



# LaCoNGA-Physics

Mecánica Estadística Avanzada

---

## 5 Aproximación de campo medio

---

*Profesora*  
GLORIA BUENDÍA  
Departamento de Física  
Universidad Simón Bolívar  
Caracas-Venezuela  
buendia@usb.ve

# **Contenido General**

**1 Aproximación de campo medio**

**1**

# 1. Aproximación de campo medio

(Weiss 1907)

Método que aunque no describe cuantitativamente los resultados correctos es extremadamente útil para describir el comportamiento cualitativo y extraer información de sistemas muy difíciles de resolver para otros métodos.

Vamos a ilustrar como funciona ésta “Técnica” para el modelo de *Ising*

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j - H \sum_i S_i \quad (1)$$

[ Note que el primer término se puede escribir como

$$\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} S_i S_j \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j ]$$

└ Suma sobre pares

Tomamos  $J_{ij} = J_{ji} = J$ . Sistema es isotrópico.

La idea es escribir (1)

$$\mathcal{H} = \sum_i ( - J \sum_{j'} S_{j'} - H ) S_i = - \sum_i h_i S_i$$

└ Suma sobre los vecinos cercanos de  $i$

Donde  $h_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_i}$

$$h_i = \left( J \sum_{j'} S_{j'} + H \right)$$

$h_i$  es el campo generalizado que actúa sobre el espín  $i$ , debido al campo externo  $h$  y el efecto de sus espines cercanos.

Aproximación de campo medio

$$h_i \longrightarrow \bar{h} = Jz\langle S \rangle + H$$

Donde el término  $\sum_{j'} S_{j'}$  que esta asociado a la suma de los primeros vecinos del espín  $i$ .

**Ejemplo:** Red cuadrada

$$\begin{array}{c} S_\mu \\ S_L \quad S_i \quad S_R \\ S_d \end{array} \quad \sum_{j'} S_{j'} = S_L + S_R + S_\mu + S_d$$

Dependiendo del tipo de red un espin tiene  $z$  vecinos cercanos número de coordinación.

En la aproximación de campo medio

$$\sum_{j'} S_{j'} \approx z \langle S \rangle \rightarrow \text{Aproximación de campo medio}$$

Se asume que todos los espines son equivalentes y que cada espin siente un campo promedio  $\bar{h}$ , debido al campo externo y a los espines que lo rodean. Este campo fue llamado campo molecular por Weiss.

**Note:** en esta aproximación todos los espines son equivalentes, y todos sienten el mismo campo medio.

Ahora

$$\mathcal{H} \approx -\bar{h} \sum_{i=1}^N S_i \quad (\text{Mean Field})$$

**Hemos convertido el sistema en un conjunto de espines que no interactúan entre si.**

Ahora

$$\begin{aligned} Z &\approx Z_{\text{MF}} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \dots e^{\beta \bar{h} \sum S_i} \\ &= \prod_{i=1}^N \left[ \sum_{S_i} e^{\beta \bar{h} S_i} \right] = \left[ \sum_{S_i} e^{\beta \bar{h} S_i} \right]^N \end{aligned}$$

Si los espines toman valores  $\pm 1$

$$Z_{\text{MF}} = \left[ e^{\beta \bar{h}} + e^{-\beta \bar{h}} \right]^N = \left[ 2 \cosh \beta \bar{h} \right]^N$$

Donde  $\bar{h} = H + zJ \langle S \rangle$

No conocemos  $\langle S \rangle$

Noten que en esta aproximación se ignoran las fluctuaciones, el campo efectivo sobre un espin,  $\bar{h}$ , es independiente de la configuración instantánea de sus vecinos, el campo real  $h_i$  depende de los vecinos

Calculemos  $\langle S \rangle$

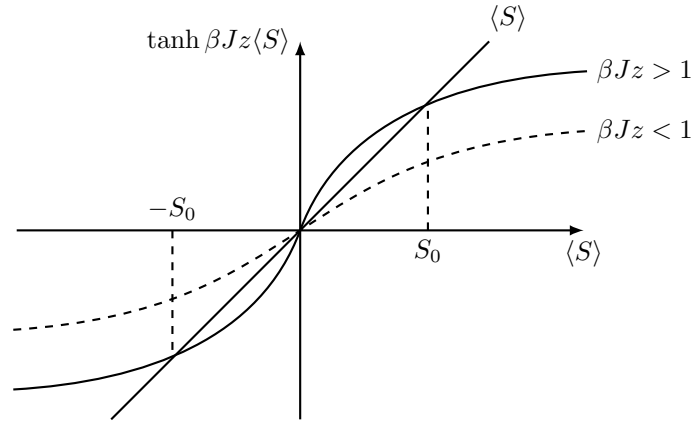
$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{\sum_{S_i} S_i e^{\beta \bar{h} S_i}}{\sum_{S_i} e^{\beta \bar{h} S_i}} \quad \text{En la aproximación de campo medio} \\ &= \frac{e^{\beta \bar{h}} - e^{-\beta \bar{h}}}{e^{\beta \bar{h}} + e^{-\beta \bar{h}}} = \tanh \beta \bar{h} \end{aligned}$$

