

Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL
Universidad Antonio Nariño

25/01/2022



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Introducción a la Teoría Cuántica de Campos

Programa del curso

Nicolás Bernal

- Temas básicos
Relatividad especial, mecánica clásica, mecánica cuántica, teoría clásica de campos
- Cuantización del campo escalar libre
- Cuantización del campo escalar con interacciones
- Reglas de Feynman y amplitudes
- Regularización

Anamaría Font

- Renormalización
- Ruptura espontánea de la simetría



- “An Introduction to Quantum Field Theory” by Peskin & Schroeder
errata aquí!
- “Quantum Field Theory” by Ryder
- “The Quantum Theory of Fields - Foundations” by Weinberg
- “Lectures on Quantum Field Theory” by Tong
- “Quantum Field Theory” University of Amsterdam



- Evaluación:
Tareas semanales :-)
- Horas de consulta:
Miércoles 2pm – 3pm COT
+ Mattermost @nicolasbernal
+ zoom en el mismo link

Diapositivas
basadas (i.e. *abudineadas*)
en las de Anamaría!



Introducción a la Teoría Cuántica de Campos





Teoría cuántica de campos (QFT)

- El modelo estándar de física de partículas se formula en términos de una teoría cuántica de campos (QFT)
- QFT permite calcular secciones eficaces, tasas de decaimiento... que pueden ser comparadas con las observaciones
- QFT aparece también en física de materia condensada e.g. conexión con superconductividad, efecto Hall cuántico...
- Conceptos como la ruptura espontánea de la simetría y el grupo de renormalización (vitales en la física de partículas) fueron originados en materia condensada!



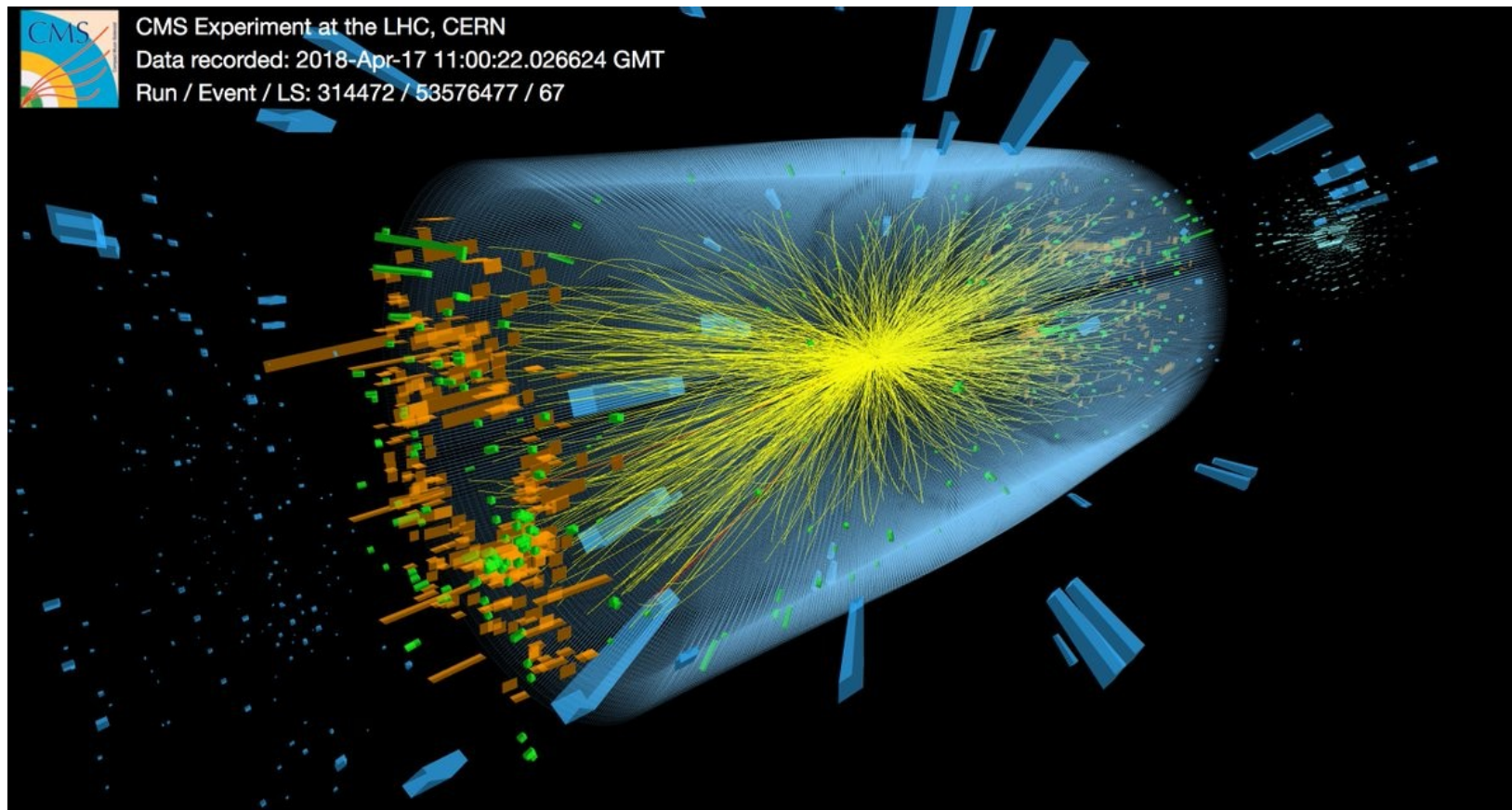
Teoría cuántica de campos?

