



La-CoNGA-Physics

Mecánica Estadística Avanzada

5

Grupo de Renormalización^(a)

Profesora
GLORIA BUENDÍA
Departamento de Física
Universidad Simón Bolívar
Caracas-Venezuela
buendia@usb.ve

Junio-Julio 2023

Contenido General

1 Grupo de Renormalización *Parte a*

1

1. Grupo de Renormalización

Transiciones de fase continuas \rightarrow Universalidad \rightarrow Exponentes críticos. Para cada clase de universalidad hay una dimensión crítica tal que para dimensiones superiores los exponentes críticos vienen dados por la teoría de campo medio.

Hay relaciones entre los exponentes críticos (desigualdades), los exponentes críticos no son independientes entre sí.

Necesitamos una Teoría general para tratar estos fenómenos la *Teoría de Ginzburg-Landau* (que incluye fluctuaciones) es adecuada, pero es muy difícil calcular exponentes críticos por la complicación de calcular las integrales funcionales.

Una característica que define la criticidad es que las fluctuaciones y por lo tanto las funciones de correlación son infinitas \implies En el punto crítico el sistema es invariante ante cambios de escala. Pa esto es que las teorías de campo medio al desprejciar las fluctuaciones no reproducen lo que pasa en los puntos críticos. Necesitamos una teoría general que nos permita el cálculo de los exponentes críticos sin necesidad de resolver exactamente los modelos.

↙ Tesista de *Murray Gell-Mann*

- 1971 *K.G. Wilson* \rightarrow Grupo de Renormalización (Nobel 1982)

Idea: que pasa con el sistema a medida que cambia su tamaño (se estudia con una escala distinta) - Mirar un mural de cerca o de lejos.

Se cambian las escalas de longitud, removiendo grados de libertad, se va de un sistema “pequeño” a uno más “grande”, los detalles microscópicos se van perdiendo, solo en el punto crítico se conserva la información relevante del sistema, al ser las correlaciones infinitas en ese punto, las propiedades críticas no cambian al reescalar el sistema \rightarrow Hay que buscar los puntos fijos de la transformación.

Idea precursora - Bloques de spin de *Kadanoff* - Modelo de *Ising* en $2 - D$ (Huang)

$$\beta\mathcal{H} = -J' \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - H' \sum_i S_i \quad \begin{array}{l} J' = \beta J \\ H' = \beta H \end{array}$$

Si el sistema tiene un punto crítico a $T = T_c$, entonces tendrá un punto crítico a J'_c , definimos la cercanía a este punto crítico como $t = \frac{J - J_c}{J_c}$. Note que H' y t no tienen dimensiones

$$\begin{aligned} Q(N, H', t) &= \sum_{\{S'\}} e^{-\mathcal{H}'(N, H', t)} = e^{-G(N, H', t)} \\ &= e^{-Ng(H', t)} \end{aligned}$$

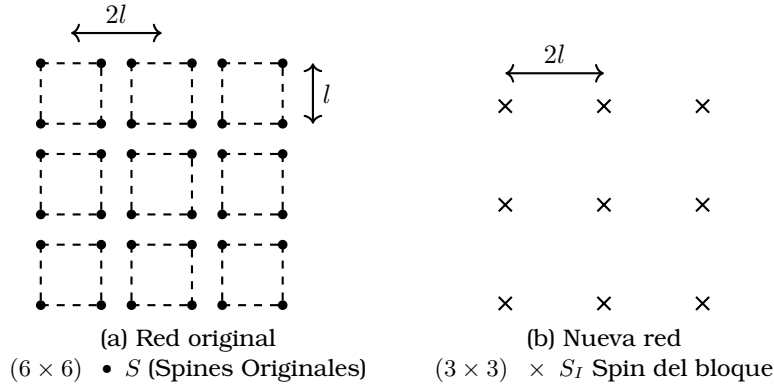
Ya que la energía libre $G(N, H', t) = Ng(H', t)$, es extensiva. En éste formalismo la unidad de longitud viene dada por el espaciamento de la red (distancia entre los sitios de la red).

Ahora divida la red en bloques de tamaño b^d (cada bloque tiene b^d spines, donde d =dimensión del sistema). A cada bloque se le asigna un espin S_L , por la regla de la mayoría.

Si $S = \sum_{i \in I} S_i$ (Suma de espines en el bloque I)

$$S_I = \begin{cases} 1 & S > 0 \\ -1 & S < 0 \\ \pm & S = 0 \end{cases}$$

Ejemplo: Si $d = 2$ y $b = 2$



Si la red original tiene N espines, la nueva tiene $N = \frac{N}{b^d}$, el espaciamiento de la red cambia en un factor b . Si originalmente los espines estaban correlacionados una distancia d_0 , ahora la correlación cambio a $\frac{d_0}{b}$. Note que todas las fluctuaciones menores que b son eliminadas.

Es como si usted midiera algo en centímetros y luego cambia a metros.

