Clase 9

Gabriela Navarro

Módulo de Teoría
Filial Física de Partículas

25 de abril 2023

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Simetrías

- Tanto en mecánica clásica como cuántica las leyes de conservación están asociadas con simetrías del Hamiltoniano.

- En el caso de la Física de partículas es natural considerar estas ideas en el contexto de la mecánica cuántica.

- Una simetría del Universo puede ser expresada requiriendo que todas las predicciones físicas sean invariantes ante la transformación de la función de onda:

$$\psi \to \psi' = \hat{U}\psi$$

$\hat{U}$ operador de rotaciones finitas de los ejes coordenados

- La forma de $\hat{U}$ está restringida por la condición de que todas las predicciones físicas se mantengan sin cambios ante la transformación de simetría.

Simetrías

- Una condición necesaria es que las normalizaciones de la función de onda permanezcan sin cambios:

$$<\psi|\psi> = <\psi'|\psi'> = <\hat{U}\psi|\hat{U}\psi> = <\psi|\hat{U}^{\dagger}\hat{U}|\psi> \qquad \hat{U}^{\dagger}\hat{U} = I$$

Operador debe ser unitario!

- También los autoestados de un sistema deben permanecer sin cambios bajo la transformación -> el hamiltoniano también posee esa simetría $\hat{H} \rightarrow \hat{H}' = \hat{H}$

- Para que todas las predicciones físicas permanezcan invariantes ante la transformación de simetría también se requiere que todos los elementos de matriz permanezcan invariantes:

$$<\psi|\hat{H}|\psi> = <\psi'|\hat{H}|\psi'> = <\psi|\hat{U}^{\dagger}\hat{H}\hat{U}|\psi>$$

$$\hat{U}^{\dagger}\hat{H}\hat{U} = \hat{H}$$

$$\hat{U}\hat{U}^{\dagger}\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H} \rightarrow \hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H}$$

$$[\hat{H}, \hat{U}] = 0$$

$\hat{U}$ conmuta con el Hamiltaniano

Simetrías

- Consideremos una transformación infinitesimal

$$\hat{U}(\epsilon) = I + i\epsilon\hat{G}$$

$\hat{G}$ es el generador de la transformación

ϵ es un parámetro infinitesimal

- Entonces la unitariedad:

$$\hat{U}\hat{U}^{\dagger} = (1 + i\epsilon\hat{G})(1 - i\epsilon\hat{G}^{\dagger}) = 1 + i\epsilon(\hat{G} - \hat{G}^{\dagger}) + O(\epsilon^2) = 1 \Rightarrow \hat{G} = \hat{G}^{\dagger}$$

- Para cada simetría del Hamiltoniano hay una operación de simetría correspondiente con un generador $\hat{G}$ hermítico asociado.

- Los autoestados del operador son reales y entonces el operador $\hat{G}$ está asociado con una cantidad observada.

- Como $\hat{U}$ conmuta con el hamiltoniano -> $[\hat{H}, \hat{G}] = 0$

Simetrías

- En mecánica cuántica la evolución en el tiempo del valor esperado del operador es:

$$\frac{d}{dt} < \hat{G} > = i\left\langle \left[\hat{H}, \hat{G}\right] \right\rangle \rightarrow \frac{d}{dt} < \hat{G} > = 0$$

- Por cada simetría del Hamiltoniano, hay una cantidad observable conservada G!

Simetría $\longleftrightarrow$ ley de conservación

- Para cada simetría del Hamiltoniano hay una operación de simetría correspondiente con un generador $\hat{G}$ hermítico asociado.

- Los autoestados del operador son reales y entonces el operador $\hat{G}$ está asociado con una cantidad observada.

Simetría de sabor😋

- En los primeros estudios de física nuclear se comprobó que protones y neutrones tienen masa similar y que la fuerza nuclear es aproximadamente independiente de la carga -> el potencial fuerte es :

$$V_{pp} \approx V_{nn} \approx V_{np}$$

- Para reflejar esta simetría observada de la fuerza nuclear se propuso que protón y neutrón podrían ser dos estados de un nucleón (análogo al espín up y down de una partícula de espín $1/2$) :

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Se introduce la idea de Isospín I
- Protón y neutrón forman un doblete de Isospín
- Isospín total $I = 1/2, I_3 = \pm 1/2$

Simetrías

Simetría de sabor😋

- La interacción de QCD trata a todos los sabores de quarks por igual -> la interacción fuerte posee una simetría de sabor similar a la nuclear.

- Para un sistema de quarks podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{fuerte} + \hat{H}_{em}$$

Si $m_u \approx m_d$ y $\hat{H}_{em} << \hat{H}_{fuerte}$ -> el hamiltoniano posee simetría de sabor up-down (ud) -> nada cambiaría si todos los quarks up se reemplazaran por quarks down y viceversa.

- Consecuencia: la existencia de un estado de quarks ligado uud implica un estado ddu con la misma masa.

Simetría de sabor: un poco de matemática

- Estados up and down en un espacio abstracto de sabor: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Expresamos la invariancia de la interacción fuerte ante el cambio $u \leftrightarrow d$ como una invariancia ante rotaciones en el espacio abstracto de Isospín:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

- Una matriz general de 2x2 depende de 4 números complejos, puede ser descripta en términos de 8 números reales.
- La condición $\hat{U}\hat{U}^\dagger = I$ -> impone 4 restricciones -> 8 - 4 = 4 matrices independientes

Simetría de sabor: un poco de matemática

- Una de las matrices es: $\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i\phi}$ no es una transformación de sabor!

- Las 3 matrices restantes unitarias forman un grupo SU(2) con la propiedad det U= 1.

$$\hat{U} = 1 + i\epsilon\hat{G}$$

Generadores hermíticos

- Las matrices que representan a $\hat{G}$ del grupo SU(2) son linealmente independientes con la identidad y sin traza.
- Una posible elección de estas 3 matrices generadoras de la simetría de sabor ud son las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La simetría de sabor propuesta para la interacción fuerte tiene las mismas propiedades de transformación que el espín.

Simetría de sabor: un poco de matemática

- El isospín se define en términos de las matrices de Pauli $\hat{T} = \frac{1}{2}\sigma$.

- La transformación finita en el espacio de sabor up-down se escribe en términos de la transformación unitaria: $\hat{U} = e^{i\alpha\cdot\hat{T}}$

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = e^{i\alpha\cdot\hat{T}} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \alpha \cdot \hat{T} = \alpha_1\hat{T}_1 + \alpha_2\hat{T}_2 + \alpha_3\hat{T}_3$$

- Una transformación unitaria general es una rotación en el espacio de sabor.
- Esta transformación equivale a re-etiquetar el quark up como una combinación lineal del quark up y down.