QFT ~ mecánica cuántica + relatividad especial + campos

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$$

$$E = m c^2$$

¡El número de partículas no se conserva en procesos relativistas y cuánticos!





En QFT los objetos fundamentales son los campos
→ operadores dependientes del tiempo y la posición

Las partículas surgen al cuantizar los campos

Campo del fotón $A^\mu(t, \vec{x})$ → $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Campo del electrón $\psi(t, \vec{x})$

Campo de Higgs $\phi(t, \vec{x})$

...

Aquí nos enfocaremos en el caso más simple: *campo escalar*



Implicaciones de QFT

- Teorema de la estadística del espín
espín entero \rightarrow bosón
espín semientero \rightarrow fermión
- Existencia de antipartículas
- Teorema CPT
- Interacciones
creación y aniquilación de partículas
intercambio de partículas virtuales
e.g. $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$



- Objetivo: Aplicar QFT a procesos de altas energías

Temas básicos





Unidades y dimensiones naturales

- c : velocidad de la luz en el vacío $[c] = L T^{-1}$ (distancia/tiempo)
- \hbar : constante *reducida* de Planck $[\hbar] = M L^2 T^{-1}$ (masa x velocidad x distancia)
- Es *conveniente* usar unidades naturales $c = \hbar = 1$
 $[energía] = [masa] = [distancia]^{-1} = [tiempo]^{-1}$
- *Todas las unidades en función de una potencia de la energía*
- Ejemplos:
 $[E] = [M] = +1$
 $[t] = [x] = -1$



Relatividad especial

- Espacio tiempo = espacio de Minkowski
coordenadas $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

notación $x = x^\mu$ $x^0 = t$

$$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$$

- Punto en el espacio-tiempo = evento

- Intervalo entre 2 eventos A y B

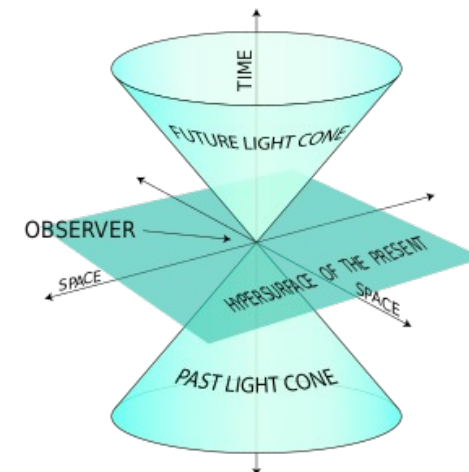
$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\Delta t = t_B - t_A$$

$$\Delta x = x_B - x_A$$

...

$$\Delta s^2 = \begin{cases} > 0 & \text{temporal, dentro del cono de luz} \\ < 0 & \text{espacial, fuera del cono de luz} \\ 0 & \text{luz, sobre el cono de luz} \end{cases}$$





Relatividad especial

- Tensor métrico

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$$

(índices repetidos se suman)

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \alpha \\ 0 & \text{si } \mu \neq \alpha \end{cases}$$

i.e. $\eta_{\mu\nu}$ es la inversa de $\eta^{\mu\nu}$:

Los índices se bajan con $\eta_{\mu\nu}$ y se suben con $\eta^{\mu\nu}$:

e.g. $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

$$\Delta s^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^3 x_i y_i \quad (\text{producto escalar})$$



Relatividad especial

Cuadrivector posición

$$x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$x^2 = x_\mu x^\mu = t^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}$$

