

# LaCoNGA-Physics

## Mecánica Estadística Avanzada

---

6

Grupo de Renormalización <sup>b</sup>

---

*Profesora*  
GLORIA BUENDÍA  
Departamento de Física  
Universidad Simón Bolívar  
Caracas-Venezuela  
buendia@usb.ve

Junio-Julio 2023

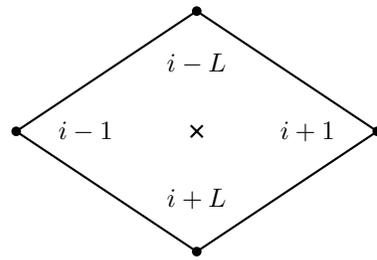
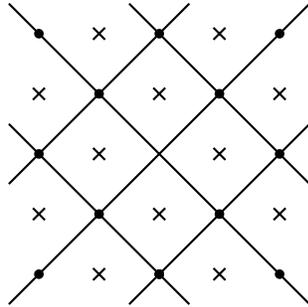
# **Contenido General**

**1 Ejemplo: Ising en 2-d - Grupo de Renormalización**

**1**

# 1. Ejemplo: Ising en 2-d - Grupo de Renormalización

(Chandler)



(a) Red cuadrada  $L \times L$

Sumamos sobre la mitad de espines (alternos  $\times$ ). Si los espines en la red original estaban separados  $a$ , en la nueva red están separados  $a\sqrt{2}$ .

Por cada espin  $i$  sobre el que se realiza la suma, hay un término de la forma  $K(S_{i-1} + S_{i+1} + S_{i-L} + S_{i+L})S_i$

$$Z(K, N) = \sum_{S_1} \dots \sum_{S_j} \dots e^{K(S_{i-1} + S_{i+1} + S_{i-L} + S_{i+L})S_i} \dots$$

Sumando sobre los espines intermedios

$$Z(K, N) = \sum \dots \sum \left\{ e^{K(S_{i-1} + S_{i+1} + S_{i-L} + S_{i+L})S_i} + e^{-K(S_{i-L} + S_{i+1} + S_{i+L} + S_{i-1})S_i} \right\}$$

$\downarrow$   
 Quedan  $\frac{N}{2}$  sumas

Ahora debemos buscar una transformación que nos permita recuperar la forma de la función de partición general.

Es decir

$$e^{K(S_{i-1} + S_{i+1} + S_{i+L} + S_{i-L})S_i} + e^{-K(S_{i-1} + S_{i+1} + S_{i-L} + S_{i+L})S_i} = f(K) \exp\left[K'(S_{i-1}S_{i-L} + S_{i-L}S_{i+1} + S_{i+1}S_{i+L} + S_{i+L}S_{i-1})\right]$$

### No sabemos si es posible satisfacer ésta igualdad

Debe satisfacerse para todas las combinaciones posibles de los 4 espines, cada uno de ellos puede valer  $\pm 1$

Combinaciones posibles de los 4 espines

- $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \pm 1$       2 combinaciones (todos iguales)
- $S_1 = S_2 = S_3 = +1$   
 $S_4 = -1$       4 combinaciones (3 positivos, 1 negativo)
- $S_1 = S_2 = S_3 = -1$   
 $S_4 = +1$       4 combinaciones (3 negativos, 1 positivo)

$$\begin{cases} S_1 = S_2 = +1 \\ S_3 = S_4 = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} + & + \\ - & - \end{matrix} \quad \neq \quad \begin{matrix} + & - \\ - & + \end{matrix}$$

4 combinaciones (2 positivo, 2 negativos)

$$\begin{cases} S_1 = S_3 = +1 \\ S_2 = S_4 = -1 \end{cases}$$

$$e^{4K} + e^{-4K} = f(K)e^{4K'}$$

$$e^{2K} + e^{-2K} = f(K)$$

$$2 = f(K)e^{-4K'} \quad \begin{matrix} + \\ - & - \\ + \end{matrix}$$

$$2 = f(K) \quad \begin{matrix} + \\ + & - \\ - \end{matrix}$$

Sistema sobredeterminado 4 ecuaciones, 2 incógnitas.

