



LA-CoNGA physics

Teoría: Altas Energías Clase 05/21

Reglas de Feynman Prof. José Antonio López Rodríguez

11 de abril de 2023

Electrodinámica Cuántica

José Antonio López Rodríguez

Universidad Central de Venezuela

5 de abril de 2022



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Contenido

Recuento

Recapitulación ecuación de Dirac y soluciones

El campo de Proca

Campo de Proca

Proyeccion sobre estados de polarización

Completitud soluciones de Proca

Completitud soluciones de Maxwell

Completitud soluciones de Dirac

Propiedades de las trazas de matrices γ

Matriz γ^5

Interpretación diagramática

Interacción

QED a orden bajo

Reglas de Feynman

Reglas de Feynman

Recuento



- Recordemos: soluciones de partícula y antipartícula

$$u_{1,2}(p) = \left\{ \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}; \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \right\}. \quad (1)$$

$$v_{1,2}(p) = \left\{ \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2)$$



► Definición

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3)$$

► Las componentes de $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$$F_{0i} = -F_{i0} = E_i, \quad F_{ij} = -\sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} B_k \quad (5)$$



Calibrar la invariancia de fase

- ▶ Se define la derivada covariante (q es la carga eléctrica fundamental):

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (6)$$

- ▶ La nueva densidad lagrangiana

$$S = - \int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \right). \quad (7)$$

- ▶ La invariancia de cambios de fase global se mantiene. La carga de Noether se sigue conservando.
- ▶ Se introduce un nuevo tipo de transformación de calibre (la invariancia es exacta).

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi. \quad (8)$$

$$\tilde{\psi} = e^{iq\chi}\psi. \quad (9)$$



- ▶ Se define la matriz de conjugación de carga.

$$\hat{C} \equiv i\gamma^2. \quad (10)$$

- ▶ La transformación es

$$\psi' = \hat{C}\psi^*. \quad (11)$$

- ▶ Se cumple

$$\psi = \hat{C}(\hat{C}\psi^*)^*. \quad (12)$$

$$\psi_i = u_i e^{-ipx} \xrightarrow{\hat{C}} \psi'_i = v_i e^{ipx}. \quad (13)$$

El campo de Proca



- ▶ Consideramos

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (14)$$

- ▶ La dinámica está dada por la acción:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 B_\mu B^\mu \right). \quad (15)$$

- ▶ B_μ describe una teoría vectorial con masa.
- ▶ ¡No hay invariancia de calibre!



- ▶ Aplicando el principio de mínima acción:

$$\partial_\nu F^{\nu\alpha} + m^2 B^\alpha = 0, \quad (16)$$

$$\square B^\alpha - \partial_\nu \partial^\alpha B^\nu + m^2 B^\alpha = 0. \quad (17)$$

- ▶ Al calcular la divergencia a las ecuaciones de movimiento, encontramos que la condición

$$\partial_\nu B^\nu = 0 \quad (18)$$

es automática.

- ▶ Debe haber algún parecido entre las soluciones de B_μ y las soluciones de un A_μ de masa nula en el calibre de Lorenz.



- ▶ El sistema que se debe resolver.
Cuatro ecuaciones de Klein-Gordon masivas y la condición de divergencia nula:

$$(\square + m^2)B_\mu = 0, \quad (19)$$

$$\partial_\nu B^\nu = 0. \quad (20)$$

- ▶ Solución propuesta:

$$B_\mu = \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)e^{-iq \cdot x}. \quad (21)$$

- ▶ $\lambda = 0 \dots 3$ son las cuatro polarizaciones independientes.
- ▶ La ecuación de movimiento impone la condición:

$$q^2 = m^2. \quad (22)$$

- ▶ La condición de divergencia nula:

$$q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) = 0. \quad (23)$$

Proyección sobre estados de polarización



- ▶ Nos interesa obtener una expresión covariante del operador de proyección sobre los estados $q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q) = 0$:

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}\right). \quad (24)$$

Cumple con las propiedades deseadas.