Algebra de Isospín

- Generadores de SU(2) definen un álgebra de Lie no abeliana.
- Los tres generadores del grupo, que corresponden a observables físicos, satisfacen:

$$[\hat{T}_1, \hat{T}_2] = i\hat{T}_3 \;, \quad [\hat{T}_2, \hat{T}_3] = i\hat{T}_1, \quad [\hat{T}_3, \hat{T}_1] = i\hat{T}_2$$

- El operador total de isospín es : $\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2$, es hermítico -> corresponde a un observable físico.
- Debido a que los tres operadores no conmutan entre sí, sus observables no pueden ser "observados" simultáneamente.
- Los estados de isospín se pueden etiquetar en términos del isospín total I y su tercera componente I_3.
- Los autoestados de isospín son análogos a los autoestados del momento angular:

$$|\, l, m > \,\rightarrow\, |\, I, I_3 >$$

Simetrías

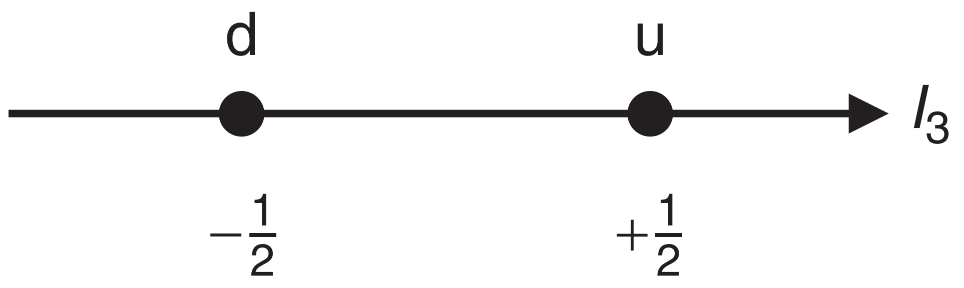
Algebra de Isospín

- $$\hat{T}\,|\,I, I_3 > \,=\, I(I+1)\,|\,I, I_3 > \qquad\qquad \hat{T}_3\,|\,I, I_3 > \,=\, I_3\,|\,I, I_3 >$$

- En términos de isospín, los quarks up y down están representados por:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \qquad \text{y} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

- Los quarks up y down son los estados de un multiplete de espín 1/2 con tercera componente de isospín +1/2 y -1/2.

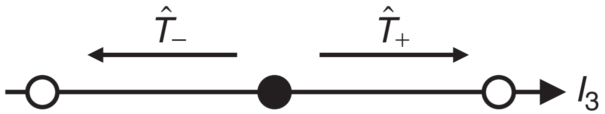


Simetrías

Algebra de Isospín: Operadores de isospín "escalera"

- Podemos definir los operadores escalera:

$$\hat{T}_- \equiv \hat{T}_1 - i\hat{T}_2 \qquad \text{y} \qquad \hat{T}_+ \equiv \hat{T}_1 + i\hat{T}_2$$



$$\hat{T}_+ | I, I_3 > = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3+1)}\, | I, I_3 >$$
$$\hat{T}_- | I, I_3 > = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3-1)}\, | I, I_3 >$$

- Los operadores escalera tienen el efecto de subir o bajar la tercera componente del isospín

$$\boxed{\hat{T}_+ u = 0 \qquad \hat{T}_+ d = u \qquad \hat{T}_- u = d \qquad \hat{T}_- d = 0}$$

- Los operadores escalera convierten $u \rightarrow d$ y $d \rightarrow u$

Combinación de quarks

- Las reglas para combinar isospín para un sistema de dos quarks son idénticas a las de suma de adición del momento angular.

- I_3 suma como un escalar e I se suma como la magnitud de un vector.

- Para dos estados de isospín $|I^a, I_3^a>$ y $|I^b, I_3^b>$ que son combinadas, el resultado es:

$$I_3 = I_3^a + I_3^b \qquad \text{y} \qquad |I^a - I^b| \leq I \leq |I^a + I^b|$$

- Combinaciones de dos quarks: utilizamos las reglas para combinar isospín -> combinamos dos quarks livianos:

$$uu \equiv \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,1\right\rangle \qquad dd \equiv \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,-1\right\rangle$$

Formación de hadrones

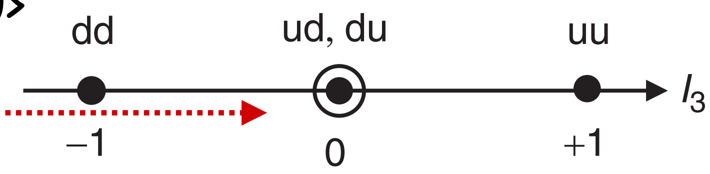
Combinación de quarks

- Las combinaciones ud y du con I_3=0 no son autoestados del isospín total.
- Para obtenerlas se utilizan los operadores escalera:

$$T_-|1,+1> = \sqrt{2}|1,0> = T_-(uu) = ud + du \quad \text{->} \quad |1,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud+du)$$

- El estado |0,0> es una combinación lineal de ud y du ortogonal con |1,0>

$$|0,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud-du)$$



- Las 4 posibles combinaciones se descomponen en un triplete con I=1 y un singlete con I=0

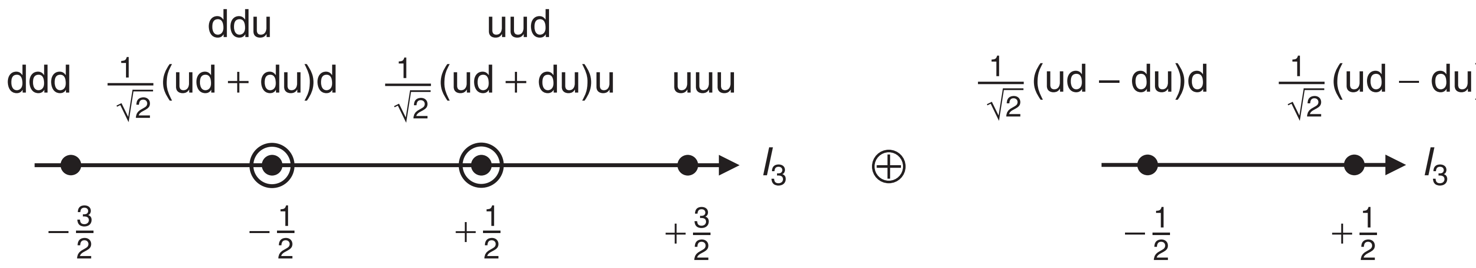
$$uu \equiv \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,1\right\rangle \quad dd \equiv \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,-1\right\rangle \quad |1,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud+du) \qquad |0,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud-du)$$

$$2 \otimes 2 = \quad 3 \quad \oplus \quad 1$$

Formación de hadrones

Combinación de quarks

- Para formar un barión agregamos un quark u o d más a estos estos estados singlete y triplete.
- I_3 se suma como escalar -> -3/2, -1/2, +1/2, +3/2



