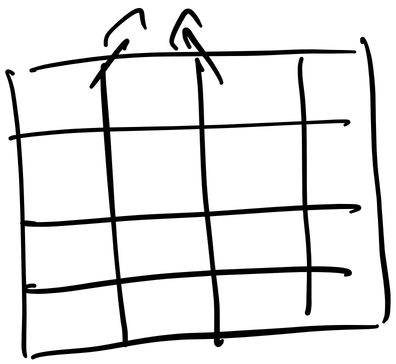
Modelo xy 2-D



$$Z = \int_0^{2\pi} \prod_i d\theta_i \; e^{\frac{J}{k_B T} \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j)}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{J}{k_B T}$$

→ después de una transf. de dualidad y el límite al continuo

$$Z \sim \int D\varphi \; e^{-\frac{1}{2\tilde{\beta}} \int d\vec{r} \left[(\vec{\nabla}\varphi)^2 + g \cos(2\pi\varphi) \right]}$$

$$\frac{dg}{dl} = (2 - \pi\tilde{\beta})\, g$$

$\Rightarrow$ si $T < T_{BKT} = \dfrac{\pi J}{2 k_B}$ $\Leftarrow$

$g \to 0$, $\Rightarrow$ teoría sin vórtices.

$\Rightarrow$ las correlaciones decaen algebraicamente $\Rightarrow$ QLRO

$\Rightarrow$ si $T > T_{BKT}$

$\Rightarrow g \to \infty$ $\Rightarrow$ los vórtices proliferan a grandes escalas.

$\Rightarrow$ las correlaciones decaen como

$e^{-\frac{|\vec{r}|}{\xi}}$ $\xi \sim$ espacio medio entre vórtices.

→ realització experimental

Con He^4 superfluido.

Capa fina de He^4

a $T \lesssim 2\,K$

$$H = \int d\vec{r}\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left(\frac{-\hbar^2 \Delta}{2m} \right) \hat{\psi}(\vec{r})$$

$$+ \frac{1}{2} \int d\vec{r}\, d\vec{r}'\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')\, V(|\vec{r}-\vec{r}'|)\, \hat{\psi}(\vec{r}')\, \hat{\psi}(\vec{r})$$

→ simetria $U(1)$ $\quad \hat{\psi}(\vec{r}) \to e^{i\theta}\hat{\psi}$

$\qquad \hat{\psi}^\dagger \to e^{-i\theta}\hat{\psi}^\dagger$

Condensació de B.E.

$$\langle \hat{\psi}(\vec{r}) \rangle_{GS} \neq 0$$

$$\langle \psi(\bar{r}) \rangle_{GS} = \underline{\psi(\bar{r})}$$

$$Z = \int \mathcal{D}\psi \, e^{-S_{GL}}$$

$$S_{GL} = \int d\vec{r} \left[\frac{k}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{a_2}{2} |\psi|^2 + \frac{a_4}{4} |\psi|^4 \right]$$

$a_2 < 0$

$$\psi(\bar{r}) = \psi_0 e^{i\theta(\bar{r})}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{GL} = \text{cte} + \frac{1}{2} k_0 \int d\vec{r} \, |\nabla \theta(\bar{r})|^2}$$

$$k_0 = k |\psi_0|^2$$

$$\langle e^{-i\theta(0)} e^{i\theta(\bar{r})} \rangle \underset{2}{\overset{2-D}{\sim}} \frac{1}{|\vec{r}|^{\frac{1}{2\pi k_0 (T)}}}$$

$$\langle \psi^* \psi \rangle^2$$

$\vec{V}_s$ velocidad superfluida

$$\vec{V}_s = \left[\frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^* \vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{m} |\Psi_0|^2 \vec{\nabla}\theta$$

