

# Mecánica Estadística Avanzada (2023):

Modelos discretos en Sistemas Complejos

## Clase 2: Redes coevolutivas y formación de comunidades

Mario Cosenza



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

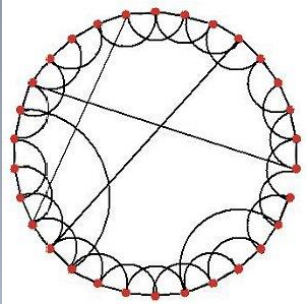




# Redes complejas

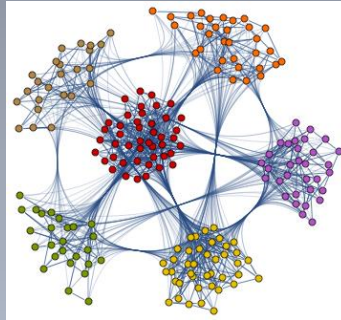
**Redes Complejas:** estructuras características en sistemas complejos de diversos contextos.

## Pequeño mundo



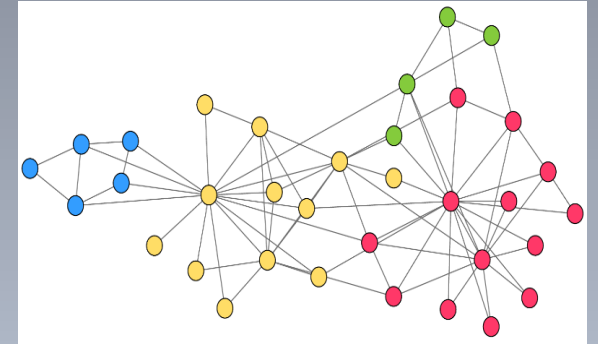
Distancia media entre nodos  $\ll N$   
clustering alto, entre ordenada y aleatoria  
*Mecanismo:* recableado conexiones largo alcance

## Libre de escala



Distribución de links:  $P(k) \sim k^{-\alpha}$   
Pocos nodos con muchos links, muchos nodos con pocos links  
*Mecanismo:* conexión preferencial con nodos mas conectados

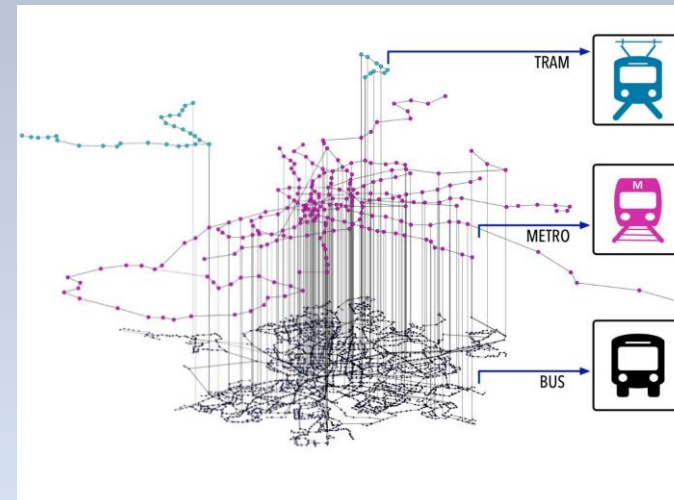
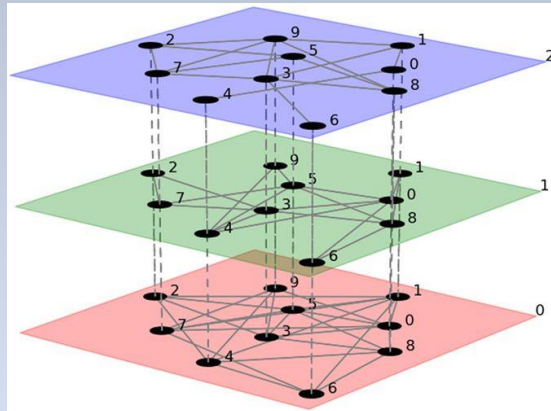
## Comunidades