I = 1/2 -> doblete

I = 3/2 -> cuadruplete

I = 1/2 -> doblete

Simétrico ante intercambio de cualquier par de quarks

$$\left|\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right\rangle = uuu$$

$$\left|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$$

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd)$$

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle = ddd$$

$$\left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu)$$

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2ddu - udd - dud)$$

Simetría mixta:
Simétrico ante 1 <-> 2

$$\left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu)$$

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(udd - dud)$$

Simetría mixta:
Anti-simétrico ante 1 <-> 2

Combinación de quarks: estados de espín

- Podemos aplicar exactamente la misma matemática para encontrar las posibles combinaciones de espín
- La combinación de 3 partículas de espín 1/2 se construye de la misma manera que para el caso de isospín y es:

$$\left|\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\right\rangle = \uparrow\uparrow\uparrow$$

$$\left|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\uparrow\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\uparrow) \qquad \left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow) \qquad \left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)$$

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow+\downarrow\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow) \qquad \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\downarrow\downarrow\uparrow-\uparrow\downarrow\downarrow-\downarrow\uparrow\downarrow) \qquad \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\downarrow-\downarrow\uparrow\downarrow)$$

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \downarrow\downarrow\downarrow$$

Estado fundamental de las funciones de onda de bariones

- Existen 8 posibles estados de isospín para un sistema de 3 quarks y 8 posibles estados de espín -> 64 combinaciones posibles de estado de sabor y de espín.

- Además de las componentes de sabor y espín de la función de onda hay que tener en cuenta las correspondientes al contenido de color y espacial.

- La función general de un estado ligado de qqq que tiene en cuenta todos los grados de libertad es:

$$\psi = \phi_{sabor}\chi_{espin}\xi_{color}\eta_{espacial}$$

- Como los quarks son Fermiones, se requiere que ψ sea anti-simétrica frente al intercambio de cualesquiera de dos quarks -> pone restricciones sobre cada función de onda.

Formación de hadrones

Estado fundamental de las funciones de onda de bariones

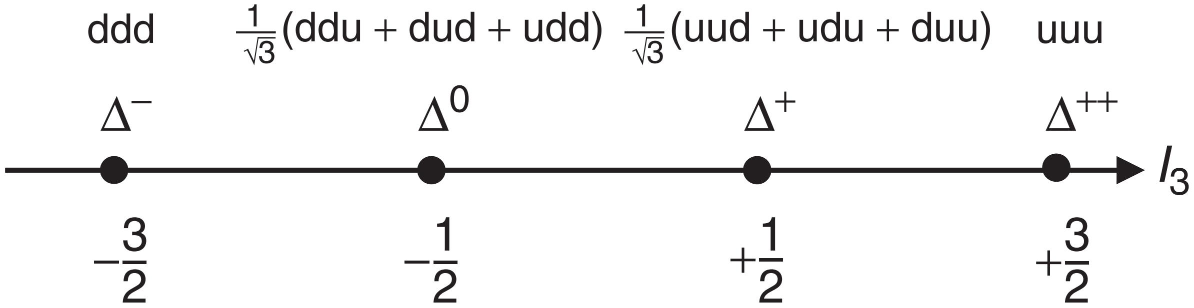
$$\psi = \phi_{sabor}\chi_{espin}\xi_{color}\eta_{espacial}$$

- La función de onda de color es necesariamente totalmente anti-simétrica.

- Consideraremos el estado fundamental -> no hay momento angular orbital interno -> L=0 -> la función de onda espacial es simétrica -> la combinación de color-espacial es antisimétrica.

- Esto implica que la combinación $\phi_{sabor}\chi_{espin}$ debe ser simétrica!

- Una forma de armar un producto totalmente simétrico es combinar las funciones de onda simétricas de espín con las funciones de onda simétricas de isospín



Da lugar a 4 partículas de espín-3/2 e isospín-3/2.
Se las conoce como los bariones Δ

Estado fundamental de las funciones de onda de bariones

$$\psi = \phi_{sabor}\chi_{espin}\xi_{color}\eta_{espacial}$$

- La otra forma es combinar las funciones de onda de espín e isospín con simetría mixta de forma tal que ambas sean simétricas o asimétricas al intercambiar 1 <-> 2.

- No resulta suficiente, ya que no tienen simetría definida al intercambiar 1 <-> 3.

- Existe una combinación lineal: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_S\chi_S + \phi_A\chi_A)$ -> simétrico ante el intercambio de cualesquiera dos quarks.
- Los dos posibles estados de sabor son el protón y el neutrón

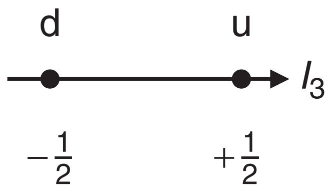
$$\begin{aligned}|p\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}(&2u\uparrow u\uparrow d\downarrow - u\uparrow u\downarrow d\uparrow - u\downarrow u\uparrow d\uparrow \\ &+ 2u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\uparrow d\uparrow u\downarrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow \\ &+ 2d\downarrow u\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow).\end{aligned}$$

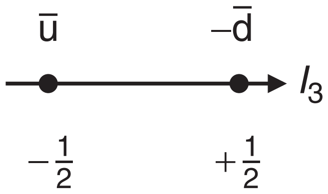
Formación de hadrones

Representación de Isospín de los antiquarks

- Podemos aplicar una transformación de conjugación de carga al doblete de isospín $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ y escribir el doblete de isospín de antiquarks:

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \qquad \bar{q} = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$$





El orden de $\bar{u}$ y $\bar{d}$ y su signo en el doblete aseguran que:

- quarks y antiquarks se comportan de la misma manera ante transformaciones de SU(2) de sabor y
- las predicciones físicas son invariantes ante transformaciones simultáneas de u <-> d y $\bar{u}$ <-> $\bar{d}$

- Efecto de los operadores escalera:

$$\hat{T}_+\bar{u} = -\bar{d} \qquad \hat{T}_+\bar{d} = 0 \qquad \hat{T}\_\bar{u} = 0 \qquad \hat{T}\_\bar{d} = -\bar{u}$$