Completitud en soluciones con masa (B_μ)

- ▶ Se puede, por ejemplo, partir de una forma explícita de los vectores de polarización,

$$\epsilon_\mu^{(0)} = \frac{q_\mu}{m}, \quad \epsilon_\mu^{(1)} = (0, \hat{\epsilon}_1), \quad \epsilon_\mu^{(2)} = (0, \hat{\epsilon}_2), \quad \epsilon_\mu^{(3)} = \frac{1}{m}(|\vec{q}|, q_0 \hat{q}). \quad (25)$$

Donde ($i, j = 1, 2$)

$$\hat{q} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}, \quad \vec{q} \cdot (\hat{\epsilon}_i)^* = 0, \quad \hat{\epsilon}_i \cdot (\hat{\epsilon}_j)^* = \delta_{ij}. \quad (26)$$

- ▶ Se puede verificar

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^3 (\epsilon_\mu^{(i)})^* \epsilon_\nu^{(i)} = -(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}). \quad (27)$$



- ▶ Recordemos que solo hay dos polarizaciones independientes
- ▶ Proponemos una base para las 4 polarizaciones no restringidas:

$$\epsilon_{\mu}^{(0)} = n_{\mu} = (1, 0, 0, 0), \quad (28)$$

es un vector (obviamente) tipo tiempo.

$$\epsilon_{\mu}^{(1)} = (0, \hat{e}_1), \quad \epsilon_{\mu}^{(2)} = (0, \hat{e}_2), \quad \epsilon_{\mu}^{(3)} = \left(0, \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\right) = \frac{q_{\mu} - (n \cdot q)n_{\mu}}{\sqrt{(n \cdot q)^2 - q^2}}, \quad (29)$$

son tres vectores (obviamente) tipo espacio.

- ▶ Se cumple ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\vec{\epsilon}^{(i)} \cdot (\vec{\epsilon}^{(j)})^* = \delta^{ij}. \quad (30)$$



- ▶ Se definen 4 constantes ζ^λ :

$$\zeta^\lambda \equiv -\epsilon_\mu^{(\lambda)} (\epsilon^{\mu(\lambda)})^*, \quad (31)$$

$$\zeta^0 = -1; \quad \zeta^{i=1,2,3} = 1. \quad (32)$$

- ▶ Se cumplen:

$$\delta^{\lambda\lambda'} = -\zeta^\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)} (\epsilon^{\mu(\lambda')})^*, \quad (33)$$

$$\sum_\lambda \zeta^\lambda (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu}. \quad (34)$$



- ▶ La proyección sobre las polarizaciones físicas ($\epsilon^{(i=1,2)}$):

$$\sum_{i=1,2} (\epsilon_{\mu}^{(i)})^* \epsilon_{\nu}^{(i)} = \sum_{\lambda} \zeta^{\lambda} (\epsilon_{\mu}^{(\lambda)})^* \epsilon_{\nu}^{(\lambda)} - (\zeta^0 (\epsilon_{\mu}^{(0)})^* \epsilon_{\nu}^{(0)} + \zeta^3 (\epsilon_{\mu}^{(3)})^* \epsilon_{\nu}^{(3)}). \quad (35)$$

$$\sum_{i=1,2} (\epsilon_{\mu}^{(i)})^* \epsilon_{\nu}^{(i)} = -g_{\mu\nu} + ((\epsilon_{\mu}^{(0)})^* \epsilon_{\nu}^{(0)} - (\epsilon_{\mu}^{(3)})^* \epsilon_{\nu}^{(3)}) = -g_{\mu\nu} + (P_q)_{\mu\nu}, \quad (36)$$

donde $(P_q)_{\mu\nu}$ es el operador de proyección sobre la dirección de q_{μ} .