Subgrupos con muchos links internos,  
pocos links entre distintos subgrupos

## Multicapas

Diferentes redes coexistentes

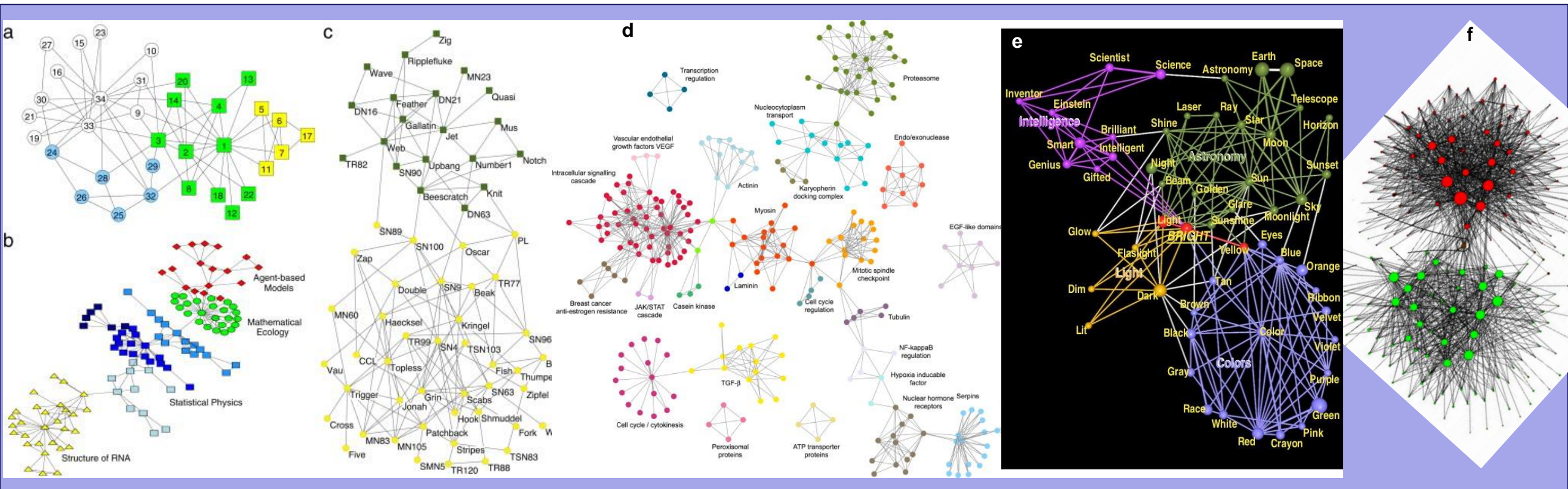




# Redes de comunidades

**Comunidades** (módulos): subconjuntos de nodos altamente conectados, con pocas conexiones entre subconjuntos distintos. Existen varios métodos para caracterizar estructura modular en redes.

- Ejemplos:**
- a) Amigos in un club de karate.
  - b) Colaboraciones en el Instituto Santa Fe.
  - c) Manada de delfines.
  - d) Interacciones proteína-proteína.
  - e) Palabras relacionadas con “bright”.
  - f) Red llamadas celulares en Bélgica.



S. Fortunato, Phys. Reports, **486**, 75 (2010)

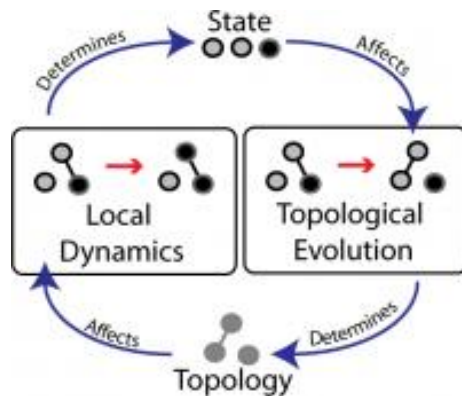
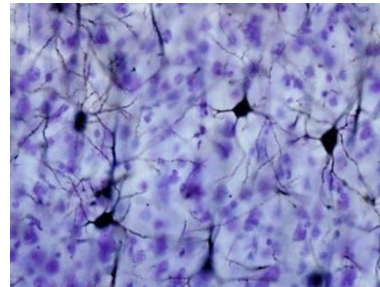
¿Cómo surge una estructura de comunidades?



# Redes dinámicas coevolutivas

Muchos sistemas complejos se pueden describir como redes dinámicas de elementos interactivos, donde, tanto los estados de los elementos como las conexiones entre ellos, cambian en el tiempo.

**Ejemplos:** redes de comunicación y transporte, neuronas, redes biológicas, sociales, económicas.



**Coevolución:** El estado de un elemento cambia por influencia de sus conexiones (entorno). Las conexiones de un elemento cambian como consecuencia de su estado.