Mesones

- Un mesón es un estado ligado de quark y antiquark. En términos de isospín, los 4 posibles estados se pueden expresar como combinación de los dobletes quark y antiquark de SU(2).

$$|1,+1> = \left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle \overline{\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle} = -u\bar{d}$$

$$|1,-1> = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \overline{\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle} = d\bar{u}$$

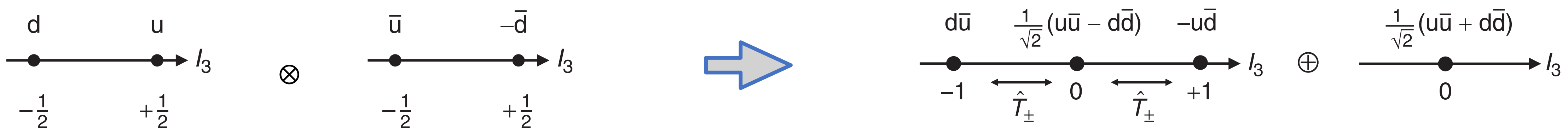
- Utilizando los opereradores escalera podemos hallar el tercer estado del triplete:

$\hat{T}_{-}|1,+1>$ ->

$$|1,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

- Y el singlete lo obtenemos por ortogonalidad :

$$|0,0> = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$



$2 \otimes \bar{2}$

Triplete

$3 \oplus 1$

Singlete

SU(3) de sabor😋

- Es posible extender la simetría de sabor para incluir el quark strange "s".

- La parte de interacción fuerte del Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{fuerte} + \hat{H}_{em}$ trata a todos los quarks de igual forma y por lo tanto posee simetría de sabor uds **exacta**.

- Sin embargo, como la masa del quark s es diferente a la masa de los quarks u y d, el Hamiltoniano total no es simétrico frente a transformaciones de sabor.

- Debido a que $m_s - m_{u/d} \approx 100$ MeV es relativamente pequeña comparada con la energía de ligadura de los bariones del orden de 1 GeV -> vamos a proceder como si el Hamiltoniano tuviera la simetría de sabor uds. (Tener en mente que la simetría es sólo aproximada).

SU(3) de sabor😋

- La simetría de sabor uds se puede expresar en el espacio de sabor como:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \\ s' \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

- Las matrices de 3x3 se escriben en términos de 9 números complejos -> 18 números reales.
- 9 restricciones que vienen de $\hat{U}^\dagger \hat{U}$ -> 18 - 9 = 9 -> $\hat{U}$ puede ser expresada en términos de 9 matrices de 3x3 linealmente independientes.
- Una de esas matrices es la identidad x fase compleja -> no relevante.
- Las 8 matrices restantes forman un grupo de SU(3).

SU(3) de sabor😋

- Las matrices se pueden expresar en términos de 8 generadores independientes hermíticos $\hat{T}_i$.
- Los generadores se escriben en términos de 8 matrices λ -> $\hat{T} = \frac{1}{2}\lambda$
- Las matrices actúan sobre las representaciones de SU(3) de u, d y s.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- El grupo SU(3) uds de simetría de sabor contiene al subgrupo de SU(2) u <-> d de simetría de sabor -> 3 de las matrices λ corresponden a la simetría de isospín de SU(2):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de Pauli

SU(3) de sabor😋

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La tercera componente del isospín es: $\hat{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3$ -> $\hat{T}_3 u = +\frac{1}{2}u, \quad \hat{T}_3 d = -\frac{1}{2}d\,, \hat{T}_3 s = 0$
- Los operadores de subida y bajada de isospín se definen como : $T_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$
- Las matrices λ restantes se obtienen teniendo en cuenta que la simetría SU(3) también contienen los subgrupos SU(2) u<->s y SU(2) d<->s, los cuales también se expresan en función de las matrices de Pauli.

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

u <-> s

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d <-> s

Simetrías

SU(3) de sabor😋

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- De estas 9 matrices sólo 8 son independientes -> alguna de las matrices diagonales λ_3, λ_X, λ_Y puede ser escrita en función de las otras dos.
- Como la simetría u <-> d es exacta, nos quedamos con λ_3 y usamos una combinación lineal de λ_X, λ_Y:
- Las 8 matrices utilizadas para representar los generadores de la simetría SU(3): matrices de Gellman

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

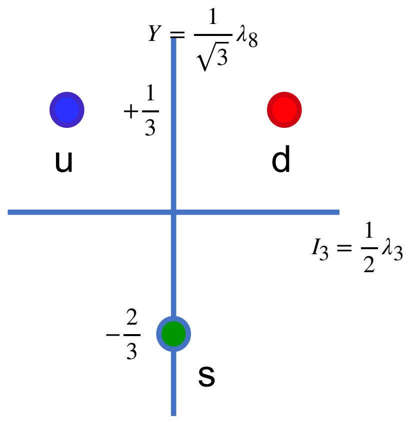
$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

SU(3) de sabor😋: estados

- De los 8 generadores de SU(3) sólo T_3 y T_8 conmutan y describen cantidades observables compatibles -> además del isospín total, los estados de SU(3) se describen en términos de los autoestados de las matrices λ_3 y λ_8.

- Los números cuánticos correspondientes son la tercera componente del isospín y la hipercarga de sabor definidos por los operadores:

$$\hat{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 \qquad \hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$$



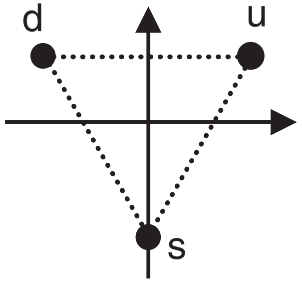
- El contenido de sabor de un estado está identificado únicamente por:

$$I_3 = \frac{1}{3}(n_u - n_d) \quad \text{y} \quad Y = \frac{1}{3}(n_u + n_d - 2n_s)$$

n_i :number of quarks with flavor u, d or s

SU(3) de sabor😋: estados

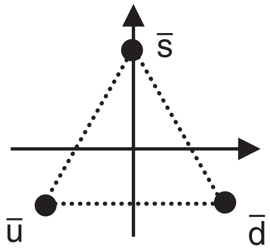
Los números cuánticos de I_3 y Y para antiquarks tienen el signo opuesto y forman un multiplete $\bar{3}$.