Hipótesis de *Kadanoff*, el Hamiltoniano en la nueva red conserva la forma

$$\beta'' \mathcal{H}'' = -J'' \sum_{\langle IJ \rangle} S_I S_J - H'' \sum_I S_I \tag{1}$$

Entonces

$$Q''(N'', H'', t'') = \sum_{\{S_I\}} e^{-\beta'' \mathcal{H}''} = e^{-N'' g(H'', t'')}$$

Ya que la energía libre g es independiente del tamaño, y el \mathcal{H} tiene la misma forma que el anterior

Según *Kadanoff* ambas funciones de partición son iguales, lo que sería correcto si el nuevo hamiltoniano se pudiera escribir como (1)

$$\begin{aligned} Q''(N'', H'', J'') &= Q(N, H', J') \\ \implies Ng(H', J') &= N''g(H'', J'') & N'' &= \frac{N}{b^d} \\ \implies g(H', J') &= b^{-d}g(H'', J'') \end{aligned}$$

Si definimos $\left. \begin{matrix} H'' = b^A H' \\ J'' = b^B J' \end{matrix} \right\}$ Siempre se puede hacer

$$\implies g(H', t') = b^{-d}g(b^A H', b^B J')$$

$\implies g$ es una función homogénea \implies escala \implies el sistema cerca de los puntos críticos es tal que las cantidades físicas se comportan como potencias \implies exponentes críticos.

Ésta idea de construir bloques de espin para reescalar el sistema es la base del grupo de normalización, pero la idea de *Kadanoff* de asumir que el nuevo Hamiltoniano tiene solo interacciones a primeros vecinos como lo tenía el Hamiltoniano original es incorrecto.

La idea del grupo de normalización R es ver como cambia el Hamiltoniano cuando se reescala el sistema, por ejemplo haciendo bloques

$$\mathcal{H}'' = R\mathcal{H},$$

los puntos fijos de ésta transformación

$$\mathcal{H}^* = R\mathcal{H}^*$$

podrían corresponden a los puntos críticos, por que en estos puntos el sistema es invariante bajo cambios de escala.

Ejemplo: Grupo de renormalización-Ising 1 - d

Chandler

$$\mathcal{H} = -J \sum S_i S_j \quad \beta J = K$$

$$Z(N, K) = \sum_{S_1} \dots \sum_{S_i} \dots e^{K[S_1 S_2 + S_2 S_3 + \dots S_N S_1]}$$

Idea del grupo de renormalización: Remover grados de libertad

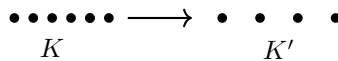
$$Z(N, K) = \sum_{S_1} \dots \sum_{S_i} \dots e^{K[(S_1+S_3)S_2+(S_3+S_5)S_4+\dots]}$$

Sumando sobre los espines pares

ojo corregir

$$= \sum_{S_1} \sum_{S_3} \sum_{S_5} \dots \left[e^{K(S_1+S_3)} \left[e^{K(S_3+S_5)} + e^{-K(S_3+S_5)} \right] \right] \quad (2)$$

Éste nuevo sistema tiene solo $\frac{N}{2}$ espines (N par). La idea es escribir la función de partición de éste nuevo sistema de forma similar al sistema original, con otra función de acoplamiento K' , a menos de una constante



Escribimos

$$Z(K, N) = \sum_{S_1} \sum_{S_3} \dots e^{K'(S_1 S_3 + S_3 S_5 + \dots S_{N-1} S_1)} f(K)^{\frac{N}{2}} \quad (3)$$

Si (2) y (3) son iguales

$$\implies e^{K(S_i+S_j)} + e^{-K(S_i+S_j)} = f(K) e^{K' S_i S_j} \quad (4)$$

$$\implies Z(K, N) = f(K)^{\frac{N}{2}} Z\left(K', \frac{N}{2}\right) \rightarrow \text{Escalamiento de Kadanoff}$$

(4) se debe satisfacer para cualquier combinación de S_i, S_j

$$\begin{aligned} S_i + S_j = 2 \\ S_i + S_j = 0 \\ S_i + S_j = -2 \end{aligned} \implies \begin{aligned} e^{2K} + e^{-2K} = f(K)e^{K'} \\ 2 = f(K)e^{-K'} \end{aligned} \tag{5}$$

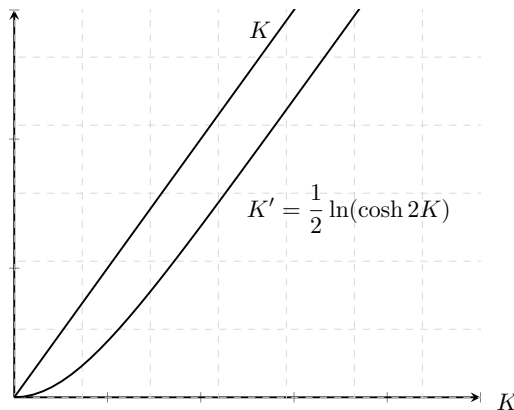
Tenemos 2 ecuaciones y 2 incógnitas ($K', f(K)$)

