

Práctica Sistemas Complejos: Péndulo Doble

LA-CoNGA

2022

1. Introducción

En esta práctica analizaremos uno de los ejemplos canónicos de un sistema caótico: el péndulo doble. Estudiaremos sus modos de vibración, distintos regímenes dinámicos, y cuantificaremos sus propiedades caóticas en función de los parámetros del sistema. Exploraremos nociones fundamentales como la trayectorias en el espacio de fase, el exponente de Lyapunov como medida del caos, y la de emergencia de fenómenos colectivos (sincronización). Para ello usaremos herramientas de adquisición de datos basadas en el seguimiento de puntos fijos en el péndulo por medio de cámaras.

1.1. Objetivos

- Caracterizar y cuantificar los distintos regímenes (periódico, no periódico) y modos de vibración de un péndulo doble.
- Analizar los efectos de variación de las longitudes y las masas de los brazos.
- Explorar el fenómeno colectivo de sincronización entre dos péndulos dobles (comportamiento emergente).
- Familiarizarse con herramientas de Código Abierto que permiten la adquisición de datos y el análisis de la dinámica de un sistema a partir de videos.

2. Actividades preliminares

Para un mejor entendimiento de los pasos involucrados en la práctica y de sus posibles generalizaciones, se recomienda [Chaos from simplicity](#) [Che08] como lectura de acompañamiento

2.1. Exploración de simulaciones

Los sistemas caóticos se caracterizan por tener ecuaciones de movimiento no lineales, la mayoría de las cuales no pueden ser tratadas analíticamente y requieren la aplicación de métodos numéricos aproximativos. En el sitio web [myPhysicsLab](#) (creado y mantenido por Eric Neumann) pueden encontrarse diversas simulaciones que utilizan, entre otros, los métodos de Euler y de Runge-Kutta para obtener la evolución temporal de varios sistemas que exhiben regímenes caóticos. **Explora estas simulaciones para identificar las variables relevantes en los cambios del comportamiento dinámico**, particularmente las citadas a continuación:

- **Péndulo doble:** Esta es una simulación de un péndulo doble. Cuando los ángulos son pequeños, el sistema se comporta como un [resorte doble lineal](#). En la pestaña "Graph" puede observarse el comportamiento en el tiempo. Obsérvese en particular que se generan curvas de Lissajous en estas condiciones (el movimiento está determinado por funciones trigonométricas elementales). Para movimientos más pronunciados, es un sistema caótico. Pueden cambiarse parámetros en la simulación, como la masa, la gravedad y la longitud de las varillas. El péndulo puede arrastrarse para cambiar la posición inicial.

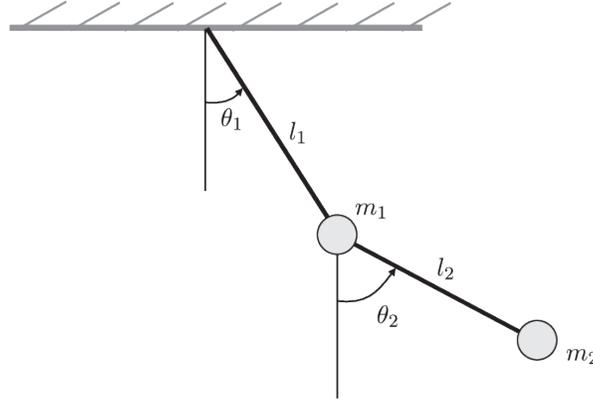


Figura 1: Péndulo doble

- **Péndulo forzado amortiguado:** Un péndulo forzado amortiguado es un sistema caótico (el comportamiento futuro depende en gran medida del valor exacto de las condiciones iniciales). Haga clic en la pestaña "Sim" para acceder a parámetros como amplitud, frecuencia, masa, gravedad y amortiguamiento. Puede arrastrarse el péndulo para cambiar la posición inicial.
- **Péndulo físico:** Se pueden modificar los ángulos de inicio y la gravedad. El péndulo derecho se puede arrastrar con la fuerza de un resorte haciendo clic con el mouse cerca de él. La separación entre los péndulos puede variarse para compararlos más fácilmente. En la pestaña "Multigraph" se pueden visualizar los datos.