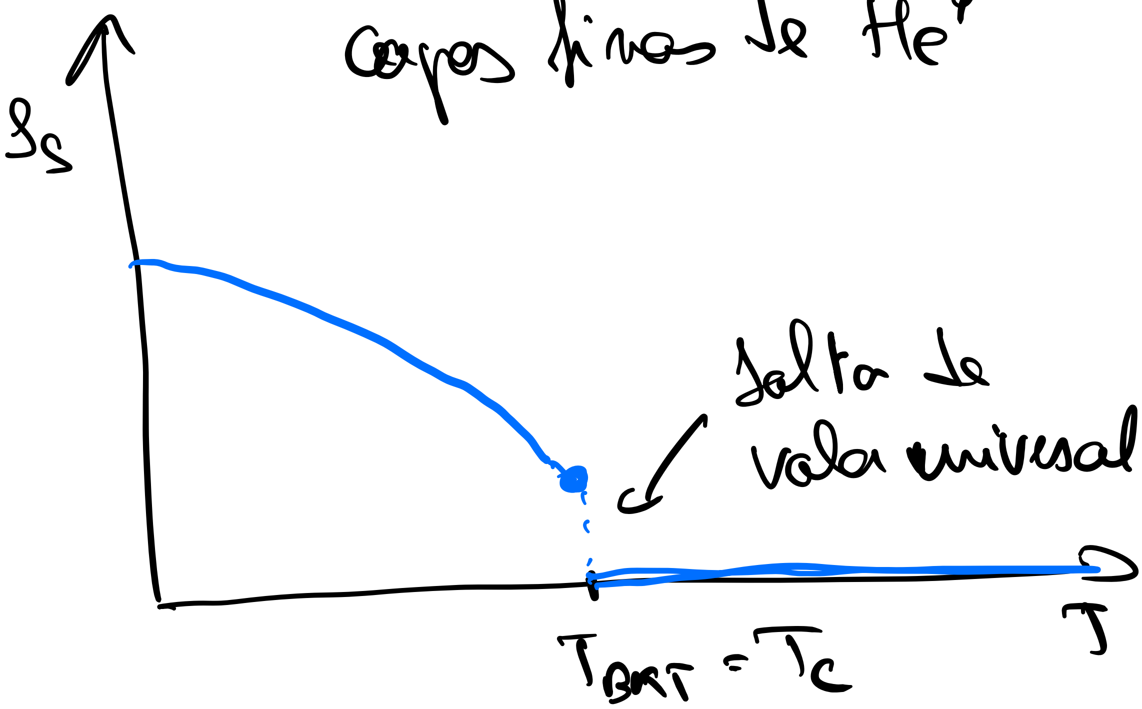
$$E_s = \frac{1}{2} \rho_s^0 \int d^3\vec{r}\ \vec{V}_s^2(\vec{r})$$

densidad superfluida.

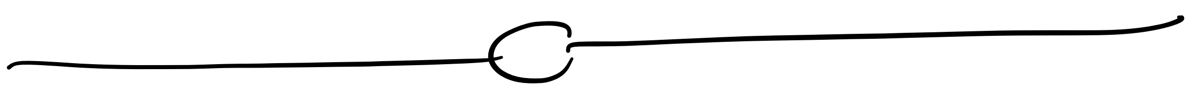
$$\rightarrow \rho_s^0 = \frac{k_B T_c\, m^2}{\hbar^2} K_0$$

la que se puede medir exp.

