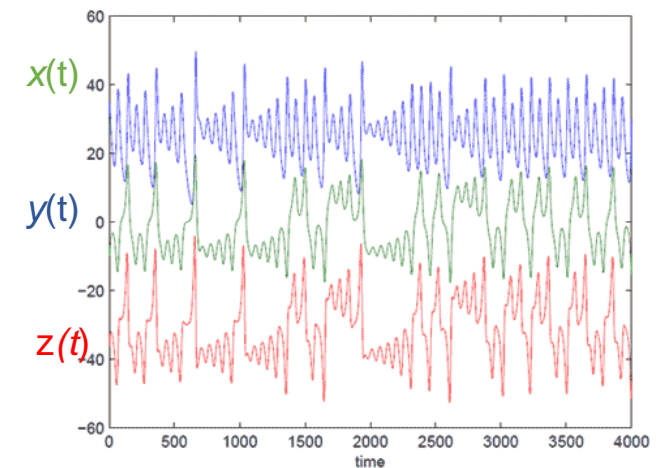
Parámetros:

a : conductividad térmica
 b : factor geométrico
 r : número de Rayleigh



Solución numérica:
parámetros fijos, $r > r_c$,
dados valores iniciales $x(0), y(0), z(0)$

Computador Royal McBee

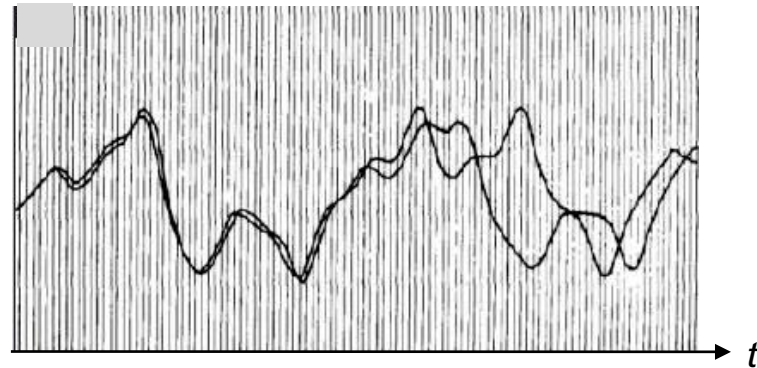




El efecto mariposa: descubrimiento del caos

$$x(0) = 5.061271$$
$$x'(0) = 5.06127$$

$$\Delta x(0) = 10^{-6}$$

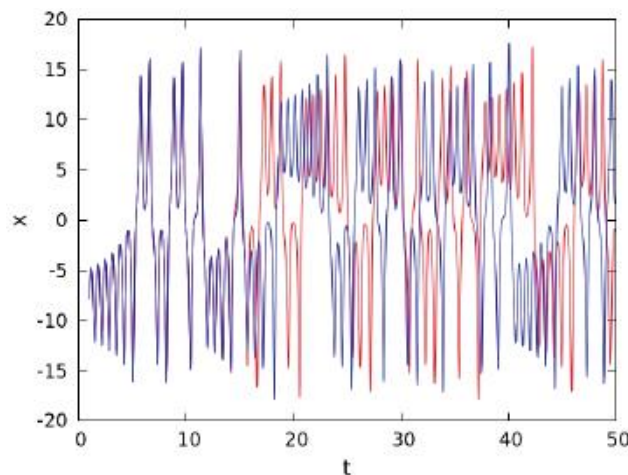


E. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of Atmospheric Sciences **20**, 130 (1963).

- Perturbación inicial → clima impredecible a largo plazo.
- Comportamiento genérico en sistemas de ecuaciones no lineales.



Caos: sensibilidad extrema de la evolución de un sistema bajo pequeños cambios en sus condiciones iniciales



Condiciones iniciales de trayectorias
rojo y azul difieren en 10^{-12} :