Quarks: 3

$$I_3 u = +\frac{1}{2}u;\;\; I_3 d = -\frac{1}{2}d;\;\; I_3 s = 0$$

$$Yu = +\frac{1}{3}u;\;\; Yd = -\frac{1}{3}d;\;\; Ys = -\frac{2}{3}s$$



Antiquarks: $\bar{3}$

$$I_3 \bar{u} = -\frac{1}{2}\bar{u};\;\; I_3 \bar{d} = +\frac{1}{2}\bar{d};\;\; I_3 \bar{s} = 0$$

$$Y\bar{u} = -\frac{1}{3}\bar{u};\;\; Y\bar{d} = -\frac{1}{3}\bar{d};\;\; Y\bar{s} = +\frac{2}{3}\bar{s}$$

- Las 6 matrices λ restantes se pueden usar para generar los operadores escalera:

$$\hat{T}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2) \;\; \rightarrow \;\; d \leftrightarrow u$$

$$\hat{V}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \;\; \rightarrow \;\; u \leftrightarrow s$$

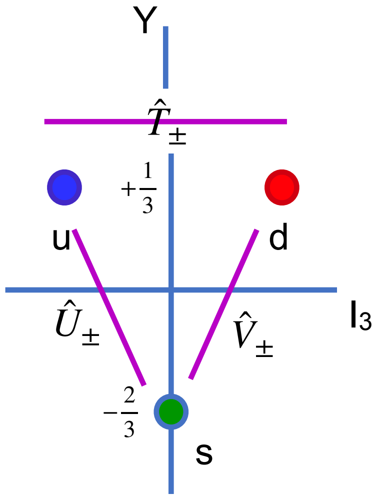
$$\hat{U}_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \;\; \rightarrow \;\; d \leftrightarrow s$$

$$T_+ d = u;\;\; T_- u = d$$

$$V_+ s = u;\;\; V_- u = s$$

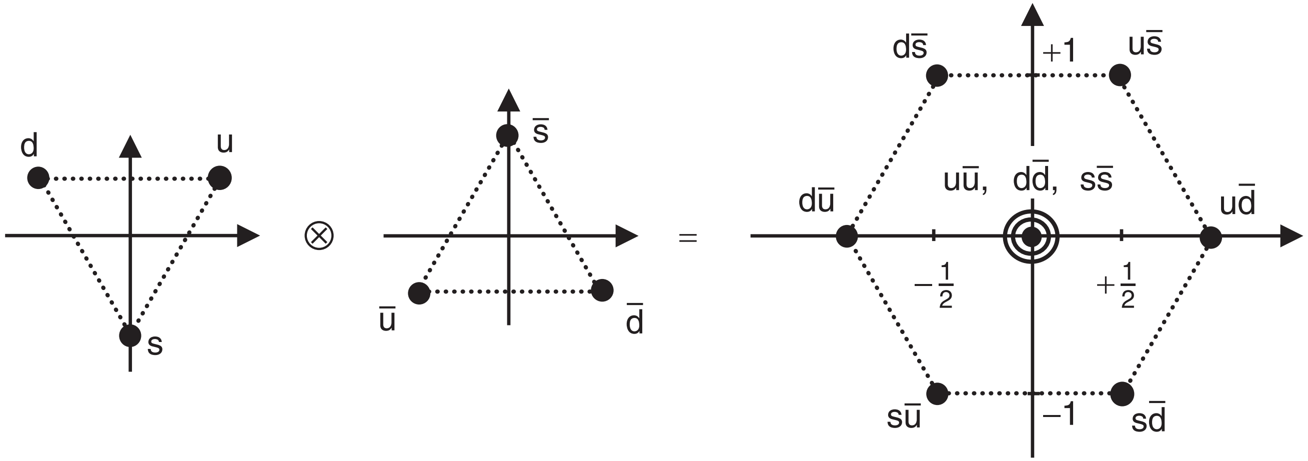
$$U_+ s = d;\;\; U_- d = s$$

Todas las otras combinaciones dan 0



Mesones livianos (uds)

- Los estados livianos de mesones $q\bar{q}$ formados por todas las combinaciones posibles de quarks/antiquarks u, d y s se pueden construir usando la propiedad aditiva de I_3 y Y para los estados de los extremos.
- Luego se usan los operadores escalera para obtener la estructura completa de multipletes.
- Las 9 combinaciones posibles son:

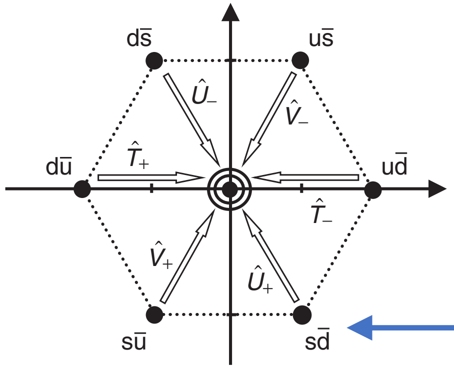


- Los 3 estados centrales con $I_3 = 0$ y $Y = 0$, serán combinaciones lineales de $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$.

Mesones livianos (uds)

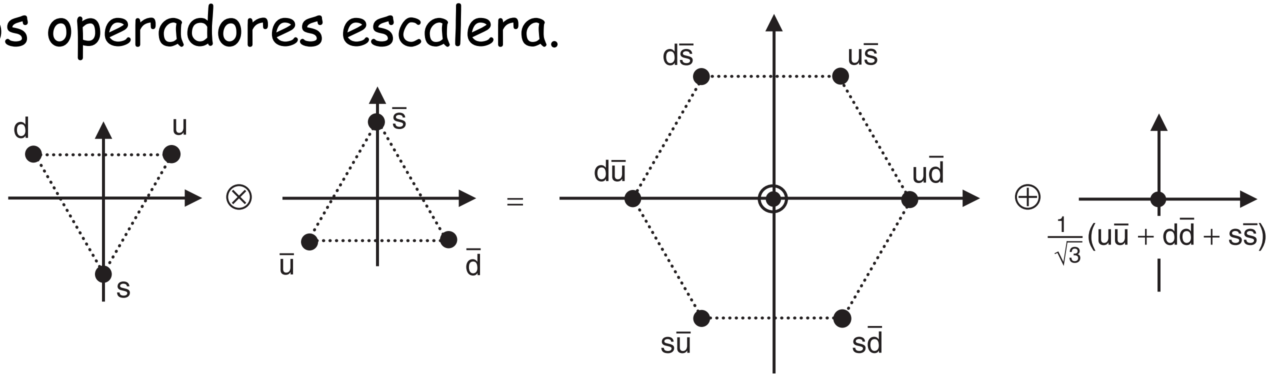
- Para obtener los estados centrales usamos los operadores escalera y la ortogonalidad. Desde cada extremo, hay 6 maneras de alcanzar el centro:
  Ej.

$$T_+|d\bar{u}> = |u\bar{u}> - |d\bar{d}>$$



$$U_+|s\bar{d}> = |d\bar{d}> - |s\bar{s}>$$

- De los 6 posibles estados, sólo dos son independientes.
- Como son 3 estados con $I_3 = 0$ y $Y = 0$ -> no todos son parte del mismo multiplete, hay uno que **no** se obtiene usando los operadores escalera.