Una de las formas más sencillas de resolver el problema es el de pensar que el nuevo  $H$  tiene solo interacciones a primeros vecinos como el original sino que ahora aparecen interacciones entre primeros vecinos,  $S_1S_2, S_2S_3, S_3, S_4, S_4S_1$ , de magnitud  $K_1$ , entre segundos vecinos  $S_1S_3, S_2S_4$  de magnitud  $K_2$ , y entre los 4 espines  $S_1S_2S_3S_4$  de magnitud  $K_4$ .

Ahora

$$e^{K(S_1+S_2+S_3+S_4)} + e^{-K(S_1+S_2+S_3+S_4)} = f(K)e^{\left\{\frac{1}{2}K_1(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_4+S_4S_1)+K_2(S_1S_3+S_2S_4)+K_3(S_1S_2S_3S_4)\right\}}$$

Tomando en cuenta las distintas combinaciones de  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , calculadas previamente, ahora obtenemos:

$$1) \quad e^{4K} + e^{-4K} = f(K)e^{2K_1+2K_2+K_3} \quad \begin{matrix} + & & - \\ + & + & - \\ + & & - \end{matrix}$$

$$2) \quad e^{2K} + e^{-2K} = f(K)e^{-K_3} \quad \begin{matrix} + & & - \\ + & + & - \\ - & & + \end{matrix}$$

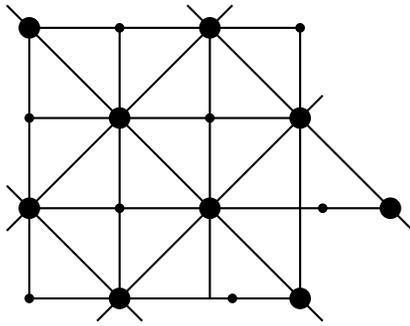
$$3) \quad 2 = f(K)e^{-2K_2+K_3} \quad \begin{matrix} + \\ + & - \\ - \end{matrix}$$

$$4) \quad 2 = f(K)e^{-2K_1+2K_2+K_3} \quad \begin{matrix} - \\ + & + \\ - \end{matrix}$$

Ahora tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas,  $f(K), K_1, K_2, K_3$

Resolviendo (hacer de tarea)

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{1}{4} \ln [\cosh 4K], & K_2 &= \frac{1}{8} \ln [\cosh 4K] \\
 K_3 &= \frac{1}{8} \ln [\cosh 4K] - \frac{1}{2} \ln [\cosh 2K] \\
 f(K) &= 2 [\cosh 2K]^{\frac{1}{2}} [\cosh 4K]^{\frac{1}{8}}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



Note que cada link pertenece a 2 bloques distintos, al sumar sobre los espines se toman dobles todas las interacciones entre primeros vecinos, por eso el  $\frac{1}{2}K_1$

Hemos reescrito la función de partición, tal que

$$Z(K, N) = f(K)^{\frac{N}{2}} \sum_{S_1} \dots \sum_{S_{\frac{N}{2}}} e^{K_1 \sum' S_i S_j + K_2 \sum'' S_i S_k + K_3 \sum''' S_i S_j S_k S_l}$$

Dónde

- $\sum'$  → Suma sobre primeros vecinos.
- $\sum''$  → Suma sobre segundos vecinos.
- $\sum'''$  → Suma sobre el producto de los 4 espines del bloque.

Hemos removido grados de libertad, debido a que el sistema en  $2 - d$  tiene mayor conectividad que el de  $1 - d$ , las interacciones resultantes son más complicadas que las del modelo original

$$Z(K, N) = f^{\frac{N}{2}}(K) Z\left(K_1, K_2, K_3, \frac{N}{2}\right)$$

Aproximaciones

(a) Desprecie  $K_2, K_3$   $\rightarrow K_2, K_3 \approx 0$

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{1}{4} \ln [\cosh 4K] \\
 Z(K, N) &= f^{\frac{N}{2}}(K) Z\left(K, \frac{N}{2}\right) \rightarrow \text{Equivalente al caso en } 1 - D. \text{ No presenta transiciones de fase.}
 \end{aligned}$$

(b) Desprecie  $K_3$ , utilice Teoría de campo medio para introducir  $K_2$

$$\beta' \mathcal{H}' = -K_1 \sum_{\langle nn \rangle} S_i S_j - K_2 \sum_{\langle nnn \rangle} S_i S_k = -K'(K_1 K_2) \sum_{\langle nn \rangle} S_i S_j \tag{1}$$

Dónde

⟨**nn**⟩ nearest neighbors (Vecinos cercanos).

