

Módulo de Instrumentación 2022

Clase 23: El circuito de Chua

Mario Cosenza



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Diagrama de bifurcación de mapa cuadrático

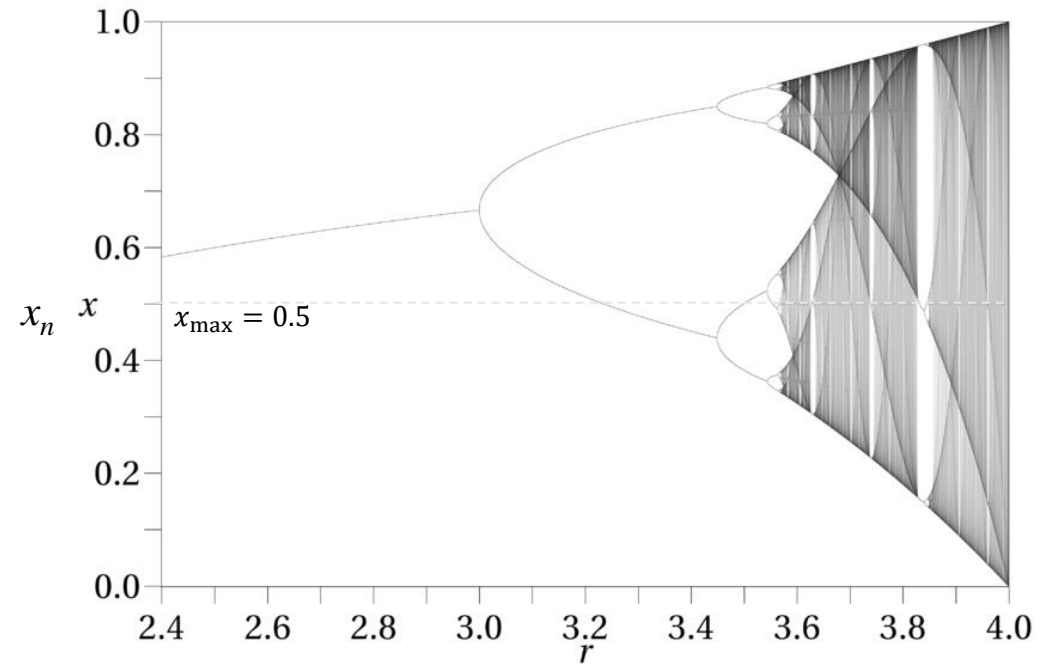
Comportamiento dinámico de sistemas no lineales depende de parámetros.

Bifurcación: cambio de comportamiento dinámico al variar parámetro

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1-x_n) \quad x_n \in [0,1] \quad f'(x_{\max}) = 0.5$$

secuencia de duplicación de períodos (bifurcación de período doble) al variar r :
 $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots \rightarrow 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$ para $r < 3.569 \dots$

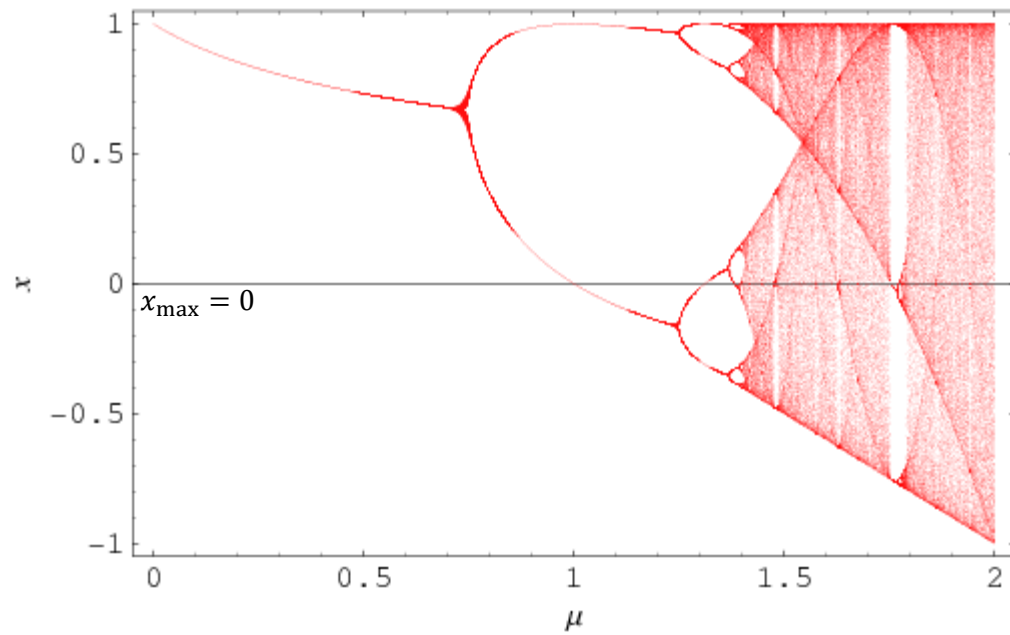
caos y ventanas de periodicidad para $r > 3.569 \dots$