**Redes dinámicas coevolutivas** (adaptativas): acoplamiento **topología** ↔ **dinámica local**.

$$x_i(t + 1) = F(x_{j \in v_i}(t), M_{ij}(t))$$

$$M_{ij}(t + 1) = G(x_{j \in v_i}(t), M_{ij}(t))$$

La dinámica local y la dinámica de la topología de la red poseen, en general, distintas escalas temporales. Competencia entre estos dos procesos determina el comportamiento y las estructuras emergentes en el sistema.

**Dinámica coevolutiva o adaptativa se ha propuesto como mecanismo para la formación de comunidades en redes.**

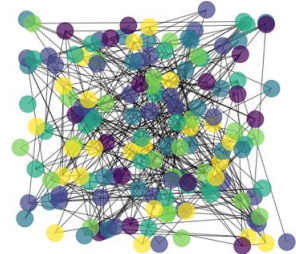


# Un modelo de red coevolutiva de opiniones y topología

P. Holme, M.E.J. Newman, Phys. Rev. E **74**, 056108 (2006): **Transición de fragmentación.**

Red con  $N$  nodos,  $G$  estados de opinión (colores) equivalentes:  $x_i(t) \in \{1, 2, \dots, G\}$

Red inicial aleatoria, distribución aleatoria de estados



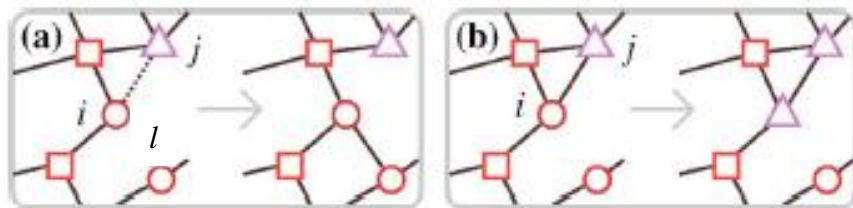
$N = 3200$   
 $G = 320$   
 $\bar{k} = 4$

**Dominio:** subgrafo de nodos conectados que comparten el mismo estado.

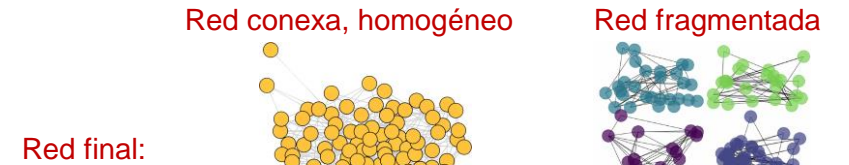
1. Seleccionar al azar  $i$ , tal que  $k_i > 0$ .
2. Con probabilidad  $P_r$ , cortar al azar link  $(i, j) | j \in v_i$  y conectar  $(i, l) | l \notin v_i$  tal que  $x_l = x_i$ .
3. Con probabilidad  $1 - P_r$ , seleccionar al azar  $j \in v_i$  y hacer  $x_i = x_j$ .