⟨**nnn**⟩ next-nearest neighbors (Segundos vecinos).

Hamiltonianos del tipo dado por (1) sabemos calcular su función de partición

$$Z(K, N) = e^{Ng(K)} = f^{\frac{N}{2}}(K) Z\left(K', \frac{N}{2}\right) = f^{\frac{N}{2}} e^{\frac{N}{2}g(K')}$$

$$\implies Ng(K) = \frac{N}{2} \ln f(K) + \frac{N}{2}g(K')$$

Donde  $f(K) = 2 [\cosh 2K]^{\frac{1}{2}} [\cosh 4K]^{\frac{1}{8}}$  (Ya calculado) De campo medio

Cómo estimamos  $K'$ ?

Si todos los espines estuvieran alineados

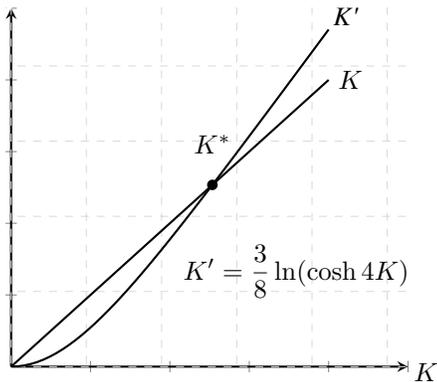
$$K_1 \sum_{\langle nn \rangle} S_i S_j = \frac{NK_1 z}{2} \quad K_2 \sum_{\langle nnn \rangle} S_i S_K = \frac{NK_2 z}{2} \quad \text{Para un red cuadrada } z=4$$

En este caso  $K' = K_1 + K_2 = \frac{1}{4} \ln [\cosh 4K] + \frac{1}{8} \ln [\cosh 4K] = \frac{3}{8} \ln [\cosh 4K]$

$$K' = \frac{3}{8} \ln [\cosh 4K]$$

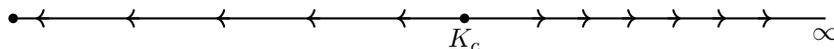
El punto fijo de la transformación,  $K' = K = K^*$  satisface

$$K^* = \frac{3}{8} \ln [\cosh 4K^*] \rightarrow K = 0, K = \infty \text{ y una tercera solución que se halla graficamente } K^* = 0,50698$$



Si  $K < K^*$   
 $K' < K$

Si  $K > K^*$   
 $K' > K$



$K_c$  punto fijo inestable (las iteraciones nos alejan de él),  $K = 0, K = \infty$  puntos fijos estables.

Como  $K' = \frac{3}{8} \ln [\cosh 4K] \implies K = \frac{1}{4} \cosh^{-1} \left[ e^{\frac{8}{3}K'} \right]$

$$g(K) = \frac{1}{2}g(K') + \frac{1}{2} \ln f(K)$$

$$f(K) = 2 [\cosh 2K]^{\frac{1}{2}} [\cosh 4K]^{\frac{1}{8}} = 2 [\cosh 2K]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{K'}{3}}$$

Como  $\cosh^2 2K = \frac{1}{2} (\cosh 4K + 1)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(K) &= 2e^{\frac{K'}{3}} \left[ \frac{1}{2} (1 + e^{\frac{4}{3}K'}) \right]^{\frac{1}{4}} \\ &= 2e^{\frac{K'}{3}} \left[ e^{\frac{4}{3}K'} \left( \frac{e^{-\frac{4}{3}K'} + e^{\frac{4}{3}K'}}{2} \right) \right]^{\frac{1}{4}} \\ &= 2e^{\frac{2}{3}K'} \left[ \cosh \frac{4}{3}K' \right]^{\frac{1}{4}} \\ \Rightarrow g(K) &= \frac{1}{2}g(K') + \frac{1}{2} \ln \left\{ 2e^{\frac{2}{3}K'} \left( \cosh \frac{4}{3}K' \right)^{\frac{1}{4}} \right\}\end{aligned}$$