$$x_{n+1} = f(x_n) = 1 - \mu x_n^2 \quad x_n \in [-1,1] \quad f'(x_{\max}) = 0$$

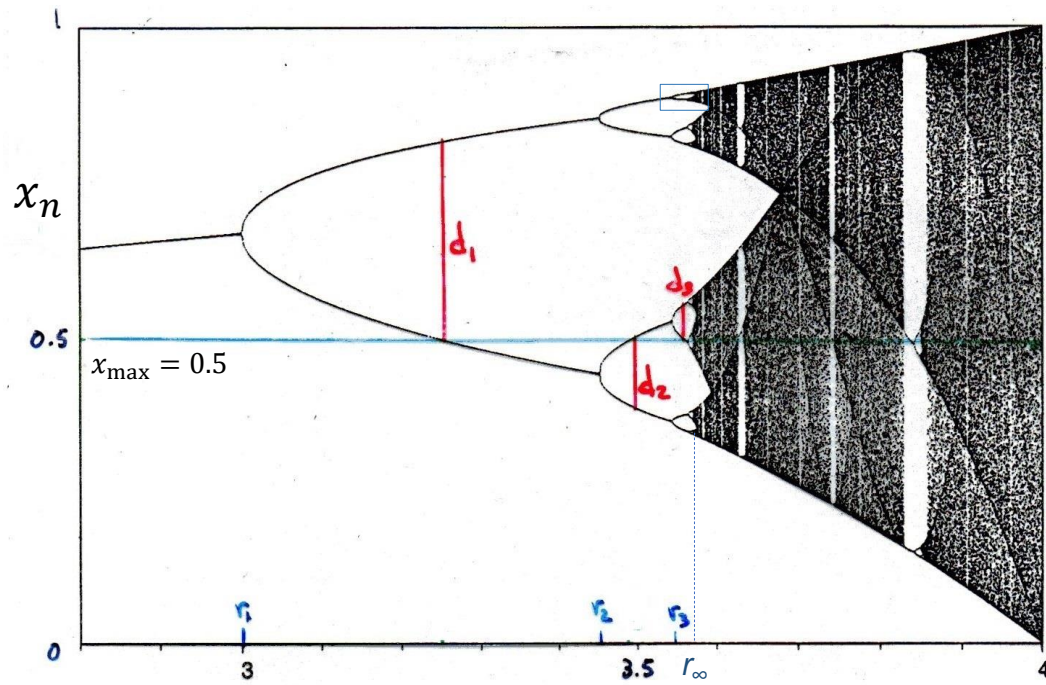
secuencia de duplicación de períodos de la forma
 $2^n, n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ para transición al caos al variar parámetro.

