

Puntos fijos y campos de Escalamiento

(Reichl Cap.18)

K^u son las constantes de acoplamiento después de u aplicaciones del grupo de renormalización

$$K^{(u+1)} = R K^{(u)}$$

Pto fijo $K^* = R K^*$

$K^{(u)}$ se aproxima a un pto fijo si $u \rightarrow \infty$. El punto fijo puede tener relevancia física ya que podría ser un punto en el cual el sistema se convierte en invariante de escala \Rightarrow La longitud de correlación es 0 o ∞ . Si es ∞ este punto fijo corresponde a un punto CRÍTICO. En cambio la correlación 0 corresponde a Temperatura infinita \rightarrow Total disorder

Cerca del punto fijo

$$R(K^u) \approx R(K^*) + M(K^u - K^*)$$

$$M_{ij} = \left. \frac{\partial R_i}{\partial K_j} \right|_{K=K^*}$$

$$R(K^*) = K^*$$

$$\Rightarrow K^{u+1} = R(K^u) \approx R(K^*) + M(K^u - K^*)$$

$$\Rightarrow K^{u+1} - K^* = M(K^u - K^*)$$

Recordemos

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots \\ & & M_{ij} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$$

Definimos los autovectores y autovalores de M

$$\varphi^\alpha M = \lambda^\alpha \varphi^\alpha$$

$$\varphi^\alpha = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$$

$$\sum_i \varphi_i^\alpha M_{ij} = \lambda^\alpha \varphi_j$$

$\alpha = 1, 2, \dots$ es el número de autovalores de M , depende de la dimensión de K .

Vamos a definir la proyección de vector $\delta K = K^u - K^*$, sobre los autovectores de M

$$v^\alpha = \sum_i \varphi_i^\alpha (K^u - K^*)_i \rightarrow \text{Campos de escalares}$$

Hay un v para cada valor de α . v^α es un escalar

La importancia de estos campos escalares es que no se mezclan entre ellos bajo las transformaciones del grupo de renormalización. Es decir $v^{(u+1)\alpha}$ solo depende de $v^{(u)\alpha}$

Problemas esto

$$v^{(u+1)\alpha} = \sum_i \varphi_i^\alpha (K^{u+1} - K^*)_i ; (K^{u+1} - K^*)_i = \sum_K M_{iK} (K^u - K^*)_K$$

$$\Rightarrow v^{(u+1)\alpha} = \sum_i \sum_K \varphi_i^\alpha M_{iK} (K^u - K^*)_K$$

$$\lambda^\alpha \varphi_K^{(\alpha)}$$

$$v^{(u+1)\alpha} = \lambda^\alpha \sum_K \varphi_K^{(\alpha)} (K^u - K^*)_K = \lambda^\alpha v^{u(\alpha)} \quad \forall \alpha$$

(No hay sum end)

$$v^{-(n+1)d} = \lambda^{(d)} v^{(n)d} \quad (\text{OJO } d \text{ no es un exponente, es la etiqueta de el autovalor})$$

$d = 1, 2, \dots$

⇒ Bajo las transformaciones del grupo los $v^{(d)}$ simplemente escalan con $\lambda^{(d)}$

Si $\lambda^{(d)} > 1$ (< 1) aumentan (disminuyen)

Cerca del pto crítico es más conveniente utilizar los campos escalares $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots$, como variables en lugar de los campos vectoriales K (K_1, K_2, \dots), ambos tienen la misma información pero los v se comportan de forma más sencilla.

[Como cada aplicación del grupo de renormalización aumenta la unidad de distancia por un factor b , podemos escribir $\lambda^{(d)} = b^{y(d)}$ $\forall d$ hay un $y^{(d)}$]

Como en el pto fijo $K^* = R K^* \Rightarrow K^{(n)} - K^* = 0$

⇒ $v^{(d)} = 0 \quad \forall d$ en los pto fijos

Recordemos que cerca del pto crítico la energía libre se puede escribir como una componente regular y otra singular (que es la que escala)

$$g(k_1, k_2, \dots) = g_R(k_1, k_2, \dots) + g_S(k'_1, k'_2, \dots) b^{-d}$$

k' son los constantes rescaladas

Podemos escribir la energía libre en termino de los campos rescalados, que sabemos que escalan $v^{(\lambda)} = \lambda v^{(\lambda)}$

\Rightarrow el termino singular

$$g_S(v_1, v_2, \dots) =$$

$$= g(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots) b^{-d}$$

Comportamiento de la parte singular de la energía libre (cerca del pto crítico). Esta condición se llama

Homogeneidad

Recordemos que hay d valores de λ

Si $\lambda < 1$, el campo asociado se llama irrelevante, por que se aproxima a cero en cada paso del grupo de renormalización $(v^{(n+1)/d} = \lambda^{(n)} v^{(n)/d})$

En la vecindad del pto crítico este campo es irrelevante, es como si no existiera.