Cálculo de los exponentes críticos

$$\begin{aligned} \ln Z = Ng(K) = -\beta A \quad ; \quad A = E - TS \\ E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -NJ \frac{\partial g(K)}{\partial K} \quad K = \beta J \\ \beta = \frac{1}{K_\beta T} \\ C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{1}{K_\beta T^2} \frac{\partial E}{\partial \beta} = \frac{NJ^2}{K_\beta T^2} \frac{\partial^2 g(K)}{\partial K} \end{aligned}$$

Expandiendo  $K'$  cerca del punto crítico  $K^*$

$$K' = K^* + (K - K^*) \left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} \implies K' - K^* = (K - K^*) \left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*}$$

Como ya sabemos, cerca del punto crítico  $C_V \sim |K - K^*|^{-\alpha}$

Como  $C_V \sim \frac{\partial^2 g(K)}{\partial K} \sim |K - K^*|^{-\alpha}$  (Cerca de  $T^*$ )

$$\begin{aligned} \implies g_S(K \approx K^*) \sim |K - K^*|^{-\alpha+2} \rightarrow \text{Parte singular de } g \\ \text{cerca } K^* \\ \sim \left[ \frac{K' - K^*}{\left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*}} \right]^{-\alpha+2} \end{aligned}$$

Por otro lado note que  $g(K') = 2g(K) - \ln f(K)$ , si cerca del punto crítico  $g(K)$  es singular, esa singularidad solo puede venir de la singularidad de  $g(K')$  cerca del punto crítico, ya que la función es analítica, no tiene singularidades.

$$\begin{aligned} \implies g_S(K') = 2g_S(K) \implies 2 \frac{|K' - K^*|^{-\alpha+2}}{\left( \left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} \right)^{-\alpha+2}} = |K' - K^*|^{-\alpha+2} \\ \implies \left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} = 2^{\frac{1}{2-\alpha}} \implies \ln \left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} = \frac{1}{2-\alpha} \ln 2 \\ \alpha = 2 - \frac{\ln 2}{\ln \left( \left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} \right)} \end{aligned}$$

Recordemos que en este caso  $K' = \frac{3}{8} \ln [\cosh 4K]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K'}{\partial K} = \frac{3}{2} \tanh 4K \quad \text{y} \quad k^* = \frac{3}{8} \ln [\cosh 4K^*] \\ K^* \approx ,50698 \quad (\text{Solución gráfica}) \\ \implies \alpha = 2 - \frac{\ln 2}{\ln \left[ \frac{3}{2} \tanh 4K^* \right]} \\ \approx ,131 \end{aligned}$$

Resultados exactos para este modelo  $K^* = ,440669$

$$\alpha \text{ divergencia suave } C \sim \ln |T - T_C|$$

**El método funciona bastante bien**

En general se asume un espacio multidimensional para las constantes de acoplamiento



$$\beta\mathcal{H} = -\beta J_1 \sum_{\langle nm \rangle} S_i S_j - \beta J_2 \sum_{\langle nnnn \rangle} S_i S_K - \beta J_3 \sum_{?} S_i S_j S_K S_e$$

$$\beta J_i = K_1$$

$$\bar{K} = (K_1, K_2, K_3, \dots) \rightarrow \text{Vector}$$

Luego de integrar sobre grados de libertad, por ejemplo sobre los espines intermedios, se obtienen nuevas constantes de acoplamiento

$$\bar{K}' = (K'_1, K'_2, K'_3, \dots)$$

Tal que  $\bar{K}' = R\bar{K}$   $R \rightarrow$  grupo de renormalización, el punto fijo satisface  $\bar{K}^* = R\bar{K}^*$

El sistema a medida que aplicamos el grupo de renormalización aumenta su conectividad.

Para el modelo de *Ising* (con  $H = 0$ )  $\beta\mathcal{H} = -J\beta \sum_{\langle nm \rangle} S_i S_j$ ,  $\bar{K} = (K_1, 0, 0, \dots)$  en el ejemplo anterior, luego de reducir los grados de libertad (aplicar el grupo de renormalización), aparecen nuevas conexiones entre los espines

$$\bar{K}' = (K'_1, K'_2, K'_3, \dots)$$

El "grupo" de renormalización no es realmente un grupo porque no tiene inversa