**Comportamiento universal para mapas
con un máximo o mínimo x_{\max} cuadrático.**

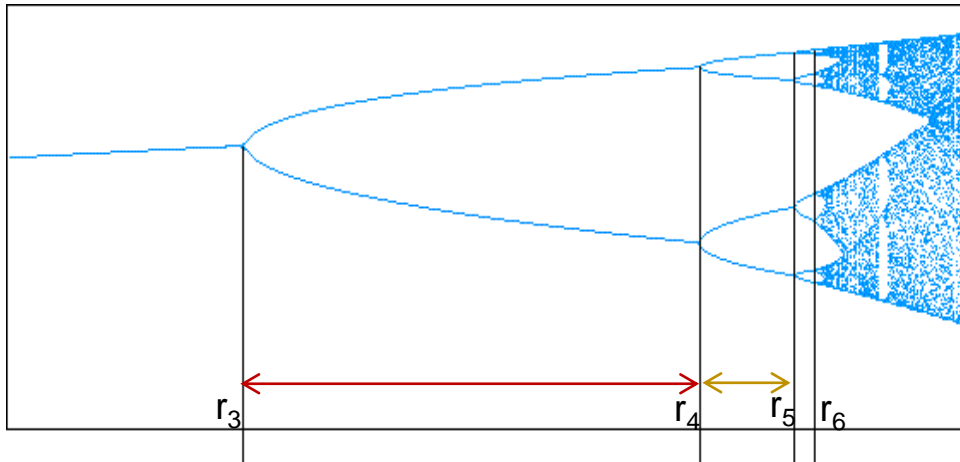




Constante δ de Feigenbaum



magnificación



$x_{n+1} = f(x_n, r) = rx_n(1 - x_n)$ mapa con máximo o mínimo x_{\max} cuadrático.

Órbita de período p satisface: $f^{(p)}(x, r) = x \rightarrow$ ecuación algebraica para r

Transición al caos por duplicación de períodos:

r_n : valor de parámetro r para el cual nace una órbita de período 2^n , $n = 1, 2, \dots, \infty$

n	cycle (2^n)	r_n
1	2	3
2	4	3.449490
3	8	3.544090
4	16	3.564407
5	32	3.568750
6	64	3.56969
7	128	3.56989
8	256	3.569934
9	512	3.569943
10	1024	3.5699451
11	2048	3.569945557
∞	accumulation point	3.569945672

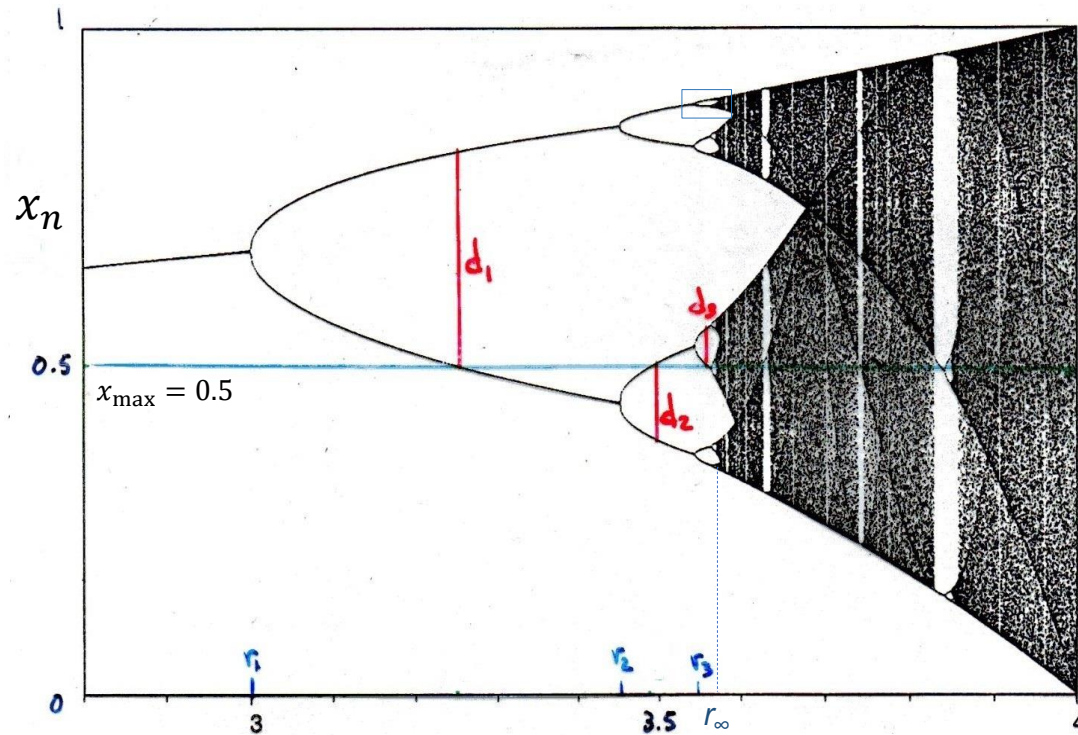
Convergencia geométrica:
 δ constante de convergencia

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.6692016 \dots$$

Mitchell Feigenbaum (1978):
constante universal para transición
al caos por duplicación de períodos.