Capas finas de He^4



$$\frac{\rho_{s_{T_c}}}{k_B T_c} = \frac{2 m^2}{\pi \hbar^2}$$



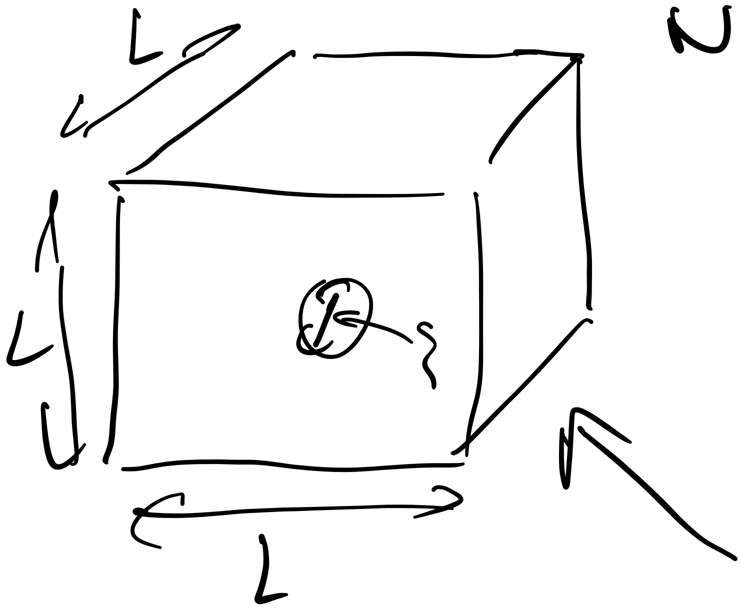
VI Temas diversos

1) Escaleo en tamaño finito

$$t = \frac{(T - T_c)}{T_c}$$