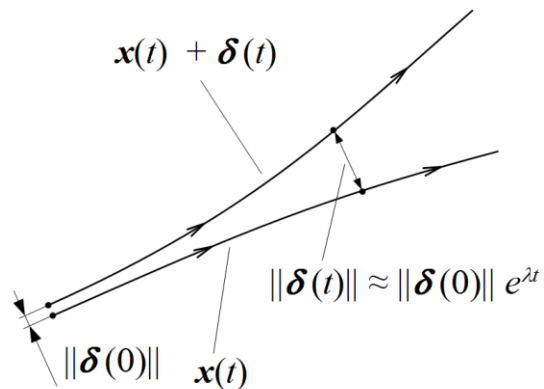
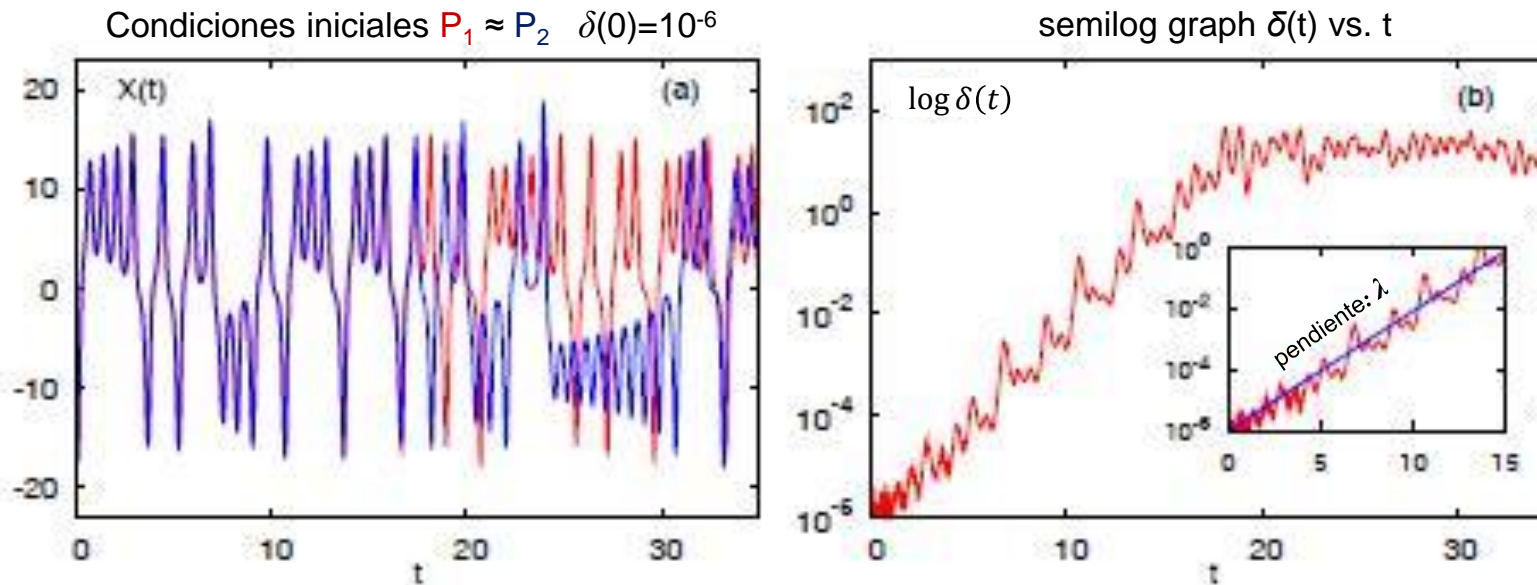
“Does the flap of a butterfly’s wing set off a tornado in Texas?”
Titulo de una charla de Lorenz en una conferencia en 1972.

Tema literario, arte, cine, cultura.





Separación de las trayectorias: exponente de Lyapunov



Separación crece exponencialmente:

$$\delta(t) \propto e^{\lambda t}$$

hasta alcanzar la amplitud de la variable.
Separación varía en el tiempo.
En promedio para tiempos largos,
separación aumenta: $\lambda > 0$.

λ : Exponente de Lyapunov.

Exponente de Lyapunov

$\lambda > 0$: caótico.

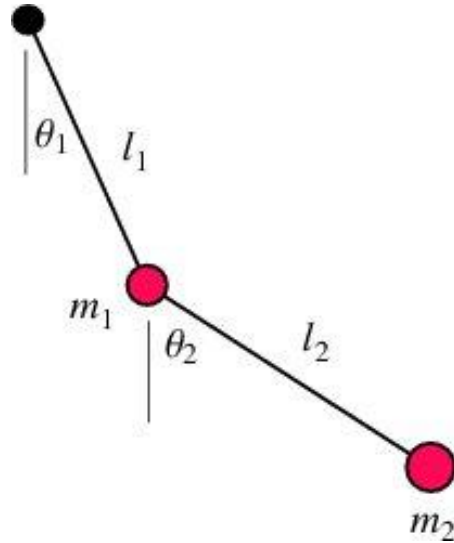
$\lambda < 0$: periódico o punto fijo.