Paso 2: recableado

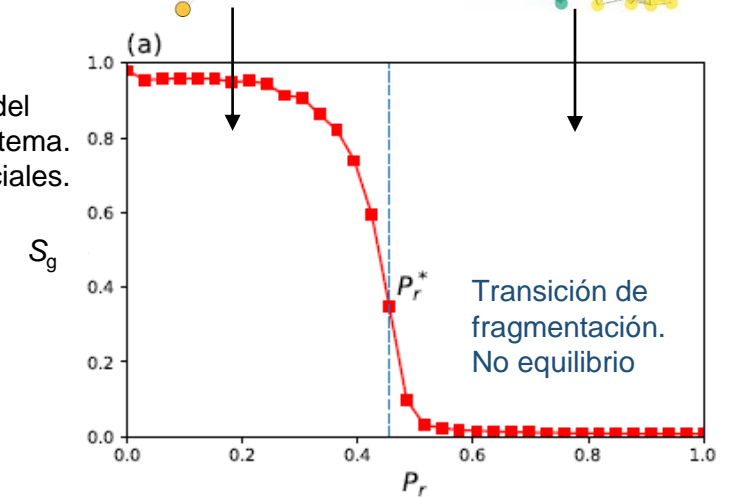
Paso 3: dinámica de nodos



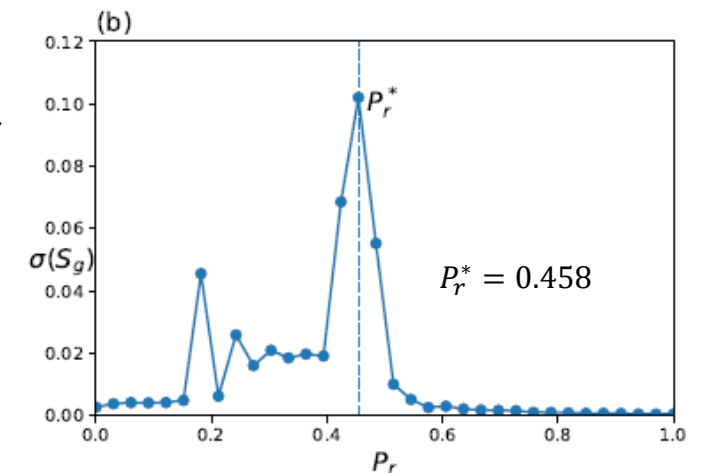
**Dinámica de nodos:** Ej. imitación del vecino (modelo del votante). Dinámica absorbente, sistema disipativo: menos estados finales que iniciales.



$S_g$  = promedio del tamaño normalizado (dividido por  $N$ ) del dominio más grande en el sistema. 50 realizaciones de redes iniciales.



$\sigma(S_g)$  = dispersión alrededor del valor promedio  $S_g$





# Un modelo general para redes coevolutivas

General coevolution of topology and dynamics in networks. J.L. Herrera, M.G. Cosenza, K. Tucci, J.C. González-Avella, *EPL* **95**, 58006 (2011).

Coevolución consiste en la coexistencia de dos procesos en la red:

- **Recableado (rewiring)**: un nodo cambia sus conexiones con probabilidad (escala temporal)  $P_r$
- **Dinámica de nodos**: un nodo cambia su variable de estado con probabilidad (escala temporal)  $P_c$

Premisas:

1. Un modelo coevolutivo específico está dado por un acoplamiento o *relación funcional*  $P_c = f(P_r)$ .
2. El proceso de recableado consiste en dos acciones básicas:  
**desconexión** (“repulsión”) y **conexión** (“attraction”) entre nodos.  
Recableado es adaptativo: acciones ocurren con un criterio de comparación de estados de los nodos.

**Desconexión:**  $d \in [0,1]$   $\equiv$  probabilidad que dos nodos en estados *idénticos* se **desconecten**.  
 $\rightarrow 1-d$ : probabilidad que dos nodos en estados *diferentes* se desconecten.

**Conexión:**  $r \in [0,1]$   $\equiv$  probabilidad que dos nodos en estados *idénticos* se **conecten**.  
 $\rightarrow 1-r$ : probabilidad que dos nodos en estados *diferentes* se conecten.



# Proceso de recableado adaptativo

Un proceso de recableado adaptativo específico se puede caracterizar por dos valores  $r$  y  $d$  que corresponden a punto en el plano  $(d,r)$ .

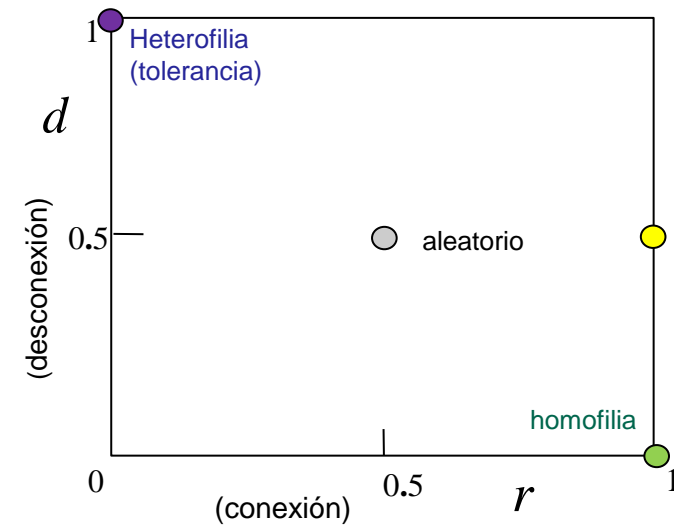
Recableado adaptativo depende de los estados de los nodos:

$r$ : probabilidad de conexión con iguales.  
 $(1 - r)$ : " " " distintos.

$d$ : probabilidad de desconexión con iguales.  
 $(1 - d)$ : " " " distintos.