2.2. Ecuaciones de movimiento y modos de vibración

Considera el péndulo doble de la [Figura 1](#). Las posiciones de las masas pueden describirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}(x, y)_1 &= (\ell_1 \sin(\theta_1), -\ell_1 \cos(\theta_1)) \\ (x, y)_2 &= (\ell_1 \sin(\theta_1) + \ell_2 \sin(\theta_2), -\ell_1 \cos(\theta_1) - \ell_2 \cos(\theta_2))\end{aligned}\quad (1)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, demuestra que las ecuaciones de movimiento de este sistema están dadas por

$$\begin{aligned}0 &= (m_1 + m_2)\ell_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g\ell_1 \sin \theta_1 \\ 0 &= m_2\ell_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2\ell_1\ell_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\ell_1\ell_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2g\ell_2 \sin \theta_2\end{aligned}\quad (2)$$

Utiliza la aproximación de pequeñas oscilaciones a primer orden para simplificar estas expresiones y llegar a

$$\begin{aligned}0 &= (m_1 + m_2)\ell_1\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g\theta_1 \\ 0 &= \ell_2\ddot{\theta}_2 + \ell_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_2\end{aligned}\quad (3)$$

Consideremos ahora el caso $\ell_1 = \ell_2 = \ell$. Usando el método del determinante (véase [\[Mor08\]](#), por ejemplo), puede demostrarse que las frecuencias de los modos normales de vibración vienen dadas por

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \pm \sqrt{m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1}} \sqrt{\frac{g}{\ell}}\quad (4)$$

La expresión de los modos normales para este caso puede escribirse de la siguiente manera



2.3 Exponente de Lyapunov

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_{\pm} \propto \begin{pmatrix} \mp \sqrt{m_2} \\ m_1 + m_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_{\pm} t + \phi_{\pm}) \quad (5)$$

Analiza estas expresiones y describe lo que ocurre en los siguientes casos especiales:

- $m_1 = m_2$
- $m_1 \gg m_2$: en ambos modos, el brazo superior (más pesado) se queda esencialmente inmóvil y el péndulo inferior (ligero) oscila como un péndulo de longitud ℓ
- $m_1 \ll m_2$: en uno de los modos, la masa inferior (pesada) se queda esencialmente inmóvil y la masa superior (ligera) oscila a una alta frecuencia (la tensión es elevada). En el otro modo, los brazos forman una línea recta, y el sistema se comporta como un péndulo de longitud 2ℓ

Consideremos ahora el caso $m_1 = m_2 = m$. Los modos normales son

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}_{\pm} \propto \begin{pmatrix} -\ell_2 \\ \ell_2 - \ell_1 \mp \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2} \end{pmatrix} \cos(\omega_{\pm} t + \phi_{\pm}) \quad (6)$$

con

$$\omega_{\pm} = \sqrt{g} \sqrt{\frac{\ell_1 + \ell_2 \pm \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}}{\ell_1 \ell_2}} \quad (7)$$

Analiza estas expresiones y comenta el comportamiento esperado para los casos especiales:

- $\ell_1 \gg \ell_2$: en el primer modo, las masas se mueven distancias iguales en direcciones opuestas a frecuencias altas (suponiendo que ℓ_2 es pequeño). En el segundo modo, los brazos forman una línea recta, y el sistema se mueven como si se tratara de un péndulo simple de masa $2m$ y longitud ℓ_1
- $\ell_1 \ll \ell_2$: en el primer modo, la masa de abajo se queda estática, y la de arriba oscila a una frecuencia alta. En el segundo modo, el sistema actúa como un péndulo de longitud ℓ_2