Estructura de multipletes para la combinación de un q and anti-q en la simetría de sabor SU(3).
Los estados están descompuestos en un octete y un singlete.

Mesones livianos (uds): L=0

- Consideremos los mesones con momento angular orbital $\ell = 0$ -> el momento angular total **J** está determinado por el estado de espín solamente -> dos posibles estados: s = 0 y s = 1.

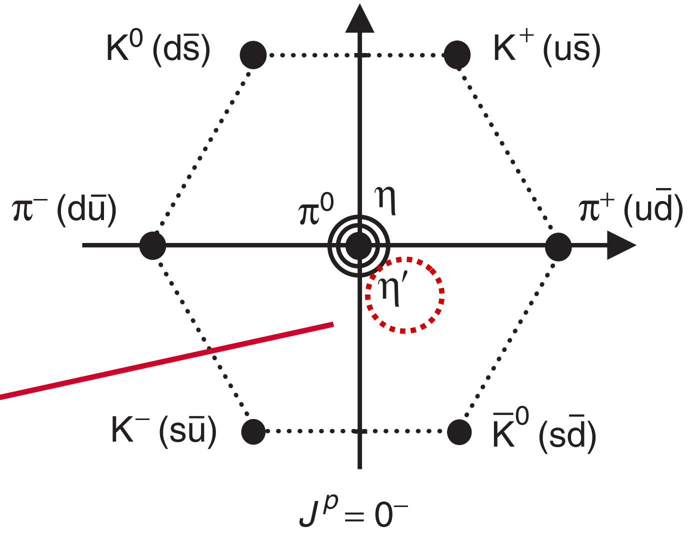
- Los estados más livianos se dividen en J = 0 (pseudoescalares) y J = 1 (vectoriales).

Como la simetría de sabor es aproximada. Experimentalmente:

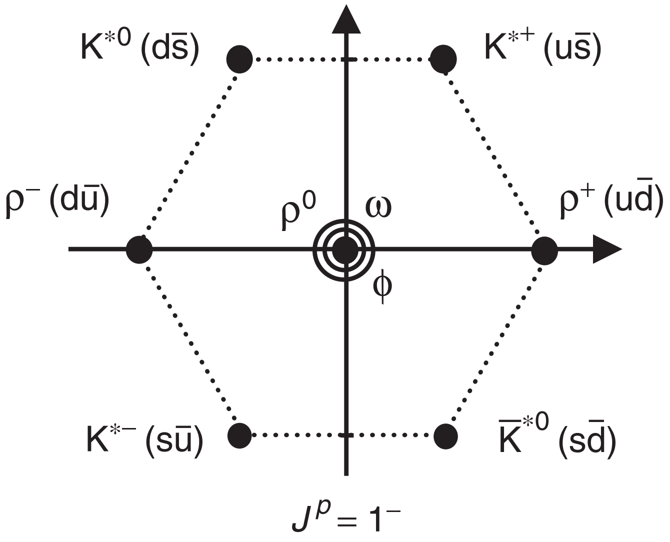
$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$
$$\eta \approx \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$
$$\eta' \approx \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Singlete

Pseudoescalares



Vectoriales

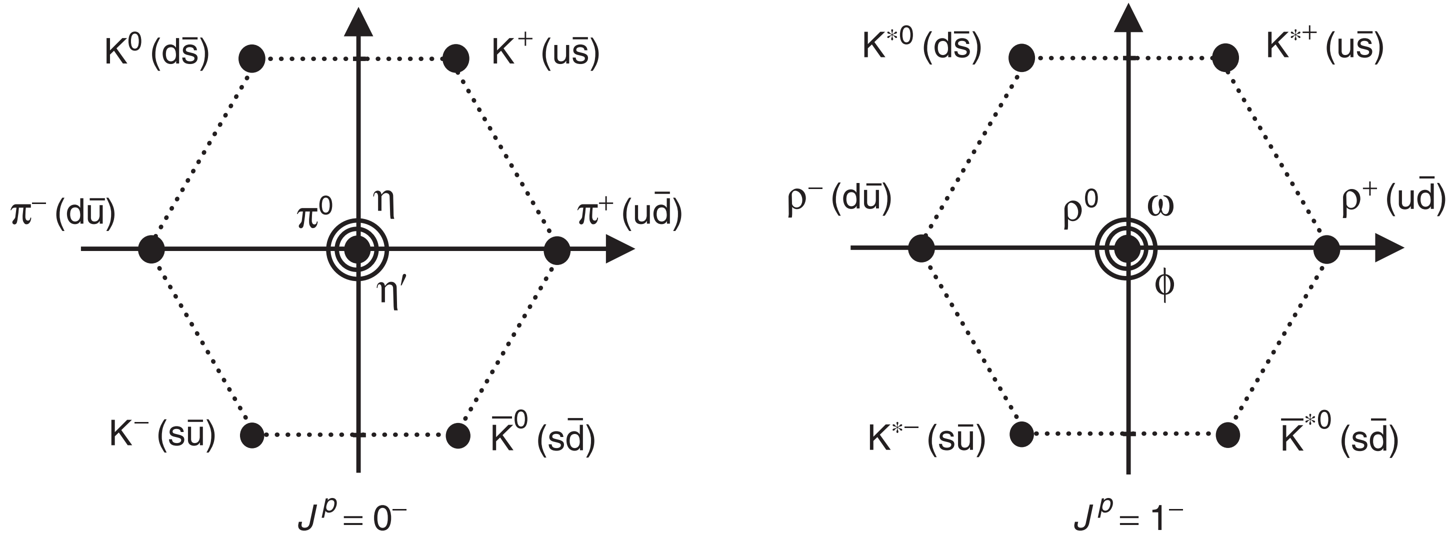


$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$
$$\omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$
$$\phi \approx s\bar{s}$$

Las predicciones son menos útiles -> los estados físicos son mezclas de los estados de octete y singlete.

