Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL
Universidad Antonio Nariño

01/02/2022

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Invariancia de Lorentz

La invariancia de Lorentz, i.e. bajo $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$, de las eom requiere que *S* sea invariante $S = \int d^4x\, \mathcal{L}$

Se cumple siempre que *L* sea un escalar de Lorentz, i.e. $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x)$

Ejemplos

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu}\phi^{*}\partial^{\mu}\phi - m^2\phi^{*}\phi$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}\,, \qquad F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

Teorema de Noether

Simetría continua (i.e. *S* invariante) → corriente conservada j^μ

$$\phi_a \to \phi_a + \alpha\, \Delta\phi_a\,, \qquad \mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha\, \partial_\mu \mathcal{F}^\mu$$

$$j^\mu = \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \Delta\phi_a - \mathcal{F}^\mu$$

Ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0 \qquad \to \qquad \partial_\mu j^\mu = 0$$

$$Q = \int d^3x\, j^0 \qquad \to \qquad \frac{dQ}{dt} = 0$$

Ejemplos:

1. $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$, simetría *U*(1) global $\phi \to e^{i\,\alpha}\,\phi\,, \quad \phi^* \to e^{-i\,\alpha}\,\phi^*$

$$j^\mu = i\,(\phi\,\partial^\mu\phi^* - \phi^*\,\partial^\mu\phi)$$ ← tarea 1

2. $\mathcal{L} = \sum_{a=1}^{2} \left[\partial_\mu \phi_a^* \partial^\mu \phi_a - m^2 \phi_a^* \phi_a\right]$ 2 campos escalares complejos de igual masa *m*

es conveniente construir el doblete $\varphi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi^\dagger = (\phi_1^*,\, \phi_2^*)$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^\dagger \varphi$$

simetría *SU*(2) global $\varphi \to e^{i\,\frac{\theta^j}{2}\,\sigma^j}\,\varphi \qquad \text{con } \sigma^j\ :\ \text{matrices de Pauli}$

→ Ejercicio: hallar las corrientes conservadas

* Formulación Hamiltoniana

Momento conjugado $\pi^a = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}$

$$\mathcal{H} = \pi^a \dot{\phi}_a - \mathcal{L}\,, \qquad H = \int d^3x\, \mathcal{H}$$

Ejemplo: $\mathcal{L} = \dfrac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \dfrac{1}{2} m^2 \phi^2$

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]$$

* Cuantización del campo escalar libre

Tomando la transformada de Fourier se descubre que
la solución general de $\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$
es la superposición de osciladores armónicos con frecuencia $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$

Para cuantizar $\phi(t, \vec{x})$ se cuantizan los osciladores.

Se procede en la representación de Schrödinger.
Los operadores $\phi(\vec{x})$ y $\pi(\vec{x})$ satisfacen las reglas de conmutación

$$[\phi(\vec{x}),\, \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = 0$$

$$[\phi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = i\,\delta^{(3)}\,(\vec{x} - \vec{y})$$

→ análogo a $[q_a,\, q_b] = [p^a,\, p^b] = 0\,, \qquad [q_a,\, p^b] = i\,\delta_a^b$

Cuantización del Campo Escalar Libre

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\,\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\,\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \qquad \text{asuminendo } \phi^* = \phi$$

$$\pi(\vec{x}) = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\,\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\,\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) , \qquad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$$

Se demuestra que

$$[a_{\vec{p}},\, a_{\vec{p}'}] = [a^\dagger_{\vec{p}},\, a^\dagger_{\vec{p}'}] = 0 \qquad \to \qquad [\phi(\vec{x}),\, \phi(\vec{y})] = [\pi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = 0$$

$$[a_{\vec{p}},\, a^\dagger_{\vec{p}'}] = (2\pi)^3\, \delta^{(3)}\, (\vec{p} - \vec{p}\,') \qquad \to \qquad [\phi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = i\, \delta^{(3)}\, (\vec{x} - \vec{y})$$

→ tarea :-)

Hamiltoniano

$$H = \int d^3x \, \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right]$$