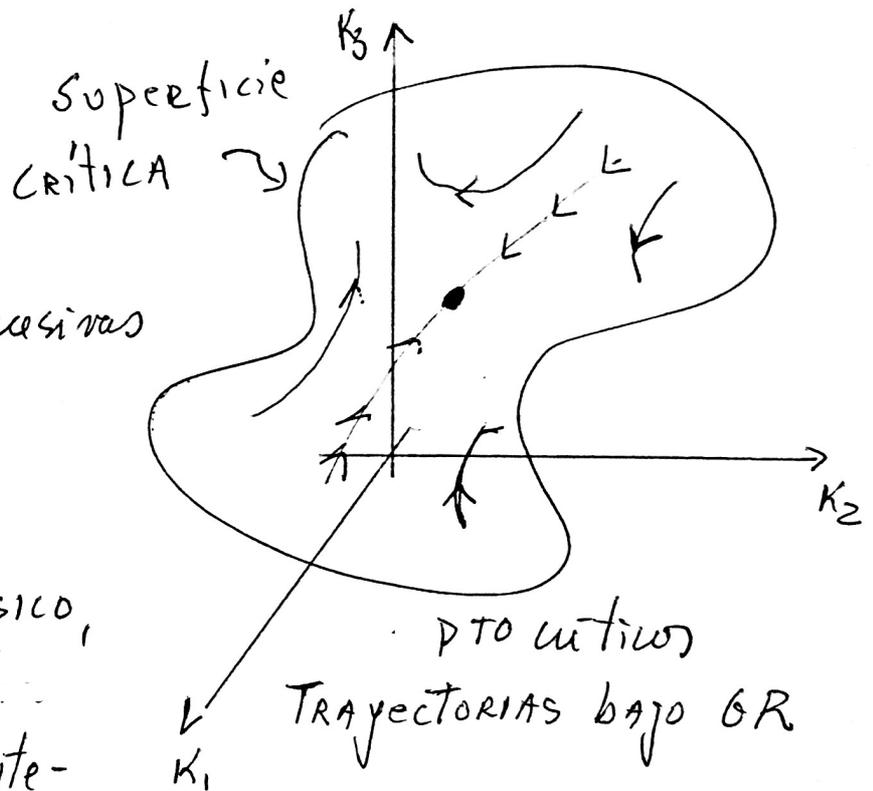
Si $\lambda > 1$, campo asociado es relevante, aumenta en cada transformación, sólo en el pto crítico es cero.

Si $\lambda = 1 \rightarrow$ Caso marginal, depende de detalles del sistema. Hay que tomar terminos de mayor

En el espacio de los vectores de acoplamiento, K , el pto fijo está sobre una hipersuperficie llamada "superficie crítica", que se caracteriza por que allí todos los campos relevantes, $v^{(d)}(\lambda \neq 1)$ son cero.

Un pto sobre la superficie crítica, se aproximará al pto crítico bajo transformaciones sucesivas

Como cada uno de los pto del espacio de fases representa un sistema físico, la superficie crítica contiene sistemas que pertenecen a la misma clase de universalidad y que tienen las mismas propiedades críticas.



Ej: cálculo de exponentes críticos. Como los pto críticos corresponden a los valores críticos $v_c^{(d)} = 0$, se pueden identificar con los parámetros usuales, $t = \frac{T - T_c}{T_c}$, h (campo externo), etc

$$g_s(v_1, v_2, \dots) = b^{-d} g_s(d_1 v_1, d_2 v_2, \dots)$$

Comportamiento de la parte singular de la energía libre cerca del pto crítico \rightarrow Escala

Donde podemos escribir $\lambda^{(d)} = b^{y(d)}$

$$g_s(t, h, \dots) = b^{-d} g_s(b^{y_1} t, b^{y_2} h, \dots)$$

Como b es arbitrario podemos escoger, por ejm $b^{y_1} = t^{-1}$

$$\Rightarrow g_s(t, h, \dots) = t^{\frac{d}{y_1}} g_s(1, h t^{-\frac{y_2}{y_1}}, \dots)$$

Por ejemplo, si $h=0$, el exponente del calor específico está asociado a la segunda derivada de la energía libre respecto a T

$$C_v \propto \frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \sim t^{\frac{d}{y_1} - 2}$$

$$\text{Como } C_v \propto t^{-d} \Rightarrow d = 2 - \frac{d}{y_1}$$

Ej: Comportamiento de la longitud de correlación ξ
 Identificamos, $v_1 = t$, $v_2 = h$ $d_1 = b^{y_1}$

$$y_i = \frac{\ln \lambda_i}{\ln b}$$

$$d_2 = b^{y_2}$$

Bajo el GR la ξ disminuye en cada paso un factor b
 $\Rightarrow \xi' = \frac{\xi}{b}$, $v_2' = \lambda^{(2)} v_2$ (un paso del GR)

$$\Rightarrow t' = \lambda^{(1)} t = b^{y_1} t, \quad h' = \lambda^{(2)} h = b^{y_2} h$$

$$\Rightarrow \frac{t'}{h} = b^{y_1} = \left(\frac{\xi}{\xi'}\right)^{y_1} \Rightarrow \xi'^{y_1} t' = \xi^{y_1} t$$