Mesones livianos (uds): L=0

- Masas



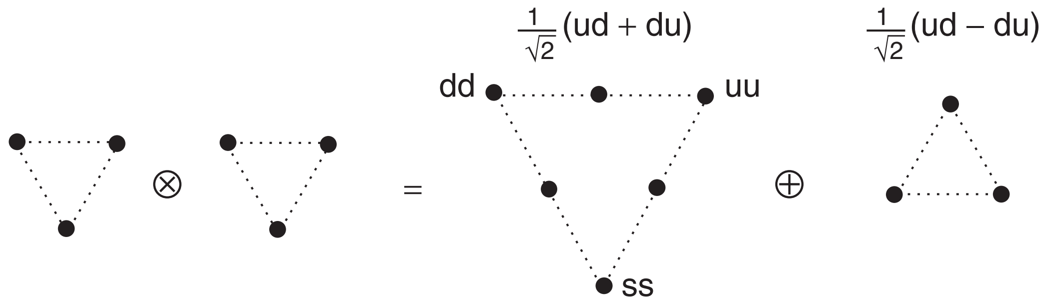
Pseudoscalar mesons		Vector mesons	
π^0	135 MeV	ρ^0	775 MeV
$\pi^\pm$	140 MeV	$\rho^\pm$	775 MeV
$K^\pm$	494 MeV	$K^{*\pm}$	892 MeV
$K^0, \bar{K}^0$	498 MeV	$K^{*0}/\bar{K}^{*0}$	896 MeV
η	548 MeV	ω	783 MeV
η'	958 MeV	ϕ	1020 MeV

- Si la simetría SU(3) de sabor fuera exacta todos los estados de mesones del octete pseudoescalar tendrían la misma masa.
- Las diferencias observadas pueden ser atribuidas al hecho que el quark s es más masivo que los up y down.
- Sin embargo esto no explica que los mesones vectoriales son más masivos que los pseudoescalares.
- La única diferencia entre los estados π y ρ es la función de onda de espín.
- Por lo tanto la diferencia de masas puede ser atribuida a una interacción espín-espín.

Simetrías

Bariones (uds)

- Construir estados bariónicos es bastante tedioso, debemos considerar la estructura de multipletes resultante de combinar dos quarks y añadir el tercero.
- Concentrémonos en la estructura de multipletes:

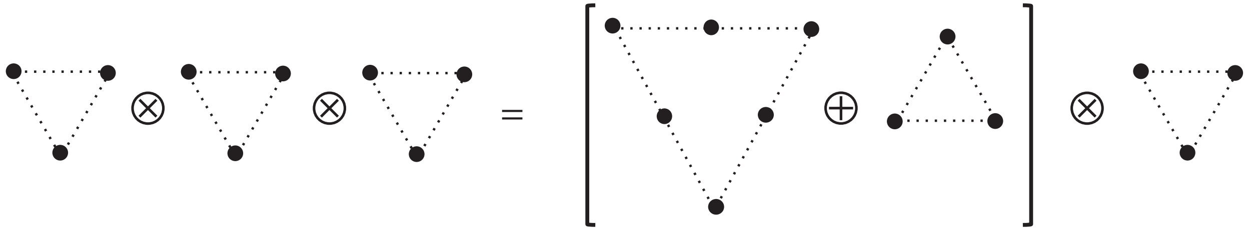


Simétrico

Anti-simétrico

El triplete tiene los mismos estados de I_3 y Y que la representación de SU(3) de un antiquark -> $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$

- La estructura de multipletes para las 27 posibles combinaciones de sabor de un sistema qqq se obtiene añadiendo un triplete de quarks a cada sextete y triplete anteriores.

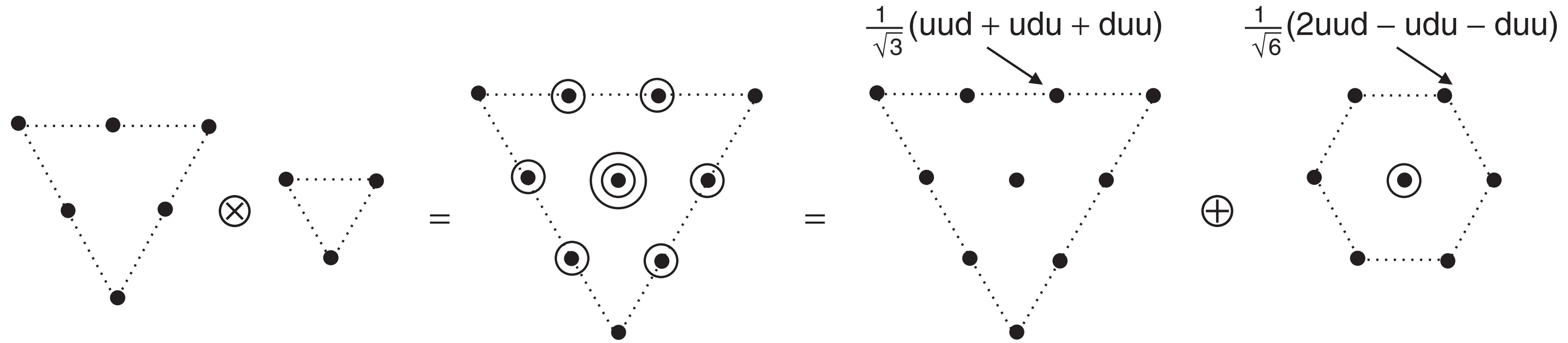


Bariones (uds)

- Comenzamos por el sextete:

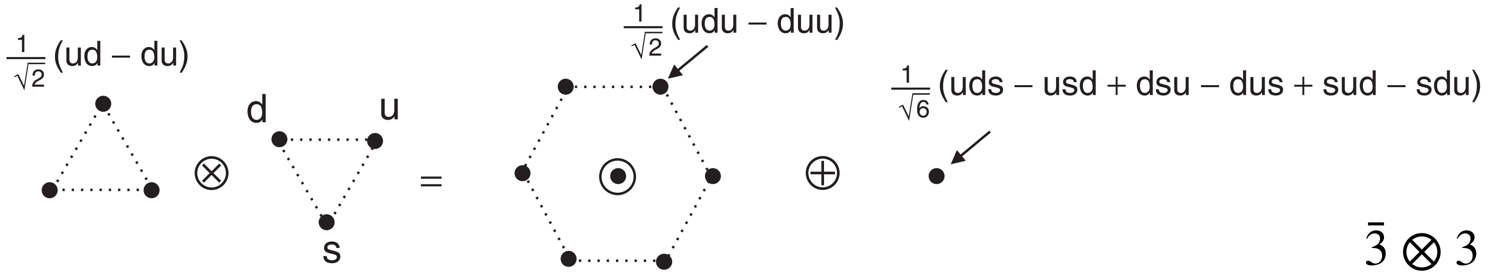
Decuplete simétrico

Octete con simetría mixta



$$3 \otimes 6 = 10 \oplus 8$$

- Triplete: como el caso de mesones uds combinamos $\bar{3} \otimes 3$ y obtenemos un octete y un singlete.