Sustituyendo $\phi(\vec{x}), \, \pi(\vec{x})$

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \, \frac{1}{2}\omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}} \right) \qquad \text{con} \qquad \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \, \omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}} \, , \, a^\dagger_{\vec{p}} \right] \right) \end{aligned}$$

→ tarea :-)

Estado de Vacío

En analogía con el oscilador armónico en mecánica cuántica,
se define el estado de vacío $|0\rangle$ tal que

$$a_{\vec{p}}\,|0\rangle = 0 \qquad \forall \vec{p}$$

Actuando con *H*, $H\,|0\rangle = \tilde{E}_0\,|0\rangle$

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\omega_{\vec{p}}\left(a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}\,,\,a^\dagger_{\vec{p}}\right]\right) \qquad \rightarrow \qquad \tilde{E}_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2}\omega_{\vec{p}}\left[a_{\vec{p}}\,,\,a^\dagger_{\vec{p}}\right]$$

Pero $H\,|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\omega_{\vec{p}}\left(0 + \frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}\,,\,a^\dagger_{\vec{p}}\right]\right)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\omega_{\vec{p}}\frac{1}{2}(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)|0\rangle = \infty|0\rangle$

→ Qué hacer?! :-/

Estado de Vacío

Realmente hay dos divergencias: $$\tilde{E}_0 = \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}}_{\to\infty} \omega_{\vec{p}} \, \frac{1}{2} \underbrace{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)}_{\to\infty}$$

1. $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}) = \int d^3\vec{x}\, e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} \xrightarrow[\vec{p}\to 0]{} \int d^3\vec{x} = \text{volumen} \to \infty$ divergencia infrarroja *IR*

Colocando el sistema en una caja de volumen *V* podemos considerar la *densidad de energía*

2. $\dfrac{\tilde{E}_0}{V} = \int \dfrac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \dfrac{1}{2} \omega_{\vec{p}} = \int \dfrac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \dfrac{1}{2} \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \dfrac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d|\vec{p}|\, |\vec{p}|^2 \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \to \infty$ divergencia ultravioleta *UV*

* Se puede introducir un corte para $|\vec{p}|$ (i.e. una escala de validez de la teoría!)
* Las cantidades observables son las *diferencias* de energía! ← [constante cosmológica]

Ordenamiento Normal

Como los observables son las diferencias de energía,

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\omega_{\vec{p}}\left(a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}\left[a_{\vec{p}}\,,\,a^\dagger_{\vec{p}}\right]\right) \qquad \rightarrow \qquad H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\omega_{\vec{p}}\,a^\dagger_{\vec{p}}\,a_{\vec{p}}$$

esto es equivalente a trabajar con el ordenamiento normal

Para un producto de campos libres $\phi_1(\vec{x}_1)\,\phi_2(\vec{x}_2)\cdots\phi_n(\vec{x}_n)$
se define el producto normal $:\phi_1(\vec{x}_1)\,\phi_2(\vec{x}_2)\cdots\phi_n(\vec{x}_n):$ como el producto usual con todos los operadores de aniquilación colocados a la derecha

$$H = \; :\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2}\omega_{\vec{p}}\left(a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}\,a^\dagger_{\vec{p}}\right): \; = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2}\omega_{\vec{p}}\left(a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}} + a^\dagger_{\vec{p}}a_{\vec{p}}\right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\omega_{\vec{p}}\,a^\dagger_{\vec{p}}\,a_{\vec{p}}$$

Partículas

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \omega_{\vec{p}}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$$

Se puede demostrar que $[H,\, a_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}}\, a_{\vec{p}}\,, \qquad [H,\, a^\dagger_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}}\, a^\dagger_{\vec{p}}$ ← tarea :-)

$$H\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle = \omega_{\vec{p}}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle = \underbrace{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}_{E_{\vec{p}}}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$$