$$\xi \sim t^{-\nu} \quad , \quad \frac{\chi}{N} \sim t^{-\gamma}$$

$$\frac{C}{N} \sim t^{-\alpha}$$

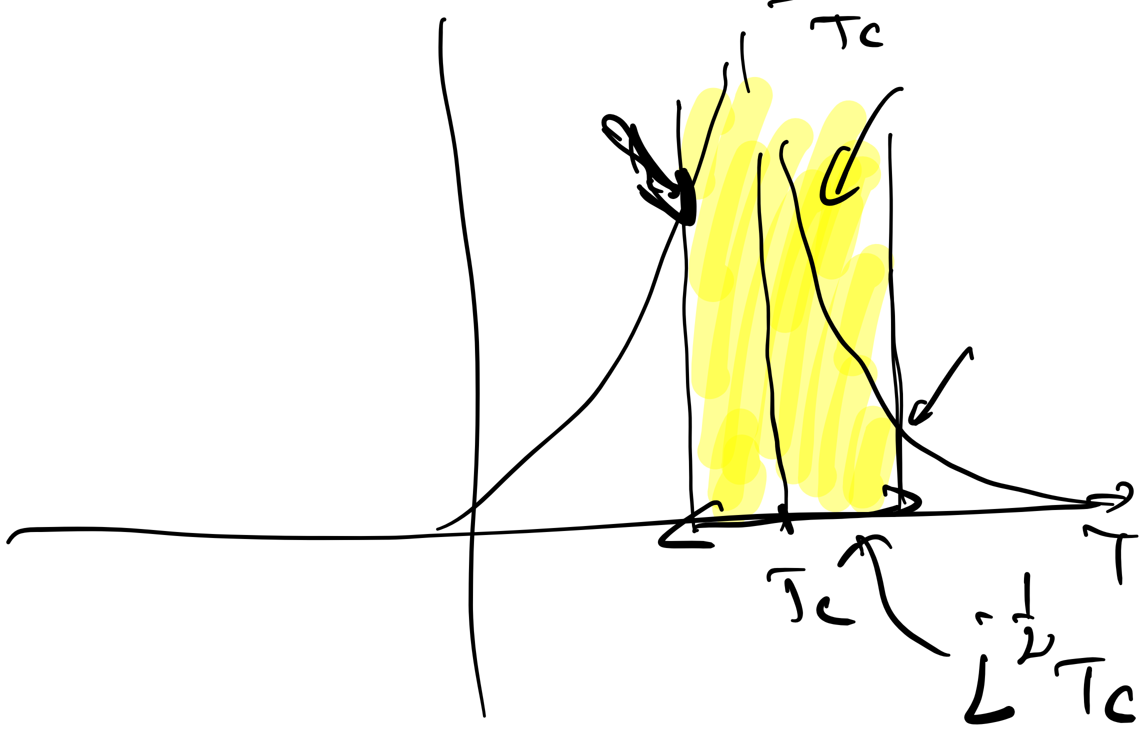


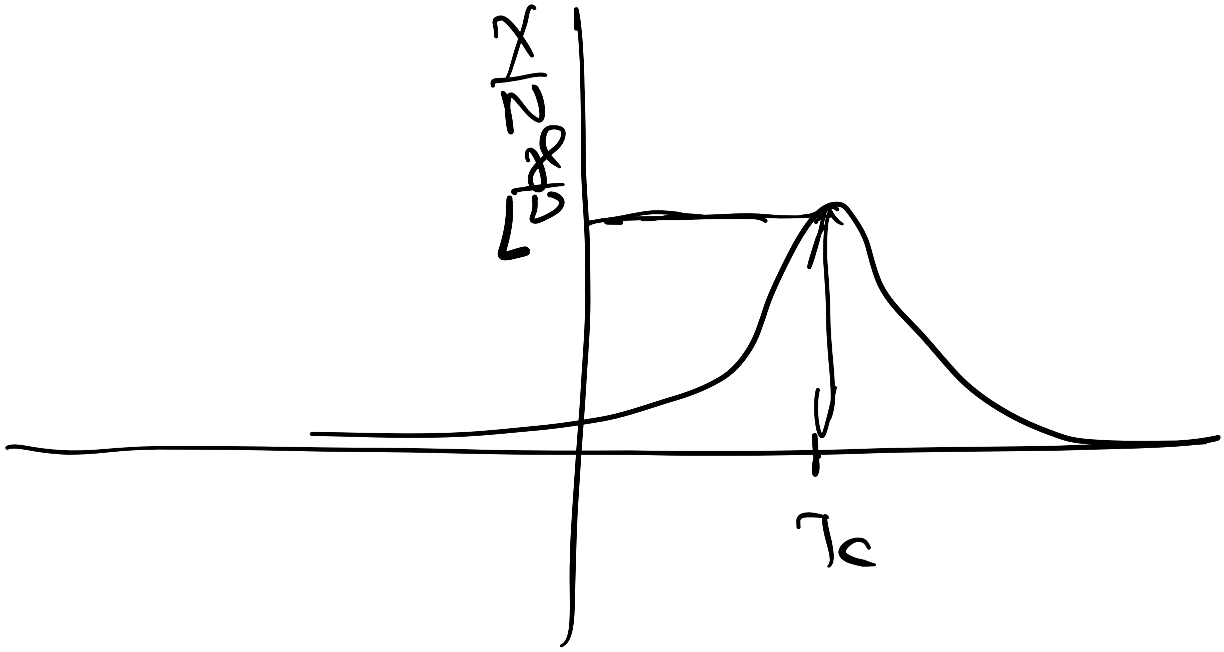
si $\xi \ll L \Rightarrow$ como si el sistema fuese ∞.