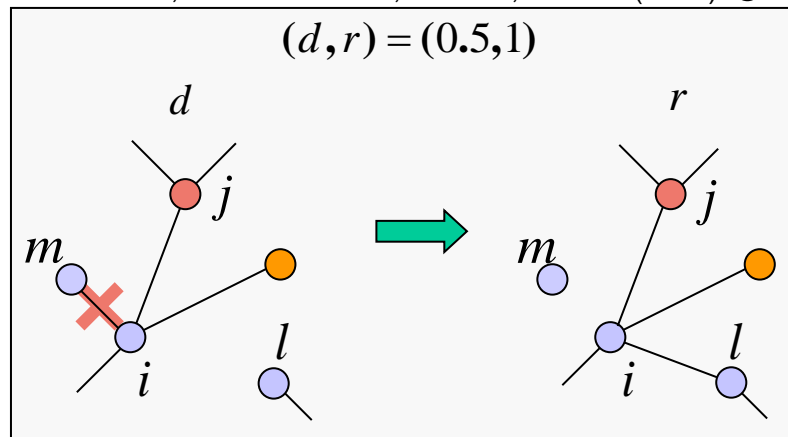
Maxima homofilia:  $r \rightarrow 1, d \rightarrow 0$

Máxima heterofilia:  $r \rightarrow 0, d \rightarrow 1$



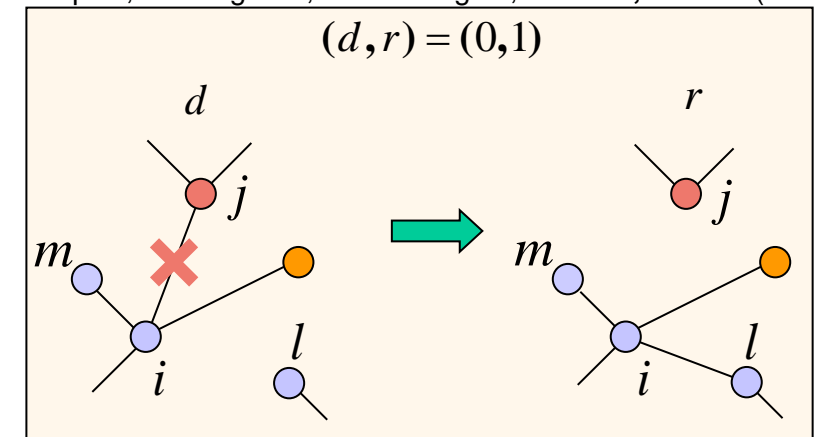
## Ejemplos: casos particulares con estados discretos (color):

P. Holme, M.E.J. Newman, PRE **74**, 056108 (2006) ●



$i$  se desconecta de vecino  $m$  escogido al azar, y luego se conecta a  $l$  que comparte el mismo estado de  $i$ .

F. Vazquez, V.M. Eguiluz, M. San Miguel, PRL **100**, 108702 (2008) ●

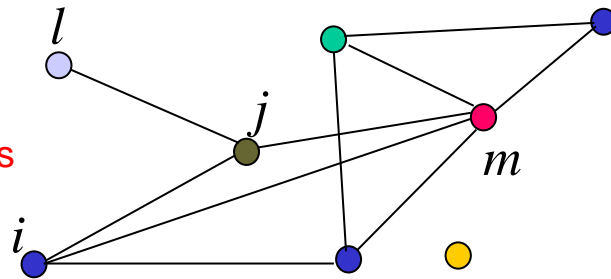


$i$  se desconecta de vecino  $j$  en estado diferente, y luego se conecta a  $l$  que comparte el mismo estado de  $i$ .



# Dinámica general coevolutiva

Red inicial aleatoria,  
distribución aleatoria de estados



$i = 1, 2, \dots, N$  (tamaño del sistema)

$v_i$  = conjunto de vecinos de nodo  $i$  (depende de  $t$ )

$k_i$  = # vecinos (grado) de  $i$

$\bar{k}$  = grado promedio de la red

$g_i$  = variable de estado (color) de  $i$  (depende de  $t$ )

• Sistema dinámico coevolutivo puede ser representado por parámetros:  $d, r, P_r, P_c$ .

• Proceso de cambio de estado de nodos ocurre con probabilidad  $P_c$ .

**Ejemplo:** modelo del votante (regla simple de imitación de vecinos) con  $G$  estados equivalentes:  $g_i \in \{1, 2, \dots, G\}$ .

Dados un proceso de recableado  $(d, r)$  con probabilidad  $P_r$  y un proceso de dinámica de nodos con probabilidad  $P_c$ ,

la dinámica coevolutiva se define por el siguiente algoritmo iterativo: (cada paso de tiempo =  $N$  actualizaciones de nodos escogidos al azar)

1. Seleccionar  $i$  tal que  $k_i > 0$ .

2. Con probabilidad  $P_r$ , aplicar el proceso de recableado  $dr$ :

cortar vínculo  $(i, j)$ ,  $j \in v_i$  mediante la acción  $d$ , y crear vínculo  $(i, l)$ ,  $l \notin v_i$  con la acción  $r$ .