2.3. Exponente de Lyapunov

Los casos arriba mencionados ilustran situaciones en las que las ecuaciones de movimiento (y sus soluciones) son manejables y de fácil interpretación. Sin embargo, el verdadero reto reside en la descripción cuantitativa de este sistema cuando no es válido usar la aproximación de pequeños ángulos; es decir, cuando es caótico. Los sistemas caóticos se caracterizan por la separación divergente de trayectorias inicialmente muy cercanas en el espacio de fases (ver figura [Figura 2](#)). Tal divergencia puede caracterizarse por medio del exponente de Lyapunov, λ_L , que cuantifica esa separación:

$$\|\delta(t)\| = e^{\lambda_L t} \|\delta(0)\| \quad (8)$$

El máximo valor posible de λ_L determina la noción de predecibilidad de un sistema dinámica. Valores positivos de esta cantidad suelen tomarse como un indicador de que el sistema es caótico, mientras que valores negativos implican estabilidad local de las trayectorias.

Un valor promedio del exponente de Lyapunov puede obtenerse calculando su valor para intervalos de tiempo sucesivos

$$\lambda_i = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \ln \left(\frac{\delta(t_i)}{\delta(t_0)} \right) \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\delta(t_1)}{\delta_0} \right) + \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\delta(t_2)}{\delta_0} \right) + \dots + \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{\delta(t_n)}{\delta_0} \right) \right) \quad (10)$$

Para el caso del péndulo doble, el estado del sistema puede definirse dando los valores de los ángulos θ_1, θ_2 (ver [Figura 1](#)) y las correspondientes velocidades angulares ω_1, ω_2 . La distancia entre dos puntos en el diagrama de fases (esto es, en el gráfico ω vs. θ) viene dada por

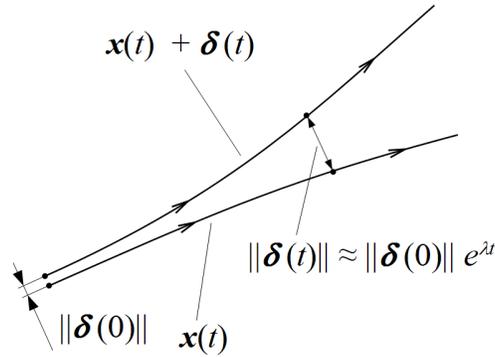


Figura 2: Desviación divergente de trayectorias en el espacio de fase

$$\delta_i(t) = \sqrt{(\theta_i - \theta'_i) + (\Delta t(\omega_i - \omega'_i))^2} \quad (11)$$

donde las variables primadas ($'$) se refieren a un segundo lanzamiento con condiciones iniciales muy próximas a las correspondientes a las variables sin primar. El factor $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ se emplea para regularizar las unidades de ambos términos en la raíz cuadrada.

Sea $\tau = n\Delta t$ el tiempo total transcurrido, el exponente de Lyapunov promedio puede entonces escribirse como

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{\delta(t_i)}{\delta_0} \right) \quad (12)$$

El valor de λ permite hacer una descripción cuantitativa de las fases y comportamientos del sistema:

- Si $\lambda_L < 0$ las trayectorias en el espacio de fases convergen, lo que indica que el sistema disipa energía.
- Si $\lambda_L = 0$, la distancia entre las trayectorias no cambia. Un ejemplo de esto es un resorte ideal (movimiento armónico simple), cuyas trayectorias son órbitas circulares cerradas que mantienen una separación constante.
- Si $\lambda_L > 0$, las trayectorias en el espacio de fases divergen exponencialmente, un indicador importante de caos.

2.4. Tracker: Video analysis and modeling tool

El Tracker es una herramienta que permite adquirir datos haciendo seguimiento temporal de marcadores en un sistema. La Figura 3 muestra una instancia del mismo similar al análisis que haremos en esta práctica. Puede ser descargado en la web <https://physlets.org/tracker/>.