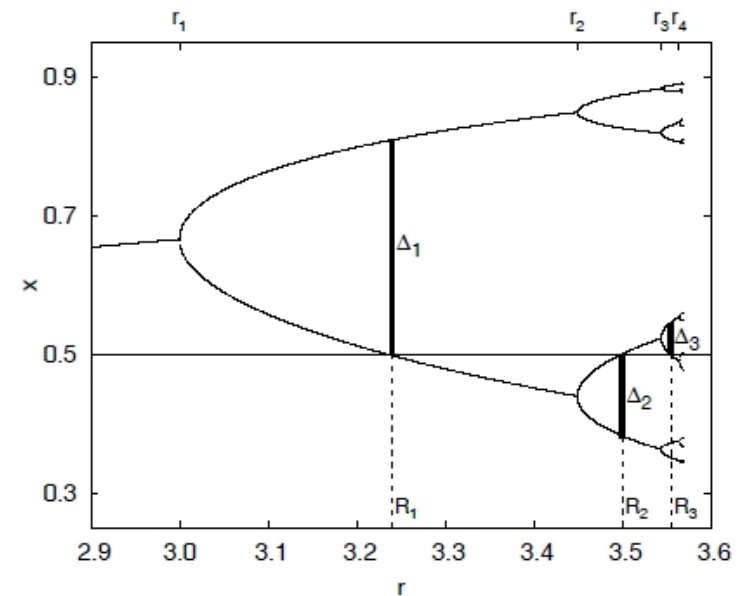
Constante α de Feigenbaum



Para $r = r_\infty$: órbita tiene periodo $2^\infty \rightarrow$ caótico.
 \rightarrow Atractor de Feigenbaum \rightarrow fractal

Escalamiento de la órbita en transición al caos por duplicación de períodos:
 d_n : distancia (x_{\max} - punto más cercano) en una órbita de período 2^n

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -2.502907 \dots$$

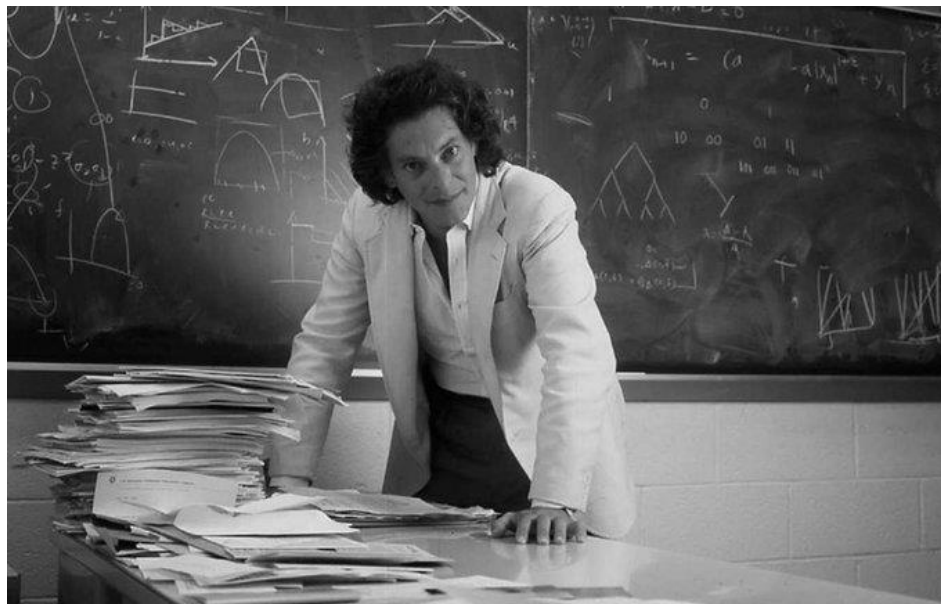




Constantes de Feigenbaum

Feigenbaum demostró la universalidad de δ y α usando teoría de renormalización: transición de fase orden-caos.