- ▶ En el cálculo de perturbaciones necesitaremos considerar polarizaciones de fotones que no cumplen la condición *on shell* ($q^2 \neq 0$).
- ▶ En ese caso se puede tomar prestado el resultado del Campo de Proca:

$$\sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} (\epsilon_\mu^{(\lambda)})^* \epsilon_\nu^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^3 (\epsilon_\mu^{(i)})^* \epsilon_\nu^{(i)} = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right). \quad (37)$$



► Sabemos

$$\sum_{s=1,2} u_s(p) \bar{u}_s(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m). \quad (38)$$

$$\sum_{s=1,2} v_s(p) \bar{v}_s(p) = (\gamma^\mu p_\mu - m). \quad (39)$$

Propiedades de las trazas de matrices γ



- ▶ Definimos la matriz γ^5

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (40)$$

- ▶ Se cumple:

$$(\gamma^5)^2 = I, \quad (41)$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (42)$$

$$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5. \quad (43)$$



$$\text{Tr}(I) = 4 \quad (44)$$

▶ La traza de un número impar de matrices es cero.



$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (45)$$



$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - 4g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + 4g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}. \quad (46)$$

▶ La traza de un número impar de matrices $\times \gamma^5$ es cero.

Interpretación diagramática



- ▶ La tasa de transición entre estados inicial y final está codificada en la cantidad Γ_{fi} .

- ▶ Regla de oro de Fermi

$$\Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (47)$$

- ▶ La matriz de transición T_{fi} es un objeto teoría dependiente. Cuando es posible usar teoría de perturbaciones:

$$T_{fi} = \langle f | V | i \rangle + \sum_{i \neq j} \frac{\langle f | V | j \rangle \langle j | V | i \rangle}{E_i - E_j} + \dots \quad (48)$$

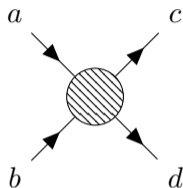
- ▶ Primer término: interacción con un potencial.
- ▶ Segundo término: dispersión en un estado intermedio.
- ▶ ...



- ▶ En QFT la interacción sucede a través del intercambio de partículas.
- ▶ No hay potenciales extendidos en el espacio.
- ▶ Fuerza \iff transferencia de momentum a partículas de intercambio.



Modelo de intercambio $a + b \longrightarrow c + d$

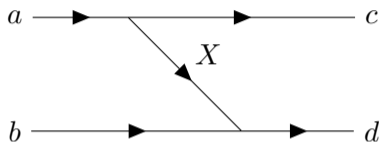


- ▶ Partícula a se transforma en $X + c$.
 $a + b \longrightarrow c + X + b \longrightarrow c + d$.
- ▶ Partícula b se transforma en $\tilde{X} + d$.
 $a + b \longrightarrow a + \tilde{X} + d \longrightarrow c + d$



$$a + b \longrightarrow c + X + b \longrightarrow c + d$$

- ▶ a se transforma en $X + c$.



- ▶ $\vec{q}_X = \vec{p}_c - \vec{p}_a$

- ▶ $Q_X = Q_c - Q_a$

- ▶ La matriz de transición:

$$T_{fi}^{a \rightarrow X} = \frac{\langle f | V | j \rangle \langle j | V | i \rangle}{E_i - E_j} = \frac{\langle d | V | X + b \rangle \langle c + X | V | a \rangle}{(E_a + E_b) - (E_c + E_b + E_X)}. \quad (49)$$



$$a + b \longrightarrow c + X + b \longrightarrow c + d$$

- ▶ Usamos la definición $V_{ji} = \langle j | V | i \rangle$.

$$V_{ji} = \langle c + X | V | a \rangle = \mathcal{M}_{a \rightarrow c+X} (2E_a 2E_c 2E_X)^{-\frac{1}{2}}. \quad (50)$$

- ▶ $\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X}$ es el elemento de matriz invariante Lorentz en la transición $a \rightarrow c + X$. El caso más sencillo es el de un acoplamiento escalar

$$\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X} = g_a. \quad (51)$$

$$T_{fi}^{a \rightarrow X} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c - E_X)} (2E_a 2E_c 2E_X)^{-\frac{1}{2}} (2E_b 2E_d 2E_X)^{-\frac{1}{2}}. \quad (52)$$



$$a + b \longrightarrow c + X + b \longrightarrow c + d$$

- Definimos la matriz de transición invariante para $T_{fi}^{a \rightarrow X}$.