pero si $\xi \sim L$

$$\xi \sim t^{-\nu} \sim L \Rightarrow t \sim L^{-\frac{1}{\nu}}$$

$$\frac{T-T_c}{T_c} \sim L^{-\frac{1}{\nu}}$$



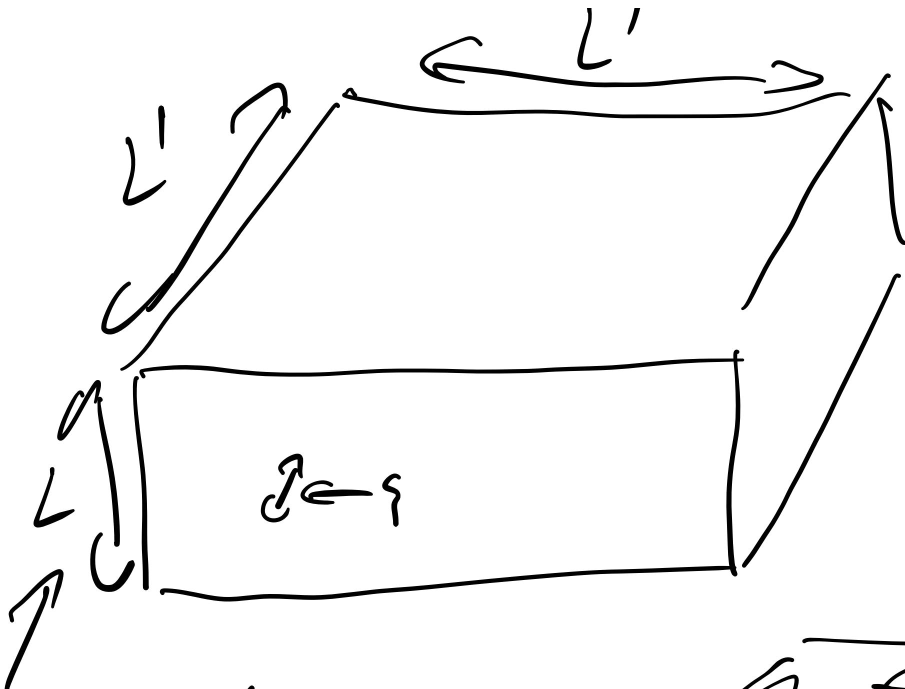


por ejemplo

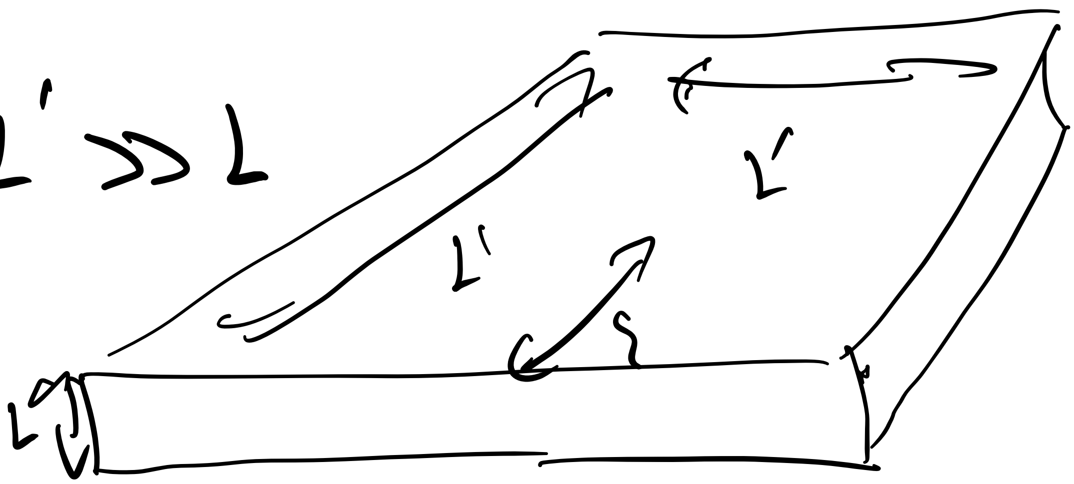
$$\frac{\chi}{N} \sim t^{-\gamma} \quad \text{pero si } L \text{ finito}$$

$$t_{min} \sim L^{-\frac{1}{\nu}}$$

$$\frac{\chi_{max}}{N} \sim t_{min}^{-\gamma} = L^{\frac{\gamma}{\nu}}$$



$L' \gg L$



si T es tal que

$\xi \ll L \ll L' \rightarrow$ comportamiento 3-D

$$T \sim T_{c_{3-D}} \rightarrow \frac{\chi_{max}}{N} \sim L^{\frac{\gamma_{3D}}{\nu_{3D}}}$$

pero $T_{c_{2-D}} \neq T_{c_{3-D}}$

$\nu_{2D} \neq \nu_{3D}$

$\gamma_{2D} \neq \gamma_{3D}$

si $L < \xi \ll L' \rightarrow$ cuasi-bidimensional

2-D

$T \sim T_{c_{2D}}$

$$\frac{\chi_{max}}{N} \sim \left(L'\right)^{\frac{\gamma_{2D}}{\nu_{2D}}}$$

2) Sobre las fluctuaciones cuánticas

Aquí, hemos estudiado modelos no-cuánticos.