Mitchell Feigenbaum (1944-2019)



$$\alpha(2) = -2.$$

502907875095892822283902873218215786381271376727149977336192
056779235463179590206703299649746433834129595231869995854723
942182377785445179272863314993372578112163594879503744781260
997380598671239711737328927665404401030669831383460009413932
236449065788995122058431725078733774630878534242853519885875
000423582469187408204281700901714823051821621632597520264070
154734369163264859567116308023672243466392188083369967457397
123570489870973555736656062998020709602323617758740920917918
862600565037392462501491789236269217819393491578638085655372
062878991364751071130930882955530528

$$\delta(2) = 4.$$

669201609102990671853203820466201617258185577475768632745651
343004134330211314737138689744023948013817165984855189815134
408627142027932522312442988890890859944935463236713411532481
714219947455644365823793202009561058330575458617652222070385
410646749494284981453391726200568755665952339875603825637225
648004095107128389061184470277585428541980112212097941214729
746823497270154908259119420781334087939674017078877189675350
024865725197764177756197784795912347535009737589351782623659
047350752485156705948080910948188617490903004106492043004698
687299477012918774513898492098234382



$$x_{n+1} = f(x_n) = \lambda(1 - 2x_n^2)$$

N	λ	δ
1	0.7071067811865475244008443621	4.74430946893705
2	0.8095377203493463168459541018	4.67444782765301
3	0.8311279938830304702482833891	4.67079115022921
4	0.8357467797438888850823009395	4.66946164833746
5	0.8367356455938705846037094966	4.66926580979910
6	0.8369474185828047108022721846	4.66921427043589
7	0.8369927732483047323090713162	4.66920445137251
8	0.8370024868024425943459682976	4.66920220132661
9	0.8370045671470149993313732630	4.66920173797283
10	0.8370050126930596349457550266	4.66920163645133
11	0.8370051081153758334851887620	4.66920161499127
12	0.8370051285519137318702724660	4.66920161036023
13	0.8370051329287943173583990344	4.66920160937272
14	0.8370051338661881055761765511	4.66920160916069
15	0.8370051340669491492492744646	4.66920160911533
16	0.8370051341099460169105929249	4.66920160910564
17	0.8370051341191546292732244007	
18	0.8370051341211268320465365015	

Universalidad de α y δ

Ej.

$$x_{n+1} = h(x_n) = \alpha x_n^2 \sin(\pi x_n)$$

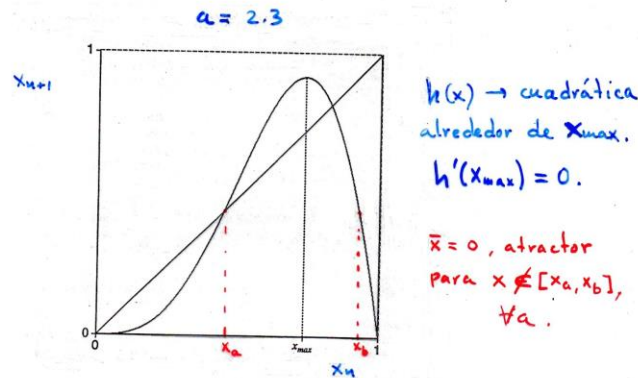
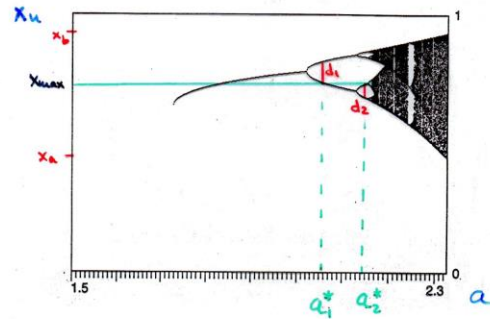


diagrama de bifurcaciones



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^* - a_{n-1}^*}{a_{n+1}^* - a_n^*} = 4.6692\dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -2.502\dots$$