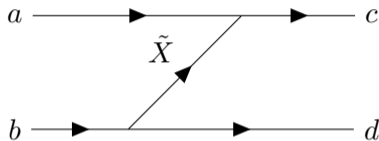
$$T_{fi}^{a \rightarrow X} = \frac{g_a g_b (2E_a 2E_c 2E_b 2E_d)^{-\frac{1}{2}}}{2E_X (E_a - E_c - E_X)} = \mathcal{M}_{fi}^{a \rightarrow c+X} (2E_a 2E_c 2E_b 2E_d)^{-\frac{1}{2}}. \quad (53)$$

$$\mathcal{M}_{fi}^{a \rightarrow c+X} = \frac{g_a g_b}{2E_X (E_a - E_c - E_X)}. \quad (54)$$



$$a + b \longrightarrow a + \tilde{X} + d \longrightarrow c + d$$

- ▶ Partícula b emite una \tilde{X} .



- ▶ La matriz de transición LI tiene la misma forma que en el caso anterior

$$\mathcal{M}_{fi}^{b \rightarrow \tilde{X} + d} = \frac{g_b g_a}{2E_{\tilde{X}}(E_b - E_d - E_{\tilde{X}})}. \quad (55)$$



Matriz de transición LI total

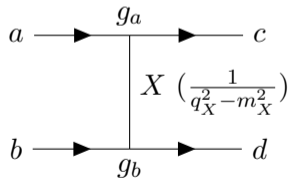
- ▶ La matriz LI de todo el proceso es la suma. Suponemos que $X = \tilde{X}$,

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{a \rightarrow X+c} + \mathcal{M}_{fi}^{b \rightarrow \tilde{X}+d}. \quad (56)$$

- ▶ Se obtiene

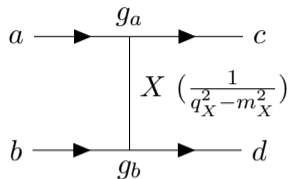
$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_b g_a}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2} = \frac{g_b g_a}{(p_a - p_c)^2 - m_X^2}. \quad (57)$$

- ▶ La representación en diagrama de \mathcal{M}_{fi} es más simple





Estructura general de un diagrama de Feynman



- ▶ La partícula X es virtual, no detectable. No es una partícula física.
- ▶ En general

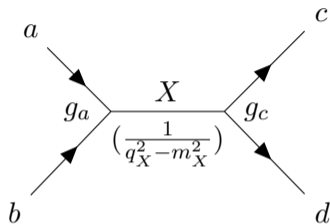
$$q_X^2 - m_X^2 \neq 0. \quad (58)$$

- ▶ En este tipo de diagrama

$$q_X^2 = (p_a - p_c)^2 = (p_d - p_b)^2 = t. \quad (59)$$



Estructura general de un diagrama de Feynman



► En este tipo de diagrama

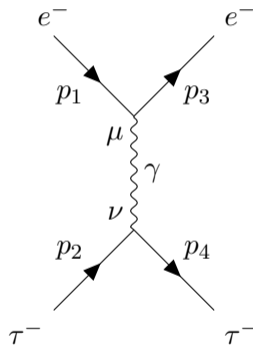
$$q_X^2 = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 = s. \quad (60)$$



- ▶ Se estudiarán algunos procesos sencillos: no partículas idénticas en el mismo estado (inicial o final)
- ▶ Nivel árbol.
- ▶ Intensidad de la interacción en cada vértice + el propagador de las líneas internas o partículas virtuales.
- ▶ Ejemplo

$$\mathcal{M}_{(3,4)(1,2)} \sim \langle \psi_3 | V | \psi_1 \rangle \left(\frac{1}{q_\gamma^2 - m_\gamma^2} \right) \langle \psi_4 | V | \psi_2 \rangle. \quad (61)$$

- ▶ Diagrama





- ▶ Los grados de libertad de espín y la polarización implican que el vértice y el propagador tienen “más” estructura que antes en el caso escalar.
- ▶ Estudiamos el detalle de la matriz de transición usando el término de interacción del campo A_μ y los espinores u_s y v_s .