Recordemos que  $\bar{h} = H + Jz \langle S \rangle$

$$\Rightarrow \langle S \rangle = \tanh [\beta (H + Jz \langle S \rangle)]$$

↳ Esta ecuación (autoconsistente) se resuelve numéricamente

-Caso particular,  $H = 0$ ,  $\langle S \rangle = \tanh \beta J z \langle S \rangle$



Buscamos la solución en la intersección de  $\tanh \beta J \langle S \rangle$  y  $\langle S \rangle$

**Si**  $\beta J \langle S \rangle > 1$  hay 3 soluciones  $\langle S \rangle = 0$   
 $\langle S \rangle = \pm S_0$

**Si**  $\beta J \langle S \rangle < 1$  solo tenemos la solución trivial  $\langle S \rangle = 0$

$$\left( \begin{array}{ll} \tanh x < 1 & \text{si } x < 1 \\ > 1 & \text{si } x > 1 \end{array} \right)$$

Entonces el punto crítico viene dado por

$$\beta_C J z = 1 \implies \beta_C = \frac{1}{Jz} \implies T_C = \frac{Jz}{K}$$

La  $T_C$  depende de la red ( $z$ ) y de  $J$ , no es una característica universal.

**a) Si**  $\beta J z > 1 \implies T < T_C$

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{e^{\alpha \langle S \rangle} - e^{-\alpha \langle S \rangle}}{e^{\alpha \langle S \rangle} + e^{-\alpha \langle S \rangle}} & \alpha &= \beta J z \\ 1 + \langle S \rangle &= \frac{2e^{\alpha \langle S \rangle}}{e^{\alpha \langle S \rangle} + e^{-\alpha \langle S \rangle}} & ; & \quad 1 - \langle S \rangle = \frac{2e^{-\alpha \langle S \rangle}}{e^{\alpha \langle S \rangle} + e^{-\alpha \langle S \rangle}} \\ \implies e^{2\alpha \langle S \rangle} &= \frac{1 + \langle S \rangle}{1 - \langle S \rangle} \implies 2\alpha \langle S \rangle = \ln \frac{1 + \langle S \rangle}{1 - \langle S \rangle} \end{aligned}$$

(Tenemos cuidado de no expandir  $e^{\alpha \langle S \rangle}$  por que  $\alpha$  puede ser grande)

$$\text{Cerca de } T_C, \langle S \rangle \rightarrow 0 \quad \ln(1 \pm \langle S \rangle) \rightarrow \pm \langle S \rangle - \frac{\langle S \rangle^2}{2} \pm \frac{\langle S \rangle^3}{3} + \dots$$

$$\implies 2\alpha \langle S \rangle \rightarrow 2 \left[ \langle S \rangle + \frac{\langle S \rangle^3}{3} \right] \quad \text{Cerca de } T_C$$

$$\frac{Jz}{KT} = 1 + \frac{\langle S \rangle^2}{3} \implies KT = \frac{Jz}{1 + \frac{\langle S \rangle^2}{3}} \approx Jz \left( 1 - \frac{\langle S \rangle^2}{3} \right)$$

Recordemos que  $KT_C = Jz$

$$\Rightarrow KT \approx KT_C \left(1 - \frac{\langle S \rangle^2}{3}\right) \quad \text{Siempre cerca de } T_C \quad t = (T - T_c)/T_C$$

$$\Rightarrow \frac{K(T - T_C)}{KT_C} = -\frac{\langle S \rangle^2}{3} \Rightarrow \langle S \rangle^2 = 3(-t)$$

$$\Rightarrow \langle S \rangle \sim (-t)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Recordemos que estamos en la región } T < T_C, \text{ por lo que } t < 0$$

Ojo este beta no es  $KT$   $\beta^* = \frac{1}{2}$  el mismo exponente obtenido con la teoría de *Landau*, lo que era de esperarse ya que ésta también es una teoría de campo medio.

Si  $T = 0, \beta \rightarrow \infty$

$$\langle S \rangle = \frac{e^{\beta Jz \langle S \rangle} - e^{-\beta Jz \langle S \rangle}}{e^{\beta Jz \langle S \rangle} + e^{-\beta Jz \langle S \rangle}} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} |\langle S \rangle| = 1$$

Note que en esta aproximación predice que aún en  $1 - d$  el modelo tiene magnetización espontánea y transición de fase, lo cual sabemos que es incorrecto.