← Energía relativista de una partícula de masa *m* y momento *p*

También se calcula el autovalor de *P* dado por

$$P^i = \int d^3x\, T^{0i} = \int d^3x\, \dot{\phi}\, \partial^i \phi \qquad \rightarrow \qquad \vec{P} = -\int d^3x\, \pi(\vec{x})\, \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$$

$$\vec{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$$

$$\vec{P}\, a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle = \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle$$

Partículas

$a^\dagger_{\vec{p}}$ crea un estado de momento $\vec{p}$ y energía $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$ se interpreta como el estado de una partícula con $\vec{p}$ y $E_{\vec{p}}$

Además
$$H\; a^\dagger_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle = \left(E_{\vec{k}} + E_{\vec{p}}\right) a^\dagger_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle$$
$$\vec{P}\; a^\dagger_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle = \left(\vec{k} + \vec{p}\right) a^\dagger_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle$$
y así sucesivamente...

Tenemos un espacio de estados (*espacio de Fock*)

$$\underbrace{|0\rangle}_{\text{vacío}}\,, \qquad \underbrace{a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle}_{\text{1 partícula}}\,, \qquad \underbrace{a^\dagger_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle}_{\text{2 partículas}}\,, \qquad \underbrace{a^\dagger_{\vec{q}}\, a^\dagger_{\vec{k}}\, a^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle}_{\text{3 partículas}}, \;\ldots$$

Operador número
$$N = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, a^\dagger_{\vec{p}}\, a_{\vec{p}}$$

$$N\,|\vec{p}_1,\, \vec{p}_2, \cdots \vec{p}_n\rangle = n\,|\vec{p}_1,\, \vec{p}_2, \cdots \vec{p}_n\rangle\,, \qquad [N,\, H] = i\frac{dN}{dt} = 0$$

→ el número de partículas se conserva

Partículas

Notar que $[a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{k}}] = 0 \quad \rightarrow \quad a^\dagger_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{k}} |0\rangle = a^\dagger_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{p}} |0\rangle$

los estados son idénticos

$\exists \quad \underbrace{a^\dagger_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}} \cdots a^\dagger_{\vec{p}}}_{n} |0\rangle$ estado de *n* partículas con momento *p*

→ las partículas asociadas al campo de Klein-Gordon son *bosones*

También se verifica que

$\vec{J} a^\dagger_{\vec{p}} |0\rangle \Big|_{\vec{p}=0} = 0$ → espín 0

$\vec{J}$ es la carga conservada correspondiente a rotaciones

Normalización

Se escoge $\langle 0|0\rangle = 1$

Denotamos el estado de un 1 partícula $|\vec{p}\rangle$

Hemos visto $|\vec{p}\rangle \quad \propto \quad a^{\dagger}_{\vec{p}}\,|0\rangle$

La normalización apropiada es $|\vec{p}\rangle = \sqrt{2\,E_{\vec{p}}}\;\; a^{\dagger}_{\vec{p}}\,|0\rangle$

razón: $\langle\vec{k}|\vec{p}\rangle = \langle 0|a_{\vec{k}}\,a^{\dagger}_{\vec{p}}\,|0\rangle = 2(2\pi)^3\;\; \underbrace{E_{\vec{k}}\,\delta^{(3)}\left(\vec{k}-\vec{p}\right)}_{\text{invariante de Lorentz}}$

$\rightarrow \;\; E_{\vec{k}'}\,\delta^{(3)}\left(\vec{k}'-\vec{p}'\right) = E_{\vec{k}}\,\delta^{(3)}\left(\vec{k}-\vec{p}\right)$ $\leftarrow$ Ver Peskin & Schroeder :-)

Recapitulando...