Caos en el péndulo doble

Péndulo doble: sistema determinista.

Leyes de Newton → Ecuaciones de movimiento para θ_1, θ_2 son no lineales:



$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin\theta_2 \cos\Delta\theta - \mu \sin\theta_1) - (l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos\Delta\theta) \sin\Delta\theta}{l_1 (\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

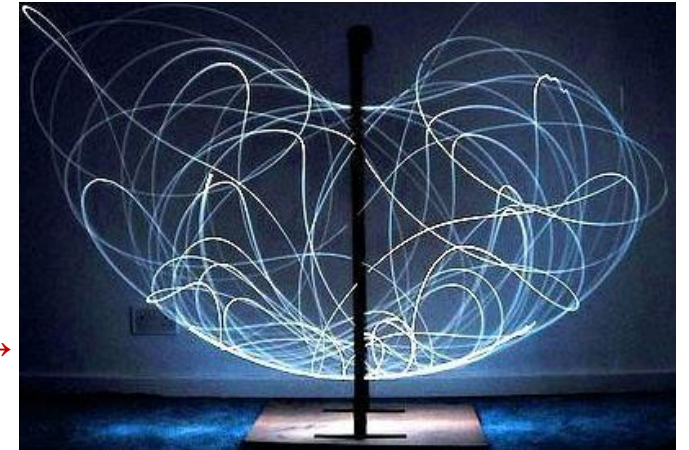
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\sin\theta_1 \cos\Delta\theta - \sin\theta_2) - (\mu l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos\Delta\theta) \sin\Delta\theta}{l_2 (\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

$$\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

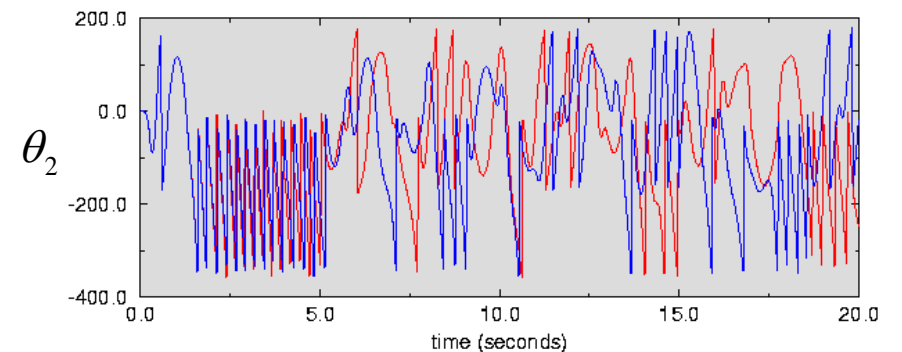
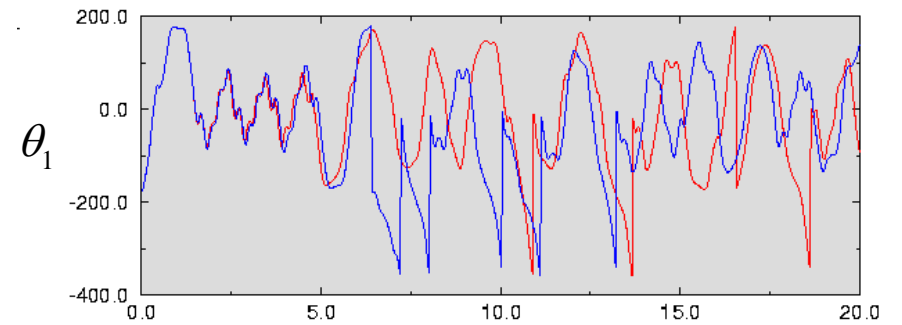
Evolución de θ_1, θ_2 periódica, predecible para ángulos iniciales pequeños.

Trayectoria de m_2 para amplitudes iniciales grandes →



Caos: evolución de θ_1, θ_2 irregular, impredecible; *extremadamente sensible a cambios infinitesimales en condiciones iniciales rojo-azul.*

$$\Delta\theta_2(0) = \Delta\theta_2(0) = 10^{-3}$$





<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.