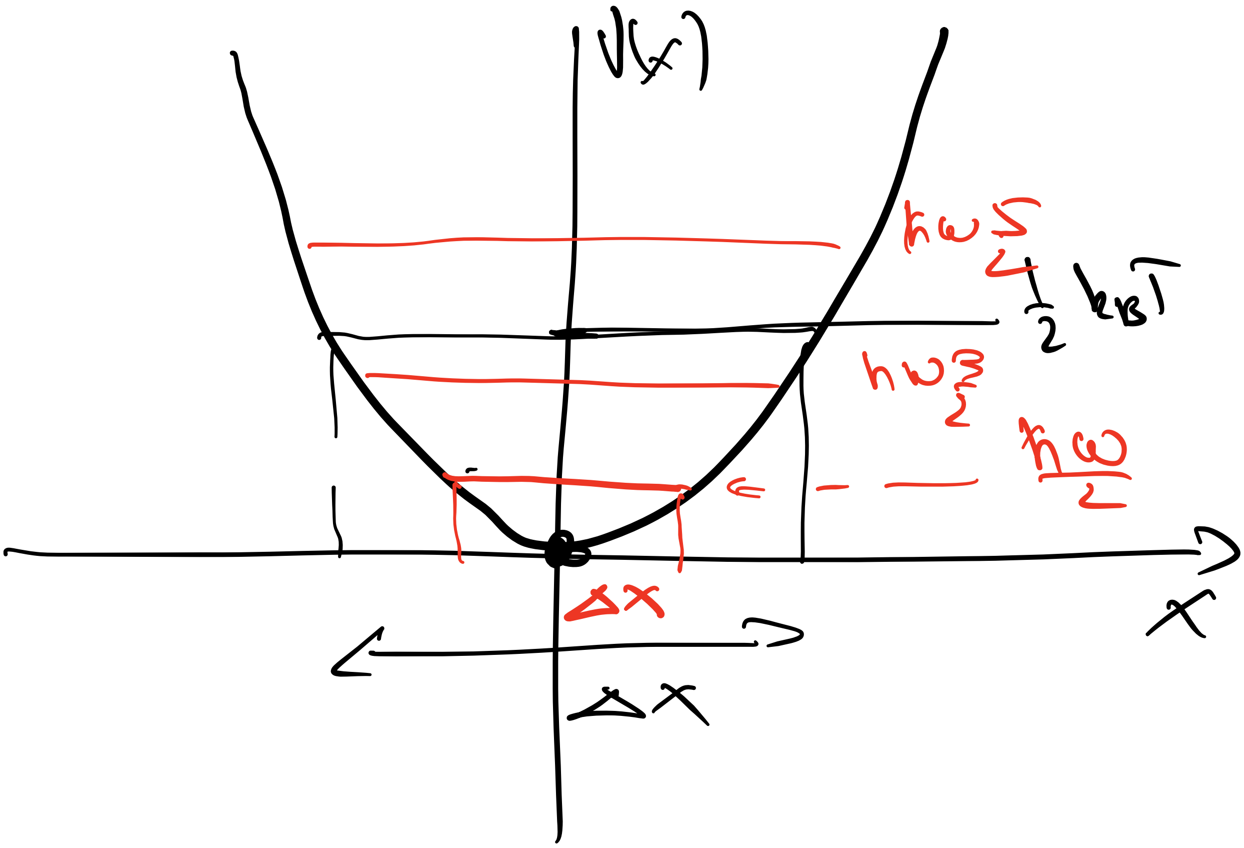
Oscilador armónico

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} k x^2\right)$$

acoplado a un baño térmico a temperatura T

$$\langle E \rangle \sim \frac{1}{2} k_B T$$



$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$\Delta x_{\text{térmico}}$ vs $\Delta x_{\text{cuántico}}$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{2} k_B T$ vs $\frac{1}{2}\hbar\omega$

si $\hbar\omega << k_B T$

$\rightarrow \Delta x_{cuántico} << \Delta x_{térmica}$

$\rightarrow$ el modelo clásico basta.

pero si $\hbar\omega \sim k_B T$

$$\Delta x_{cua} \sim \Delta x_{ter}.$$

$\rightarrow$ las fluctuaciones cuánticas son importantes.

$\rightarrow$ En general, para considerar a temperatura T, sólo las fluctuaciones cuánticas +

$E \gtrsim k_B T$ van a influir.

→ excitaciones de energía

E, momento p

$$E \sim p^z \quad z \text{ exponente dinámico.}$$

$E = cp \quad z = 1$

$E = \frac{p^2}{2m} \quad z = 2$

$\Rightarrow p^z \gtrsim k_B T$

pero, si λ es la longitud de onda de de Broglie

$$p \sim \frac{h}{\lambda}$$

$$\lambda^{-2} \gtrsim \text{cte}\, T$$

$$\Rightarrow \lambda \lesssim \text{cte}\, T^{-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ si hay una transición de fase en una temperatura T_c las fluctuaciones cuánticas dan $\sim T_c^{-1/2}$, pero $\xi \sim t^{-\nu}$

si $t^{-\nu} \gg T_c^{-1/2}$ o $\frac{T-T_c}{T_c} \ll T_c^{\frac{2}{\nu}}$

→ $\xi \gg d_{max}$.