De (5) $\frac{e^{2K} + e^{-2K}}{2} = e^{2K'} = \cosh 2K$

$$\implies K' = \frac{1}{2} \ln(\cosh 2K)$$

$$f(K) = 2e^{K'} = 2\sqrt{\cosh 2K}$$

$$\begin{cases} \text{Si } K = 0 \implies K' = 0 \\ \text{Si } K \rightarrow \infty \implies K' \rightarrow K - \frac{1}{2} \ln 2 \end{cases} \quad \text{Puntos fijos de la transformación}$$



Note que $K' < K$

En la iteración los valores de K' son cada vez más pequeños, la interacción entre los espines es cada vez menor

Recordemos que $Z(K, N) = e^{Ng(K)}$

Ya que $g(K)$ es la energía libre por partícula

$$Z\left(K', \frac{N}{2}\right) = e^{\frac{N}{2}g(K')}$$

Pero hemos demostrado que

$$\begin{aligned}
 Z(K, N) &= f^{\frac{N}{2}}(K) Z\left(K', \frac{N}{2}\right) \\
 \implies \ln Z(K, N) &= \frac{N}{2} \ln f(K) + \ln Z\left(K', \frac{N}{2}\right) \\
 Ng(K) &= \frac{N}{2} \ln f(K) + \frac{N}{2} \ln g(K') \\
 g(K') &= 2g(K) - \ln \left[2\sqrt{\cosh 2K} \right] \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \rightarrow \text{Ecuación del grupo de renormalización} \\
 \ln 2\sqrt{\cosh 2K} &= \ln 2 \left(\frac{e^{2K} + e^{-2K}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{matrix} \nearrow_{K \rightarrow 0} \ln 2 \\ \searrow_{K \rightarrow \infty} K + \frac{1}{2} \ln 2 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Si $K \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 g(K) &= \frac{1}{2}g(K') + \frac{1}{2} \left(K + \frac{1}{2} \ln 2 \right) \\
 &= \frac{1}{2}g(K') + \frac{K'}{2} + \frac{1}{2} \ln 2
 \end{aligned}
 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Si } K \rightarrow \infty \\ K' = K - \ln 2/2 \end{array} \right)$$

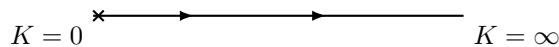
En la iteración los valores de K' son cada vez más pequeños. El flujo en el espacio de los K es hacia el desorden. Si conocemos los valores de $g(K')$ podemos calcular los de $g(K)$.

Ejemplo: Si $K' = 0,001$ (Equivalente a T muy altas, o J casi nulo) el sistema equivale a un grupo de espines que prácticamente no interactúan, cada espin puede tomar aleatoriamente cualquiera de sus 2 valores (± 1), como después de una iteración $N' = \frac{N}{2}$

$$\begin{aligned}
 Z' &= Z\left(K' = 0,001, \frac{N}{2}\right) = 2^{\frac{N}{2}} = e^{\frac{N}{2}g(K')} \\
 \implies g(K') &= \frac{2}{N} \ln Z' = \ln 2
 \end{aligned}$$

Como $g(K) = \frac{1}{2}g(K') + \frac{K'}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$ y $K = \frac{1}{2} \cosh^{-1} \left(e^{2K'} \right)$ podemos tener el resultado para un sistema más ordenado, es decir a T más baja, donde es más difícil de calcular

En éste caso *Ising* en $1 - d$, $K = 0$ y $K = \infty$ son puntos fijos, no cambian con la transformación



El hecho que no haya otro punto fijo entre $K = 0$ y $K = \infty$ (el flujo es continuo de $K = 0 \rightarrow \infty$) nos dice que el modelo en $1 - d$ no tiene punto crítico, es decir no tiene transición de fase para ningún valor finito de T , diferente de cero. En $K = 0$ la red está totalmente desordenada, $K = \infty$ está totalmente

ordenada, en ambos puntos el sistema se ve igual no importa con que escala se vea \implies es invariante de escala.

Con éste método de remover grados de libertad abruptamente se disminuye la constante de acoplamiento, no hay orden de largo alcance en el modelo de $1 - D$, excepto a $T = 0$ (punto fijo trivial).

Conclusión: *Ising* en $1 - D$

$$K' = \frac{1}{2} \ln [\cosh(2K)] \quad f(K) = 2\sqrt{\cosh(2K)}$$

$$g(K') = 2g(K) - \ln \left\{ \sqrt{\cosh 2K} \right\}$$

Estas ecuaciones describen las transformaciones que obedece el “grupo” de renormalización. **Si la función de partición se conoce para K' se puede obtener para otros valores de K , sin resolver el modelo.**

Idea del “grupo” de renormalización R

Si K^n es el conjunto de constantes, de acoplamiento después de n aplicaciones del grupo de renormalización $\left[\text{Ejm } K^n \begin{pmatrix} J_1\beta \\ J_2\beta \\ H\beta \end{pmatrix} \right]$

$$K^{n+1} = RK^n$$

Los puntos fijos satisfacen $K^* = RK^*$, pueden tener importancia por que uno de ellos podría corresponder a un punto al cual el sistema es invariante de escala, la longitud de correlación es 0 ó ∞ . Si la longitud de correlación es infinito, ese punto fijo corresponde a un punto de una transición de fase.