$$\langle \psi_3 | V | \psi_1 \rangle \rightarrow \begin{pmatrix} u(p_3)^\dagger \\ v(p_3)^\dagger \end{pmatrix} q \gamma^0 \gamma^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)} \begin{pmatrix} u(p_1) \\ v(p_1) \end{pmatrix}. \quad (62)$$

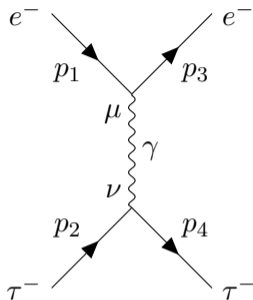
- ▶ En principio hay 4 combinaciones de estados (u y v) iniciales y finales. Dependerán del proceso a describir: estados *in* \rightarrow estados *out*.
- ▶ Hay polarizaciones λ . ¿Cuántas? Recordar que $q_X^2 - m_X^2 \neq 0$.



Otra vez: $e^- + \tau^- \rightarrow e^- + \tau^-$

- ▶ Todos los estados son partícula
($u + u \rightarrow u + u$).
- ▶ Se suman tres polarizaciones independientes.
Es equivalente a un campo B_μ ($m \neq 0$).

$$\mathcal{M}_{(3,4)(1,2)} \sim \langle \psi_3 | V | \psi_1 \rangle \left(\frac{1}{q_\gamma^2 - m_\gamma^2} \right) \langle \psi_4 | V | \psi_2 \rangle. \quad (63)$$



$$\mathcal{M}_{(3,4)(1,2)} = \sum_{q^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}(q)=0} u_e^\dagger(p_3) (q_e \gamma^0 \gamma^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)}) u_e(p_1) \left(\frac{1}{q_\gamma^2} \right) u_\tau^\dagger(p_4) (q_\tau \gamma^0 \gamma^\nu (\epsilon_\nu^{(\lambda)})^*) u_\tau(p_2). \quad (64)$$

$$\mathcal{M}_{(3,4)(1,2)} = (q_e q_\tau) \bar{u}_e(p_3) (\gamma^\mu) u_e(p_1) \left(\frac{-g_{\mu\nu}}{q_\gamma^2} \right) \bar{u}_\tau(p_4) (\gamma^\nu) u_\tau(p_2). \quad (65)$$

Reglas de Feynman



Reglas de Feynman: fermiones externos

- ▶ Partícula in



$$u(p)$$

$$e^- \rightarrow \bullet$$

- ▶ Partícula out



$$\bar{u}(p)$$

$$\bullet \rightarrow e^-$$

- ▶ Antipartícula in



$$\bar{v}(p)$$

$$e^+ \rightarrow \bullet$$

- ▶ Antipartícula out



$$v(p)$$

$$\bullet \rightarrow e^+$$



▶ Fotón in



$$\epsilon_{\mu}(q)$$

$$\gamma \rightarrow \bullet$$

▶ Fotón out



$$\epsilon_{\mu}^{*}(q)$$

$$\bullet \rightarrow \gamma$$



Reglas de Feynman: líneas internas y vértice

▶ Intercambio de fotón



$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$$



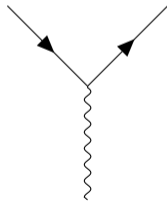
▶ Intercambio de fermión



$$-\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}$$



▶ Vértice

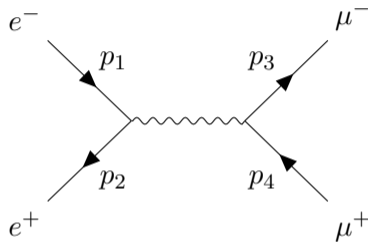


$$-iq\gamma^\mu$$



Ejemplo aniquilación

- ▶ Ejemplo: $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$



- ▶ La amplitud

$$\bar{v}(p_2) (iq_e \gamma^\alpha) u(p_1) \left(\frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2} \right) \bar{u}(p_3) (iq_\mu \gamma^\beta) v(p_4). \quad (66)$$



Mark Thomson (2013)
Modern particle physics
Cambridge University Press.



Michael Peskin (2018)
An introduction to quantum field theory
CRC press.



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.