$\Rightarrow \xi^{y_1} t$ es un valor invariante bajo el GR, C const

$$\xi^{y_1} t = C \Rightarrow \xi \sim t^{-\nu}, \quad \text{como } \xi \sim t^{-\nu} \text{ cerca del PI}^c \text{ crítico}$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{y_1} = \frac{\ln b}{\ln \lambda^{(1)}} \quad (\nu \text{ Exponente crítico de } \xi)$$

Bajo sucesivas Transformaciones se llega a un pto en que ξ es igual al Tamaño del bloque (lo que indica que en este pto los bloques no están correlacionados) esto ocurre a un t^* particular que debe ser independiente de la t inicial

Si se comienza en t , después de n Transformaciones

$$t^* = \lambda^n t \quad \lambda = b^{y_1} \quad \Rightarrow t^* = b^{ny_1} t$$

Se ha demostrado que los exponentes críticos se obtienen de los $\lambda^{(i)}$, que son los autovalores de la matriz M que define el grupo de renormalización cerca del pto crítico

$$\Rightarrow \text{Recordemos } K^{n+1} - K^* = M(K^n - K^*)$$

$$\text{y que } \varphi^{(i)} M = \lambda^{(i)} \varphi^{(i)}$$

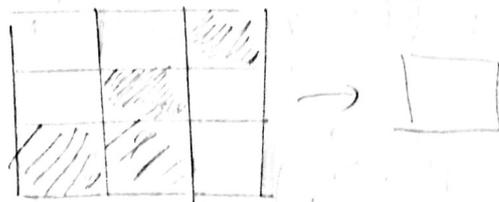
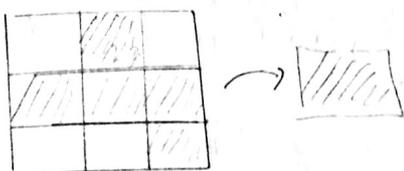
Grupo de Renormalización - Percolación

Todas las escalas de longitud son importantes en el pto crítico. Para percolación esto indica que clusters de todos los tamaños existen en una red infinita en $p = p_c$. Si todas las longitudes de escala existen ($p = p_c$) el sistema luce igual a todas las escalas.

Idea del grupo de renormalización: se promedia sobre las longitudes pequeñas, el cambio del sistema nos da información sobre como cambian los exponentes críticos. El promedio (a p_c) debe mantener la física relevante. Para la percolación la física relevante es la conectividad de la red.

Red cuadrada:

La red se divide en celdas de $b \times b$, cada una con b^2 sitios.
Regla: la celda se sustituye por un sitio ocupado si la celda original tenía la mayoría de sus sitios conectados sino por una celda vacía.



$$\Rightarrow C \lambda^{-D} = \frac{1}{b}$$

(De *)

$$\Rightarrow D = \frac{\ln b}{\ln \lambda}$$

Si $b=2$, cada bloque tiene 4 sitios (red cuadrada)

p_c se obtiene de resolver $p' = p = p_c$

Calculamos $\lambda = \frac{\partial R}{\partial p} \Big|_{p_c}$

$$R(p) = p^4 + 4p^3(1-p) = p'$$

(Nueva constante)

$$\frac{\partial R}{\partial p} \Big|_{p_c} = 4p_c^3 + 12p_c^2 - 16p_c^3 = 12p_c^2(1-p_c) \approx 1,6432$$

$p_c = 0,7676$

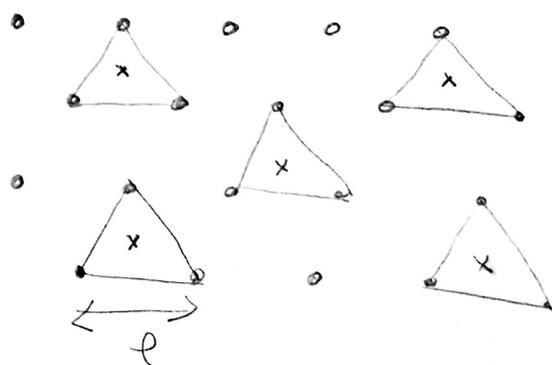
$$\Rightarrow D = \frac{\ln 2}{\ln \lambda} = 1,40 \quad (\text{Valor exacto } \frac{4}{3})$$

Asumir que la ocupación de cada sitio de la red original es independiente de sus vecinos es correcta, pero no lo es para la red normalizada. La red normalizada tiene nuevas conexiones

Ej. Percolación en una red Triangular en 2-d
Se divide la red en bloques de 3 sitios

TAREA

a) Si la distancia entre los pto de (•) la red original es l (Triang equilat), cuanto vale la distancia entre los puntos de la nueva red x , l'



Asume que el bloque está ocupado si la mayoría de sus sitios está ocupado. Calcule $p' = R(p)$, de aquí alé los pto fijos e identifique el pto crítico. Sigue los pasos del ejemplo anterior y calcule el exponente crítico.