Primeras medidas experimentales

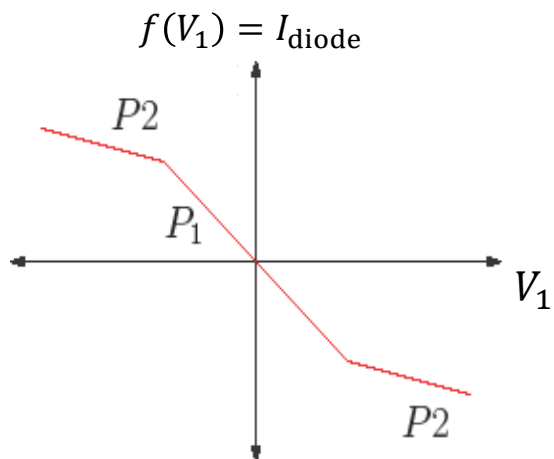
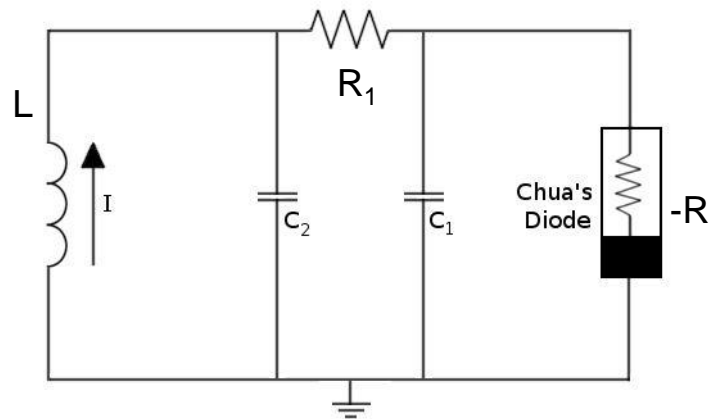
Experiment	Number of period doublings	δ (4.669)	α (2.503)
Hydrodynamic:			
Water [1]	2		
Water [2]	4	4.3 ± 0.8	
Helium [3]	4	3.5 ± 0.15	
Mercury [4]	4	4.4 ± 0.1	
Electronic:			
Diode [5]	4	4.5 ± 0.6	
Diode [6]	5	4.3 ± 0.1	2.4 ± 0.1
Transistor [7]	4	4.7 ± 0.3	
Josephson [8]	3	4.5 ± 0.3	2.7 ± 0.2
Laser:			
Laser feedback [9]	3	4.3 ± 0.3	Consistent
Laser [10]	2		
Laser [11]	3		
Acoustic:			
Helium [12]	3		
Helium [13]	3	4.8 ± 0.6	
Chemical:			
B-Zh reaction [14]	3		

- [1] Gollub and Benson (1980)
- [2] Giglio et al. (1981)
- [3] Libchaber and Maurer (1981)
- [4] Libchaber et al. (1982)
- [5] Linsay (1981)
- [6] Testa et al. (1982)
- [7] Arecchi and Lisi (1982)
- [8] Yeh and Kao (1982)
- [9] Hopf et al. (1981)
- [10] Arecchi et al. (1982)
- [11] Weiss et al. (1983)
- [12] Lauterborn and Cramer (1981)
- [13] Smith et al. (1982)
- [14] Simoyi et al. (1982)