$\frac{T-T_c}{T_c} < T_c^{3/2}$

→ para toda transición de fase a temperatura $\underline{T_c \neq 0}$

→ las fluctuaciones cuánticas no cuentan.

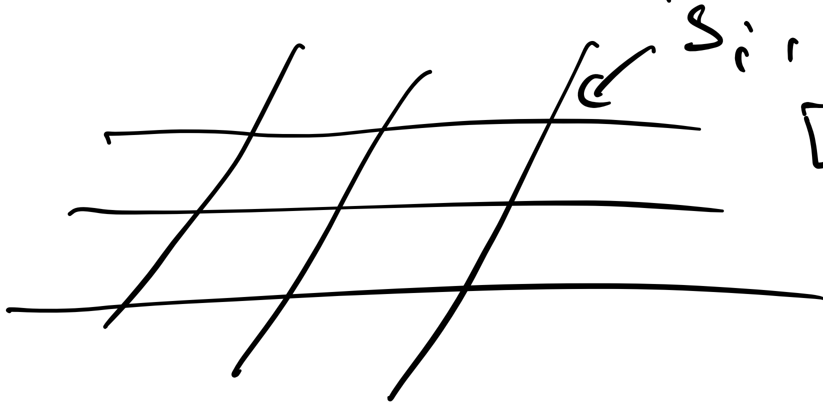
Las fluctuaciones cuánticas solo juegan un papel para las transiciones de fase a $T=0$!

Transiciones de fase cuánticas.

Q.P.T.

<u>ejemplo</u>

Modelo de Ising con campo transverso.

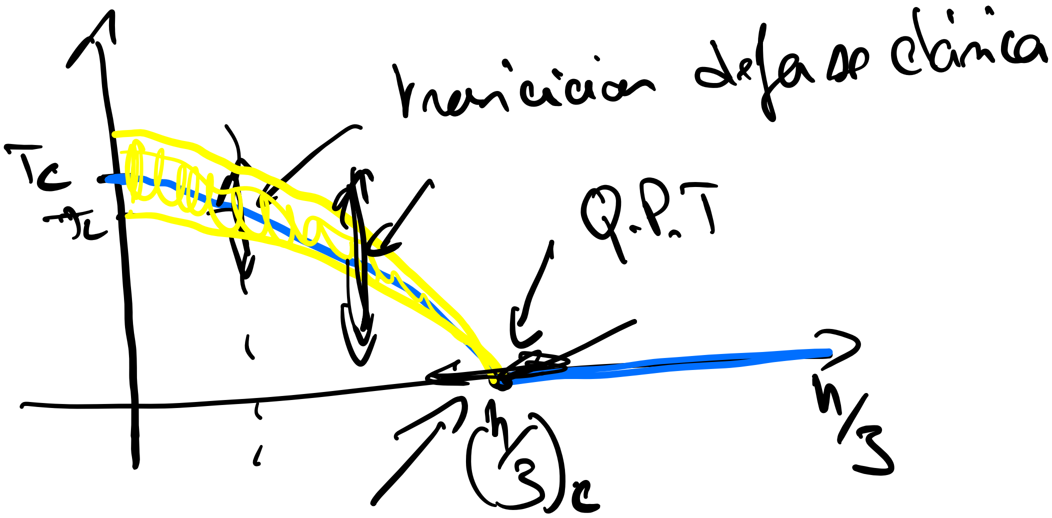


$\vec{S}_i$, $\vec{S}_i^2 = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$

$[S^a_j, S^b_j] = i\epsilon^{abc} S^c_j x$

$$\hat{H} = -J\sum_{\langle i,j\rangle} S^z_i S^z_j - h\sum_i S^x_i$$

* si $h=0$, → Ising clásico



* si $h/J \to \infty$

$$|\Psi\rangle_{GS} = \prod_i \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$$

$$\langle GS| S^z_i |GS\rangle = 0$$