3. Escoger aleatoriamente  $m \in v_i$  tal que  $g_m \neq g_i$ . Con probabilidad  $P_c$ , aplicar dinámica de nodos (Ej. imitación  $g_i = g_m$ ).

**Holme-Newman:**  
 $P_c = f(P_r) = 1 - P_r$

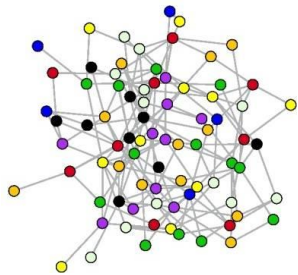




# Comportamiento colectivo: transición de fragmentación

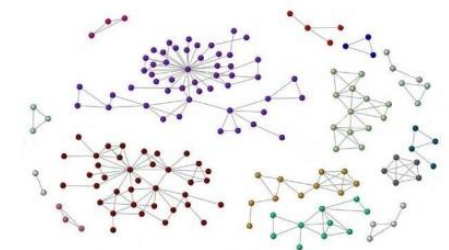
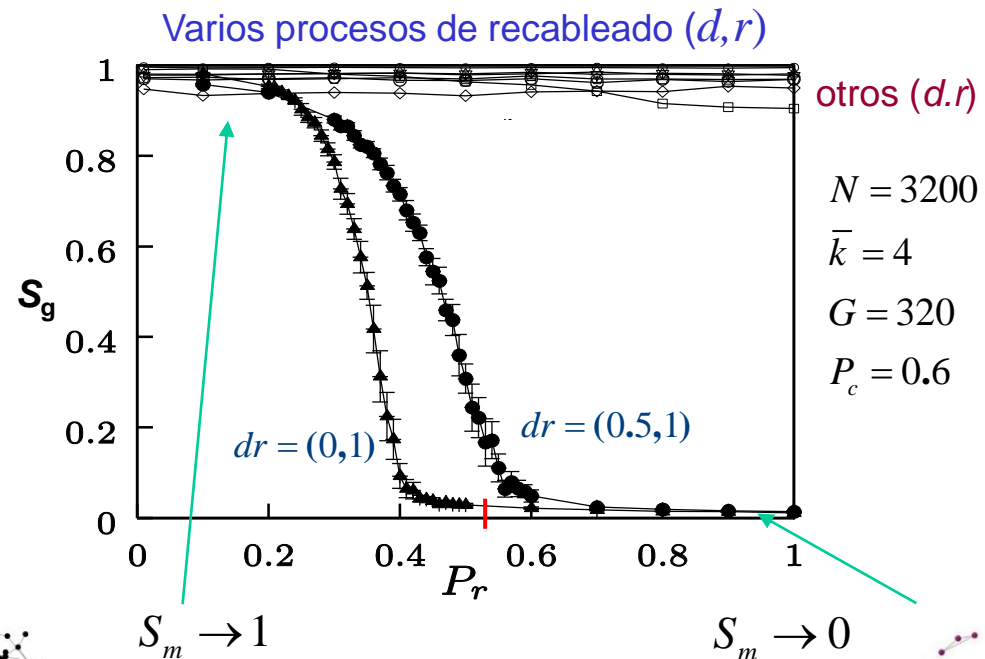
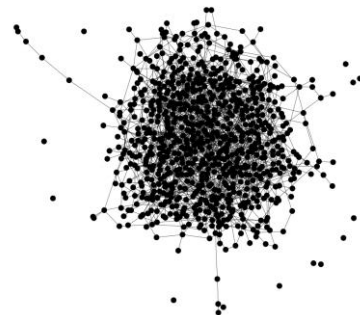
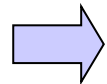
- Competencia entre dinámica de nodos (modelo del votante aumenta # nodos conectados en mismo estado) y recableado (puede favorecer separación) puede conducir a fragmentación de la red: *formación de dominios*.
- **Dominio:** subgrafo (conjunto de nodos conectados) de la red donde todos los nodos comparten el mismo estado.
- **Parámetro estadístico de orden:**  $S_g$  promedio normalizado (divido por  $N$ ) del tamaño del domino más grande en estado asintótico del sistema.

red inicial aleatoria:



red asintótica:

Transición de fase (orden-desorden)  
un domino grande  $\rightarrow$  dominios pequeños





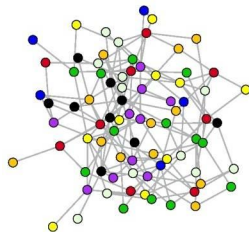
# Recableado adaptativo y formación de comunidades en redes

*Emergence and persistence of communities in coevolutionary networks.* J.C. González-Avella, M.G. Cosenza, J.L. Herrera, K. Tucci, *EPL* **107**, 28002 (2014).