Cuadrivector momento

$$p^\mu = (E, \vec{p})$$

Partícula de masa m

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2$$

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Notar:

$$p_\mu x^\mu = E t - \vec{p} \cdot \vec{x}$$



Relatividad especial

- Transformaciones de Lorentz $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
 $\rightarrow \Lambda$ deja el producto escalar invariante

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = x^{\mu} y_{\mu}$$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

$$\det \Lambda = \pm 1$$

$$|\Lambda^0_0| \geq 1$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

Boost en x^1

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

Rotación alrededor de z

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p^{\mu} = (E, \vec{p})$; $A^{\mu} = (A^0, \vec{A})$; $J^{\mu} = (\rho, \vec{J})$ transforman igual que x^{μ}

- Transformaciones de Poincaré $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$



Propiedades de las transformaciones de Lorentz $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}$$

$$\eta^{\mu\nu} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = \eta^{\alpha\beta}$$

$$\partial'^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \partial^{\alpha}$$



Relatividad especial

- El conjunto de transformaciones de Lorentz forma el grupo **$O(1, 3)$**
- El subconjunto con $\det \Lambda = 1$ y $\Lambda^0_0 \geq 1$ forma el subgrupo propio ortocrono **$SO^+(1, 3)$**
- Teoría invariante bajo transformaciones de Lorentz quiere decir invariante bajo **$SO^+(1, 3)$**
- Inversión temporal y paridad no pertenecen a $SO^+(1, 3)$

$$\mathcal{T}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Otras representaciones del grupo de Lorentz:
tensor antisimétrico espinor de Dirac

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\Psi^\alpha = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \Psi^3 \\ \Psi^4 \end{pmatrix}$$



Lagrangiano L

Sistema descrito por coordenadas q_a , $a = 1, \dots, n$

La dinámica depende de L con $L = T - V$

$$L = L(q_a, \dot{q}_a) \quad \dot{q}_a = \frac{dq_a}{dt}$$

Se define la acción S

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_a, \dot{q}_a)$$

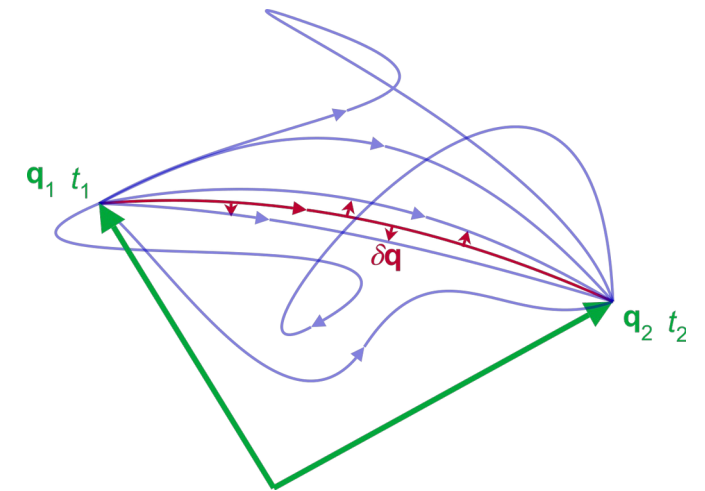
S depende de la trayectoria (camino).

La trayectoria real es tal que S es estacionaria

$$\rightarrow \delta S = 0 \quad \text{ante} \quad q_a \rightarrow q_a + \delta q_a$$

$$\delta S = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0$$

Ecuaciones de
Euler-Lagrange





Hamiltoniano H

momento $p^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$

$$H(q_a, p^a) = p^a \dot{q}_a - L$$

ecuaciones de movimiento

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p^a} = \{q_a, H\}$$

$$\dot{p}^a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} = \{p^a, H\}$$

$$\{q_a, q_b\} = \{p^a, p^b\} = 0; \quad \{q_a, p^b\} = \delta_a^b$$

corchetes de Poisson

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_a} \frac{\partial g}{\partial p^a} - \frac{\partial f}{\partial p^a} \frac{\partial g}{\partial q_a}$$

Ejemplo: Oscilador armónico

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

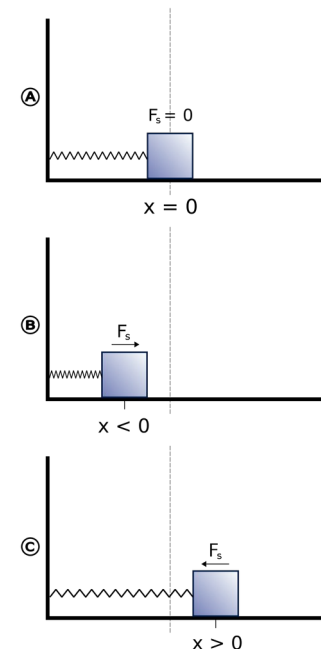
$$H = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$p \rightarrow \sqrt{m} p; \quad q \rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} q$$