Octete con simetría mixta

Singlete totalmente anti-simétrico

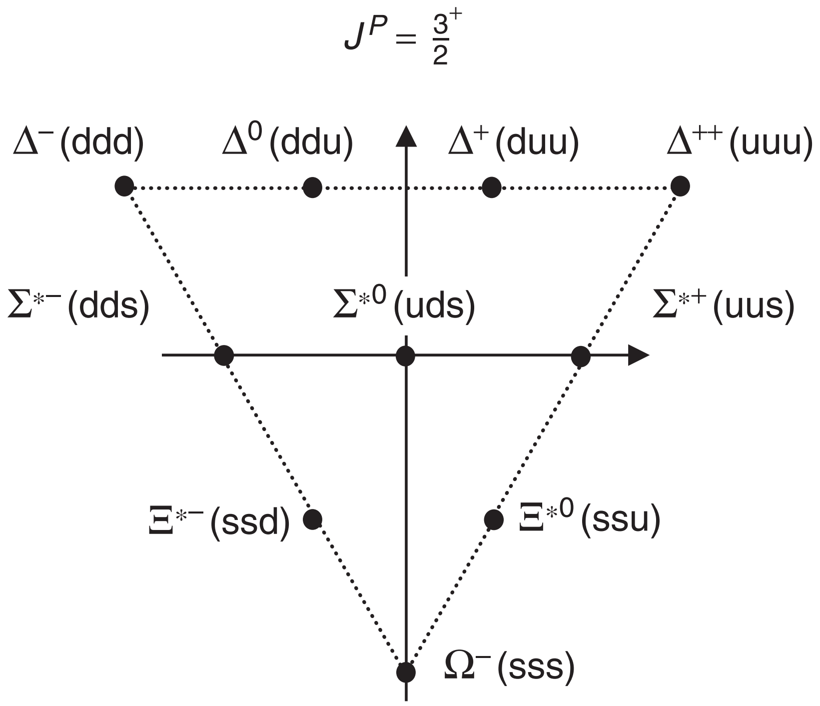
$$\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1$$

En resumen la combinación de 3 quarks uds se descompone en:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Bariones observados del decuplete con L=0

- Los estados bariónicos del decuplete tienen spin 3/2, y funciones de onda de espín y de sabor simétricas.

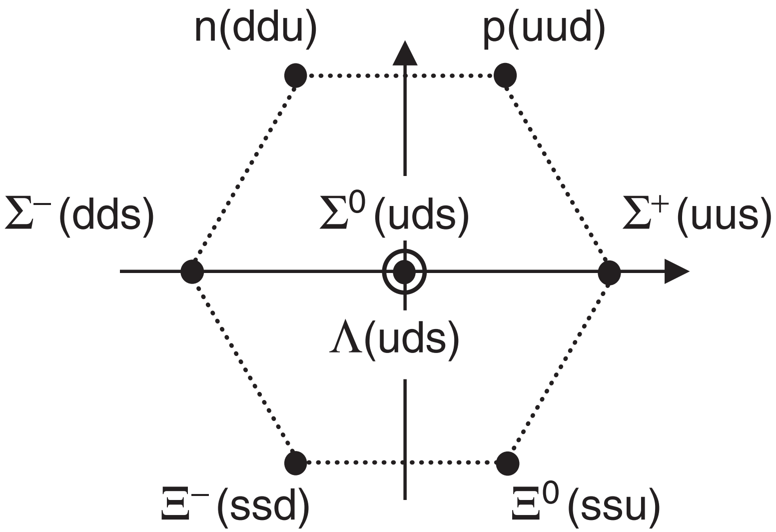


Masas del decuplete	
Δ	1230 MeV
Σ^*	1385 MeV
Ξ^*	1533 MeV
Ω	1670 MeV

Si la simetría de sabor de SU(3) fuera exacta todas las masas serían las mismas.

Bariones observados del octete con L=0

- Los estados bariónicos del octete tienen spin 1/2, y está formado de funciones de onda con simetría mixta de sabor y simetría mixta de espín.



Masas del octete	
p, n	940 MeV
Σ	1190 MeV
Λ	1120 MeV
Ξ	1320 MeV

Si la simetría de sabor de SU(3) fuera exacta todas las masas serían las mismas.

Próxima clase:

Fundamentos de la QCD

Backup slides

- Ejemplo: invariancia traslacional en una dimensión.

- El Hamiltoniano para un sistema de partículas depende de las velocidades y de la distancia relativa entre partículas -> no cambia frente una transformación que traslada todas las partículas en un distancia infinitesimal:

$$x \to x + \epsilon$$

- La transformación de la función de onda es:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x+\epsilon) \quad \text{expansión de Taylor} \to \psi(x) + \frac{\partial \psi}{\partial x}\epsilon + O(\epsilon^2)$$

$$\psi' = (1 + i\epsilon \frac{\partial}{\partial x})\psi(x) \quad \Rightarrow \quad \psi' = (1 + i\epsilon \hat{p}_x)\psi(x)$$

$$\hat{p}_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$$

El generador de la transformación de simetría es el operador cuántico $\hat{p}_x$.
La invariancia traslacional del Hamiltoniano implica la conservación del momento.

- En general una operación de simetría puede depender de mas de un parámetro:

$$\hat{U} = 1 + i\vec{\epsilon} \cdot \vec{G}$$

- Ejemplo: caso de una traslación infinitesimal en el espacio 3-dimensional:

$$\hat{U} = 1 + i\vec{\epsilon} \cdot \hat{p} \equiv 1 + i\epsilon_x \hat{p}_x + i\epsilon_y \hat{p}_y + i\epsilon_z \hat{p}_z$$

- Transformaciones finitas

- Cualquier transformación finita puede ser expresada como una serie de transformaciones infinitesimales:

$$\hat{U}(\alpha) = \lim_{n \to \infty} (1 + i\frac{1}{n}\vec{\alpha} \cdot \vec{G})^n = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{G}}$$

$$\hat{U}(\alpha) = \lim_{n\to\infty} (1 + i\frac{1}{n}\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{G})^n = e^{i\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{G}}$$

- Traslación finita $x \to x + x_0$ en una dimensión:

$$\hat{U}(x_0) = e^{ix_0\hat{p}_x} = e^{x_0\frac{\partial}{\partial x}}$$

- La transformación de la función de onda:

$$\psi'(x) = \hat{U}\psi(x) = e^{x_0\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x)$$
$$= \left(1 + x_0\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x_0^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right)\psi(x)$$
$$= \psi(x) + \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{x_0^2}{2!}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dots$$

Expansión de Taylor esperada para $\psi(x + x_0)$