Considerar caso:  $P_c \rightarrow 0, P_r \rightarrow 1$

No hay dinámica de nodos; estados de los nodos (colores) son fijos, *solamente existe proceso de recableado adaptativo que depende de acciones (d,r).*

red inicial aleatoria:  
(no comunidades)



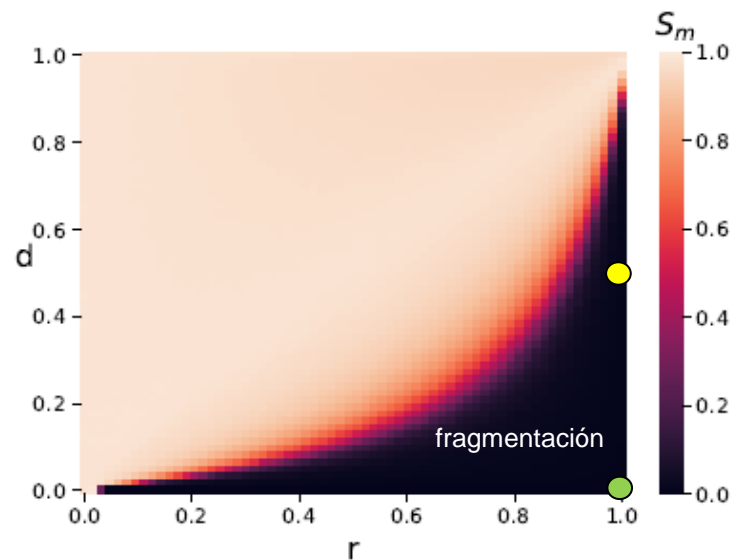
$N = 3200$   
 $G = 320$   
 $\bar{k} = 4$

$Q$  : modularidad, caracteriza presencia de módulos en la red.

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \left( M_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m} \right) \delta(c_i c_j) \quad m = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij}$$

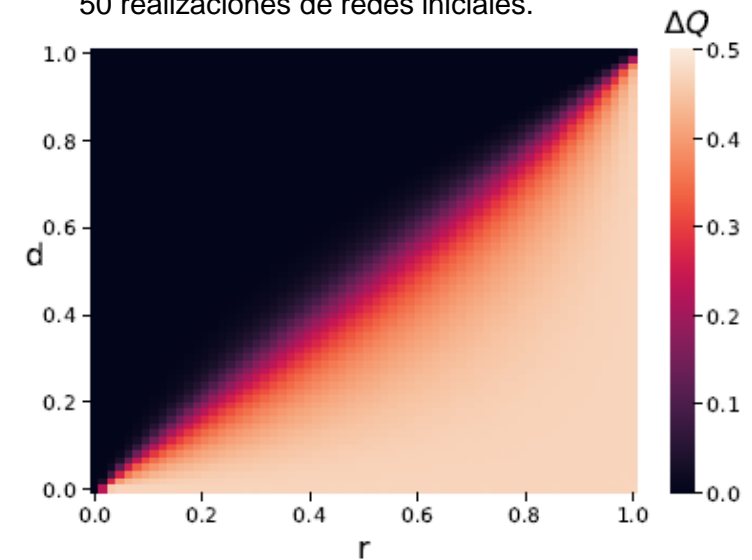
Algoritmo de optimización de Louvain: Blondell *et al.*, J. Stat. Mech P10008 (2008).

$S_m$  = promedio del tamaño normalizado del subgrafo más grande en el sistema (independientemente de estados). Puede incluir varios dominios.  
50 realizaciones de redes iniciales.



$$\Delta Q = Q(t \rightarrow \infty) - Q(0)$$

Calculamos cambio de modularidad promedio.  
50 realizaciones de redes iniciales.