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$$

Ecuación de movimiento $\rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$





Postulados

- $q, p \rightarrow$ operadores
 $\{, \} \rightarrow -i [,]$

$$[q_a, p^b] = i \delta_a^b; \quad [q_a, q_b] = [p^a, p^b] = 0$$

- El operador Hamiltoniano H determina la dinámica del sistema descrito por $|\Psi(t)\rangle$
- La evolución temporal está dada por la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle$$

- Para H independiente de t $|\Psi(t)\rangle = e^{-i H (t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle$

$|\Psi(t)\rangle$ se expande en una base $|\phi_n\rangle$ de autovectores de H $H |\phi_n\rangle = E_n |\phi_n\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-i E_n (t-t_0)} |\phi_n\rangle$$



Oscilador armónico

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2$$

Operadores de creación y aniquilación: a^\dagger , a

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + i p); \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - i p)$$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger); \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger)$$

$$[q, p] = i \quad \rightarrow \quad [a, a^\dagger] = 1$$

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

$$[H, a] = -\omega a; \quad [H, a^\dagger] = \omega a^\dagger$$

Existe un autoestado de mínima energía: vacío o estado base $|0\rangle$

$$a |0\rangle = 0; \quad E_0 = \frac{1}{2} \omega$$

Autovalores y autoestados de H :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega; \quad |n\rangle = \underbrace{a^\dagger \cdots a^\dagger}_n |0\rangle$$



- Representación de Schrödinger

$|\Psi_S(t)\rangle$ dependiente de t , \mathcal{O}_S independiente de t

$$i \frac{d}{dt} |\Psi_S(t)\rangle = H |\Psi_S(t)\rangle; \quad |\Psi_S(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)} |\Psi_S(t_0)\rangle$$

- Representación de Heisenberg

$|\Psi_H\rangle$ independiente de t , $\mathcal{O}_H(t)$ dependiente de t

$$|\Psi_H\rangle = e^{iH(t-t_0)} |\Psi_S(t)\rangle = |\Psi_S(t_0)\rangle$$

$$\mathcal{O}_H(t) = e^{iH(t-t_0)} \mathcal{O}_S e^{-iH(t-t_0)}; \quad H = H_S = H_H$$

$$i \frac{d\mathcal{O}_H}{dt} = [\mathcal{O}_H, H]$$

$$\langle \Psi_H | \mathcal{O}_H(t) | \Psi_H \rangle = \langle \Psi_S(t) | \mathcal{O}_S | \Psi_S(t) \rangle$$



Formulación Lagrangiana

campo $\phi(t, \vec{x})$ función de espacio y tiempo

escalar ϕ , vector A^μ , espinor ψ

$\phi(t, \vec{x})$ describe infinitos grados de libertad

dinámica determinada por Lagrangiano, función de ϕ y $\partial_\mu\phi$

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} dt \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \quad \mathcal{L}: \text{densidad Lagrangiana}$$

$$\text{Acción: } S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(t) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \quad [S] = 0; \quad [d^4x] = -4; \quad [\mathcal{L}] = 4$$

$\delta S = 0 \rightarrow$ ecuaciones de movimiento



Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta \phi + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \end{aligned}$$

El último término es una derivada total y se puede integrar!

Se cancela asumiendo $\delta \phi(t, \vec{x}) \rightarrow 0$ para $|\vec{x}| \rightarrow \infty$

$$\delta S = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$



Campo escalar real $\phi(t, \vec{x})$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad \text{con } m \text{ constante}$$

$$[\mathcal{L}] = 4; \quad [\partial_\mu] = 1 \quad \rightarrow \quad [\phi] = 1; \quad [m] = 1 \quad m \text{ tiene unidades de masa}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \quad \text{Ecuación de Klein-Gordon}$$

Notación: d'Alembert = Laplaciano en Minkowski

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

En general: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)$



- 2 campos escalares reales ϕ_1, ϕ_2

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m_1^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \phi_2^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) = 0$$

- Campo escalar complejo χ, χ^*

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - M^2 \chi^* \chi \qquad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2)$$

- Campos escalar complejo χ y campo escalar real ϕ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu \chi^* \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - M^2 \chi^* \chi - g \chi^* \chi \phi \qquad g: \text{acople}$$

→ hallar las ecuaciones de movimiento



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.