Circuito de Chua

tres variables: V_1, V_2, I
espacio de fase 3-dimensional



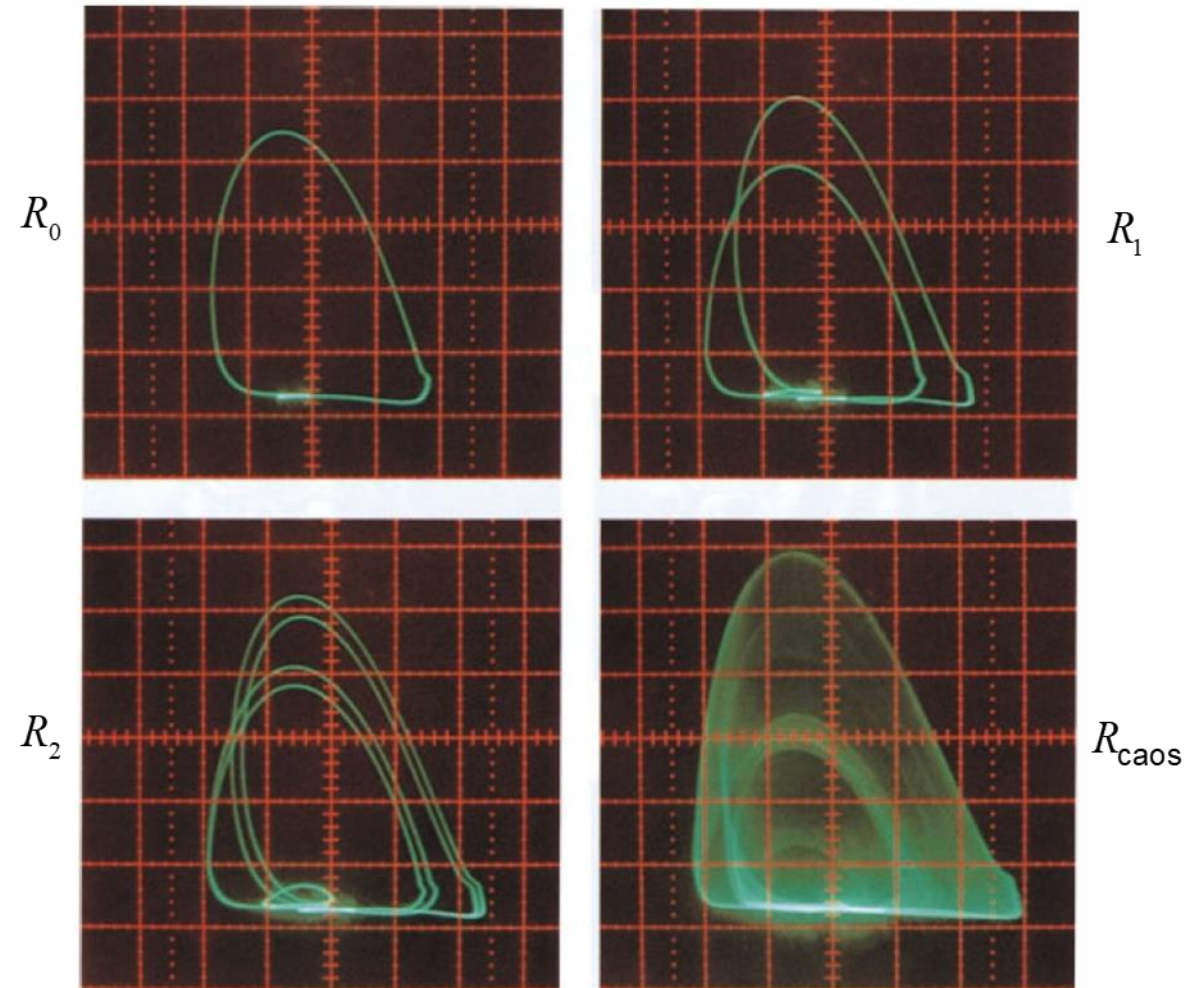
Ecuaciones dinámicas:

$$C_1 \frac{dV_1}{dt} = \frac{V_2 - V_1}{R_1} - f(V_1)$$

$$C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{R_1} + I$$

$$L \frac{dI}{dt} = -V_2$$

Señal (V_1, V_2) en osciloscopio al variar R_1



$$\delta \approx \frac{R_1 - R_0}{R_2 - R_1} = 4.6 \dots$$



Enseñanzas del caos y sistemas no lineales

- Sensibilidad a las condiciones iniciales (efecto mariposa) implica predicción limitada en muchos sistemas deterministas.
- Sistemas simples (pocas variables) pueden tener comportamiento complejo.
- Propiedades universales en transiciones orden-caos: Ej. constante de Feigenbaum.
- El caos posee estructura geométrica (fractal) y dinámica caracterizada por exponente de Lyapunov positivo.
- Fenómeno universal, no asociado a teoría, contexto o interacción específica: ocurre en sistemas físicos, químicos, biológicos, económicos, etc.



Condiciones *necesarias*, pero *no suficientes* para el caos:

- 1) No linealidad.
- 2) Más de 2 variables en espacio de fase si t es continuo. Una variable si t es discreto (mapas).
- 3) No integrable, si es un sistema mecánico.

No existe teorema sobre suficiencia para el caos. No podemos decir a priori si un sistema de ecuaciones no lineales es caótico; tan sólo que en algún rango de parámetros, puede ser caótico.

Existen rutas definidas para transición orden-caos al variar un parámetro, caracterizadas por propiedades universales.

Actualmente, el estudio del Caos y sistemas no lineales ha evolucionado hacia el estudio de **Sistemas Complejos**:
sistema formado por muchos elementos con interacciones mutuas, cuyo comportamiento colectivo (estructuras, patrones, organización) no está presente en los elementos aislados.

Ejemplos: colonias de insectos, cardúmenes, tráfico, cerebro, redes complejas, economía, sistemas sociales.



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.