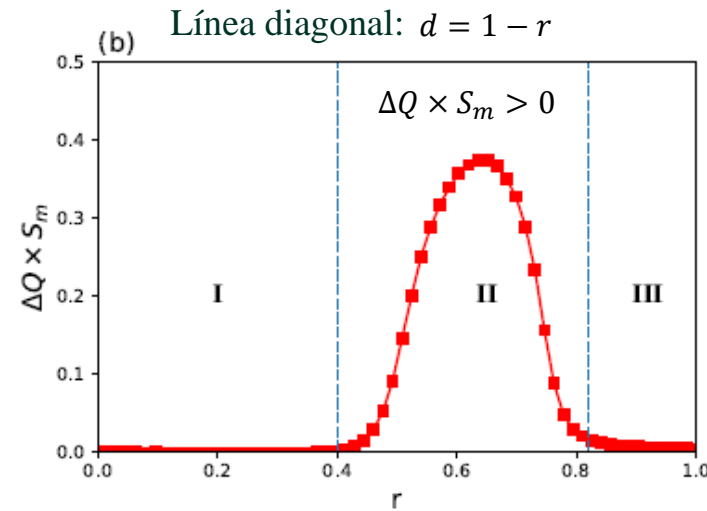
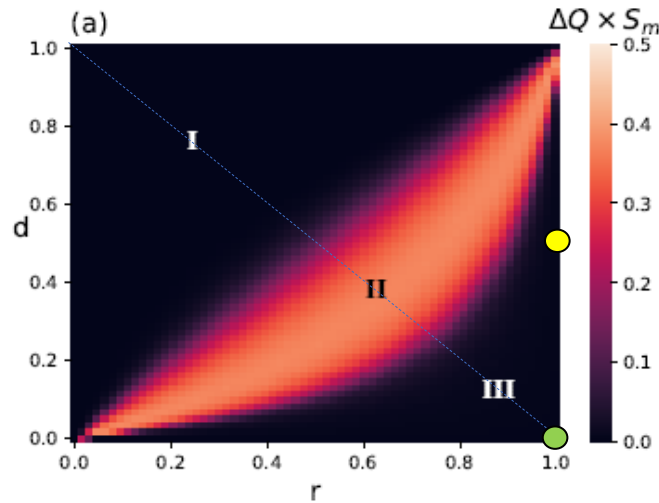




# Emergencia de comunidades

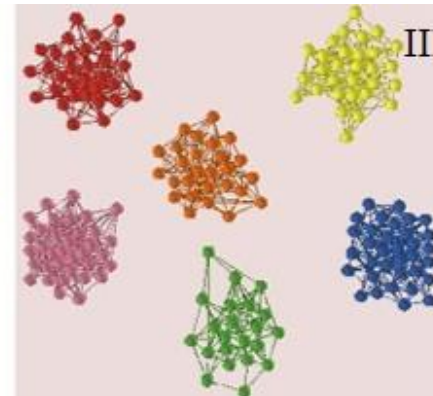
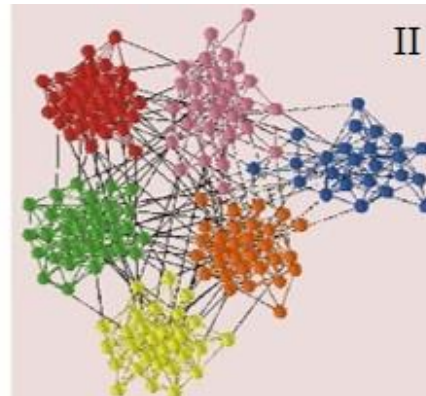
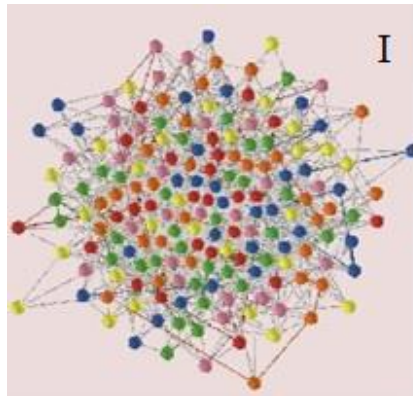
$\Delta Q \times S_m$  : cantidad estadística que caracteriza presencia de comunidades o módulos en la red.

$P_c = 0$ : sin dinámica en nodos.



- Proceso de recableado adaptativo es suficiente para inducir formación de comunidades y fragmentación de la red.

- Dinámica de nodos ( $P_c \neq 0$ ) modula estos fenómenos.



- Estructura de comunidades surge entre desorden y fragmentación.

- Existencia de comunidades requiere cierto grado de heterofilia (tolerancia con diferentes).

Fases o estados colectivos:

I: red aleatoria conexas  
 $\Delta Q = 0, S_m = 1$

II: comunidades, conexas  
 $\Delta Q > 0, S_m = 1$

III: fragmentada  
 $\Delta Q > 0, S_m \rightarrow 0$



<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongaphysics



Latin American alliance for  
Capacity buildiNG in Advanced physics

**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.