$$\beta_{\text{MF}} = \frac{1}{2} \quad \beta_{\text{exacto}} = \frac{1}{8}$$

**-Susceptibilidad Magnética,  $\chi(T, H)$**

$$m = \langle S \rangle, \quad \chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_T \implies \frac{\chi}{N} = \left. \frac{\partial m}{\partial H} \right|_T$$

$$M = mN$$

$$m(T, H) = \tanh[\beta(H + Jzm)]$$

$$\frac{\chi}{N} = \text{sech}^2[\beta(H + Jzm)] \left[ \beta \left( 1 + Jz \frac{\chi}{N} \right) \right]$$

$$\implies \frac{\chi}{N} = \frac{\beta \text{sech}^2[\beta(H + Jzm)]}{1 - Jz\beta \text{sech}^2[\beta(H + Jzm)]}$$

- Caso  $H = 0$ ,  $m(T > T_C) = 0$ ,  $m(T < T_C) \neq 0$ ,  $m(T \approx T_C) \approx 0$

$$\text{sech } x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots) + (1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots)}$$

$$\approx \frac{2}{2(1 + \frac{x^2}{2})} \approx 1 - \frac{x^2}{2} \implies \text{sech}^2 x \approx 1 - x^2$$

$$\frac{\chi}{N}(T, H = 0) = \frac{\beta \text{sech}^2(\beta Jzm)}{1 - Jz\beta \text{sech}^2(\beta Jzm)}$$

Cerca de  $T_C$ ,  $T \lesssim T_C$ ,  $m \rightarrow 0$

$$\frac{\chi}{N}(T \lesssim T_C, H = 0) \approx \frac{\beta(1 - \beta^2 J^2 z^2 m^2)}{1 - Jz\beta(1 - \beta^2 J^2 z^2 m^2)} \approx \frac{\beta}{1 - \beta Jz}$$

Como para  $H = 0$   $KT_C = Jz$ ,  $t = \frac{T - T_C}{T_C}$

$$\implies \frac{\chi}{N}(T \lesssim T_C, H = 0) \approx \frac{\frac{1}{KT}}{1 - \frac{KT_C}{KT}} = \frac{1}{KT - KT_C}$$

$$\implies \frac{\chi}{N}(T \lesssim T_C, H = 0) \sim t^{-1} \implies \gamma = 1$$

De nuevo, con la Teoría de campo medio  $\gamma$  es universal, y no depende de la dimensión. Estudios posteriores indican que en  $2 - d$   $\gamma = \frac{7}{4}$  (exacto), en  $3 - d$   $\gamma \approx 1,25$

**Calor específico**  $C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$

**Tarea:** Demuestre que cerca de  $T_C$ ,  $\langle E \rangle = -N [Hm + Jzm^2]$

Si  $H = 0$ , y  $m^2(T \lesssim T_C) \approx 3(\beta Jz - 1)$

$$C(T \approx T_C) \approx -\frac{1}{KT^2} \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = \frac{N}{KT^2} 3J^2 z^2 = \frac{N}{KT^2} 3K^2 T_C^2 \approx 3NK$$

En esta aproximación  $C$  no diverge a la  $T_C$ . Resultado que no es correcto.

**-Susceptibilidad magnética a  $T_C$ , si  $H \neq 0 \rightarrow 0$**

$$m = \tanh[\beta(H + Jzm)] \quad \tanh x \xrightarrow{x \rightarrow 0} x - \frac{x^3}{3}$$

Si  $H$  y  $m$  son pequeños (estamos a  $T_C$ )

$$m \sim \left[ \beta(H + Jzm) - \frac{\beta^3}{3}(H + Jzm)^3 \right]$$

Recordemos que estamos a  $T_C \implies \beta Jz = 1$

$$0 \approx \beta H - \beta^3 (Jzm)^3 = \beta_C H - m^3 \quad (\text{Donde hemos tomado } m > H\beta_C)$$

$$\implies m(T = T_C) \sim H^{\frac{1}{3}} \quad \delta = 3$$

Valores  $\delta$   $\begin{matrix} 2-d & \delta = 1,5 \text{ (exacto)} \\ 3-d & \delta \sim 4,8 \end{matrix}$

**-Campo medio**  $KT_C = zJ$

En  $1-d$   $KT_C = 2J$ , Red cuadrada ( $2d$ )  $KT_C = 4J$ , Red cúbica ( $3d$ )  $KT_C = \frac{6J}{K}$

**-Otras técnicas**

$1-d$  No hay  $T_C$ ,  $2-d$   $KT_C = 2,3J$ ,  $3-d$   $KT_C = 4J$

Las Temperaturas críticas predichas por Teoría de campo medio son más altas que las reales. Esto es esperado, al despreciar las fluctuaciones el sistema se desordena a  $T$  más altas.

Note que a medida que aumenta la dimensionalidad del sistema, los resultados dados por campo medio son mejores, se aproximan más a los resultados correctos. Esto no es casualidad, a medida que aumenta la dimensión del sistema cada espin tiene más vecinos, aumenta  $z$  el número de coordinación de la red, por lo que la aproximación de campo medio, en que el efecto de la interacción sobre un espin, se toma como el promedio de todos los espines de la red, funciona mejor.