3. Arreglo experimental: Materiales y equipos

El diseño del péndulo a emplear se basa en el presentado en [MTPK20], con cambios que permiten mayor modularidad. El cuerpo del soporte se ha construido usando una impresora 3D Prusa Mini empleando filamento de PLA (ácido poliláctico). Los brazos fueron cortados con una cortadora láser a partir de láminas de MDF.

El rápido movimiento de los brazos hace necesario grabar a una tasa de cuadros por segundo relativamente elevada. Para lograr esto emplearemos una cámara Allied Vision Alvim 1800, controlada por medio del software Vimba Viewer y un script de Python utilizando la librería OpenCV. La región

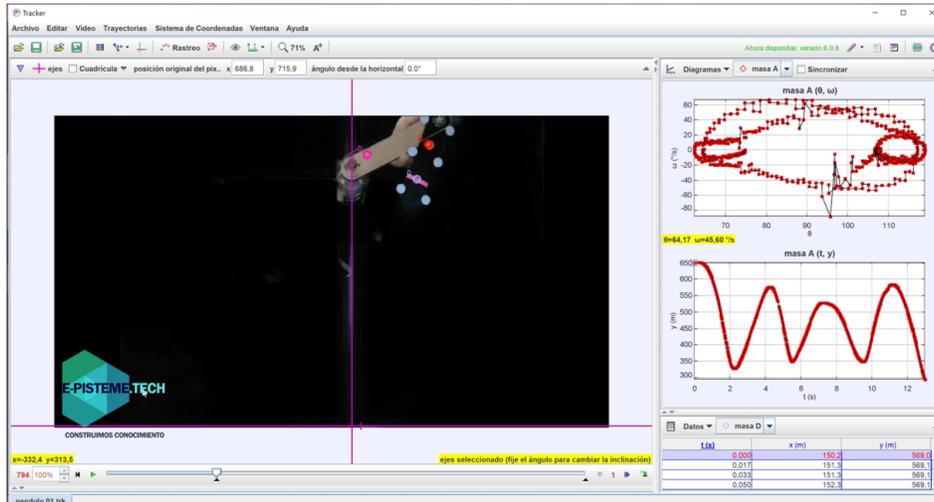


Figura 3: Detalle de la adquisición de datos usando el Tracker

de interés y resolución son calibradas hasta obtener una tasa de alrededor de 250 cuadros por segundo con suficiente nitidez.

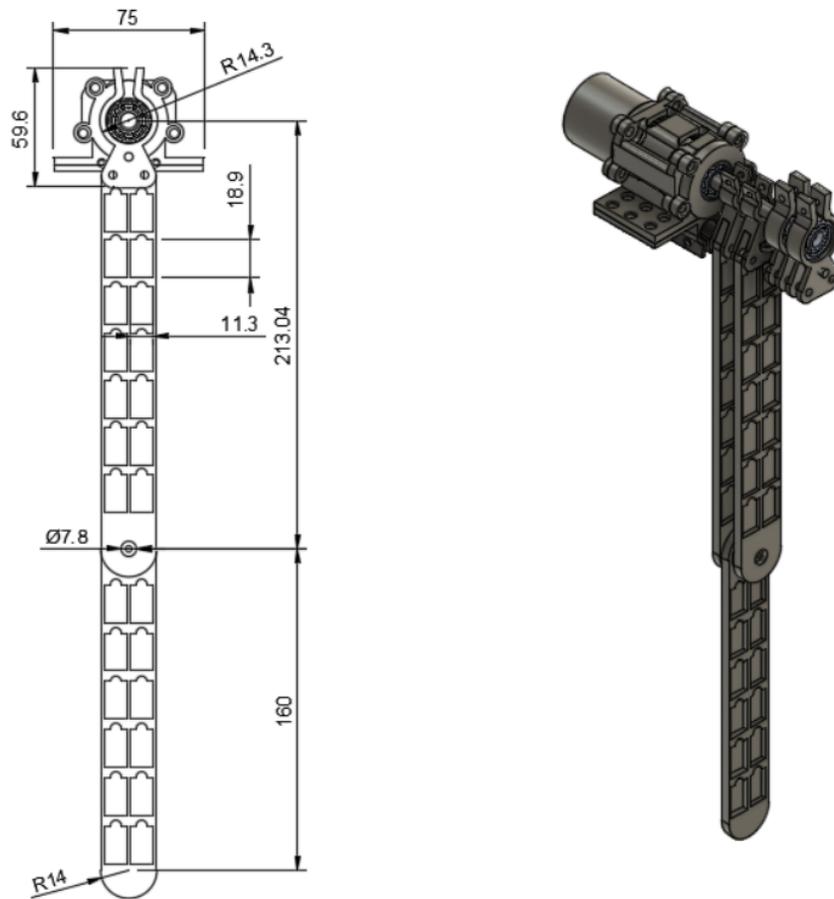


Figura 4: Modelo 3D del péndulo doble



Brazo	Masa (g)	Longitud (cm)
A	30	20
B	13	17.5
C	45	30
D	20	8

Cuadro 1: Masas y longitudes de los brazos usados durante la práctica.

4. Actividades

Para las actividades propuestas a continuación los videos resumidos en la [Tabla 2](#) han de ser usados

Modo	Descripción
1	(pequeños ángulos) ambos brazos se mueven al unísono y se comportan como un péndulo simple de longitud $\ell_1 + \ell_2$
2	(pequeños ángulos) los brazos se mueven en direcciones opuestas a la misma frecuencia
3	(grandes ángulos) caos
S	sincronización: dos péndulos conectados por medio de un resorte
L	brazo superior más largo que el inferior
P	brazo superior mucho más masivo que el inferior

Cuadro 2: Resumen de los modos estudiados en los videos catalogados de manera correspondiente.

4.1. Modos de vibración para pequeños ángulos

Utiliza el Tracker para analizar el movimiento de los brazos del péndulo para pequeños ángulos. Toma datos y genera los gráficos siguientes (¿reconoces algún modo de vibración en particular?)

- θ_1 vs. t
- θ_2 vs. t
- ω_1 vs. θ_1
- ω_2 vs. θ_2
- La distancia en el espacio de fases en función del tiempo
- El exponente de Lyapunov $\lambda(t)$ usando la ecuación [Ecuación 9](#). Determina su valor promedio

4.2. Diagramas de fase y exponente de Lyapunov en el régimen caótico

Repita los pasos del apartado anterior para un caso en el que el ángulo de partida θ_1 sea mayor y dé lugar a comportamiento caótico.

- - $\theta(t)$
 - ω vs θ
 - Lyapunov
- grandes ángulos: $m_1 = m_2$, ℓ_1, ℓ_2 variables; $\ell_1 = \ell_2$, m_1, m_2 variables. Reconocer modos de vibración



4.3. Sincronización

Conectando los brazos superiores de dos péndulos dobles por medio de un resorte, puede analizarse el efecto que tiene uno sobre el otro y bajo qué condiciones es posible sincronizar el movimiento de los brazos superiores. **Analiza el video correspondiente y describe lo sucedido.** Para explorar más puede consultarse [BKO⁺02] (disponible en <https://piccardi.faculty.polimi.it/VarieCsr/Papers/Boccaletti2002.pdf>), una fuente muy completa e interesante sobre el tema de sincronización de sistemas caóticos.

Referencias

- [BKO⁺02] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares, and C.S. Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366(1):1–101, 2002.
- [Che08] Joe Chen. *Chaos from simplicity: An introduction to the double pendulum*, 2008.
- [Mor08] David Morin. *Introduction to classical mechanics*. Cambridge University Press, 2008.
- [MTPK20] Audun D. Myers, Joshua R. Tempelman, David Petrushenko, and Firas A. Khasawneh. Low-cost double pendulum for high-quality data collection with open-source video tracking and analysis. *HardwareX*, 8:e00138, 2020.