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\,E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} \right) = \phi^*(\vec{x})$$

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2\,E_{\vec{p}}}\;\; a^\dagger_{\vec{p}}\, |0\rangle$$

$$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\,E_{\vec{p}}} e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} |\vec{p}\rangle$$

$$\langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle = e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

Similar a

$$|\vec{x}\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} |\vec{p}\rangle$$

$$\langle \vec{x}|\vec{p}\rangle = e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

en mecánica cuántica

$\phi(\vec{x})$ actuando sobre el vacío crea una partícula en $\vec{x}$

Campo escalar *complejo* libre

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\,E_{\vec{p}}}} \left(b_{\vec{p}}\, e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} + c^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} \right) \quad \neq \quad \phi^*(\vec{x})$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} \left(b^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} - c_{\vec{p}}\, e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} \right)$$

$$[b_{\vec{p}},\, b^\dagger_{\vec{p}'}] = (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\,, \qquad [c_{\vec{p}},\, c^\dagger_{\vec{p}'}] = (2\pi)^3\, \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')\,, \quad \text{etc}\ldots$$

$$[\phi(\vec{x}),\, \pi(\vec{y})] = i\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\,, \qquad [\phi(\vec{x}),\, \pi^\dagger(\vec{y})] = 0\,, \quad \text{etc}\ldots$$

Campo escalar *complejo* libre

2 operadores de creación $b^{\dagger}_{\vec{p}}\ y\ c^{\dagger}_{\vec{p}}$
crean 2 tipos de partículas de igual masa

→ Se interpretan como *partículas y antipartículas*

→ tienen carga opuesta

En una tarea ya habíamos calculado
la corriente de Noether para una simetría *U(1)*

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi,\ \phi^* \to e^{-i\alpha}\phi^*$$

$$j^\mu = i\left(\phi\,\partial^\mu\phi^* - \phi^*\,\partial^\mu\phi\right)$$

$$Q = \int d^3x\, j^0$$

Al cuantizar:

$$Q = i\int d^3x \quad :\left(\pi\,\phi - \phi^\dagger\,\pi^\dagger\right):$$

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(c^\dagger_{\vec{p}}\,c_{\vec{p}} - b^\dagger_{\vec{p}}\,b_{\vec{p}}\right)$$

Campo escalar *complejo* libre

$$\underbrace{c^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle}_{\text{antipartícula}} \qquad \text{y} \qquad \underbrace{b^\dagger_{\vec{p}}\,|0\rangle}_{\text{partícula}}$$ tienen carga opuesta

$$\phi \sim b_{\vec{p}}\, e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} + c^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

$$\phi^* \ \sim b^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} + c_{\vec{p}}\, e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}}$$

Para terminar de entender hay que considerar la *dependencia temporal*

Campo de Klein-Gordon en espacio-tiempo

Hasta ahora $\phi(\vec{x})$ y $\pi(\vec{x})$ en la representación de Schrödinger

Para obtener $\phi(t,\,\vec{x})$ y $\pi(t,\,\vec{x})$ pasamos a la representación de Heisenberg

Schrödinger	Heinsenberg
$\mathcal{O}_S$	$\mathcal{O}_H(t) = e^{i\,H\,t}\mathcal{O}_S\,e^{-i\,H\,t}$
$\dfrac{\partial \mathcal{O}_S}{\partial t} = 0$	$i\dfrac{\partial \mathcal{O}_H}{\partial t} = [\mathcal{O}_H,\,H]$

Entonces

$$\phi(x) = \phi(t,\,\vec{x}) = e^{i\,H\,t}\phi(\vec{x})\,e^{-i\,H\,t}$$

$$\pi(x) = \pi(t,\,\vec{x}) = e^{i\,H\,t}\pi(\vec{x})\,e^{-i\,H\,t}$$

Campo de Klein-Gordon en espacio-tiempo

En la representación de Heinsenberg
las reglas de conmutación son a igual tiempo

$$[\phi(t,\,\vec{x}),\,\phi(t,\,\vec{y})] = [\pi(t,\,\vec{x}),\,\pi(t,\,\vec{y})] = 0$$

$$[\phi(t,\,\vec{x}),\,\pi(t,\,\vec{y})] = i\,\delta^{(3)}\,(\vec{x}-\vec{y})$$

Para el campo de Klein-Gordon (escalar real libre)

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2(t,\,\vec{x}) + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi(t,\,\vec{x})\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(t,\,\vec{x})\right]$$

se demuestra (tarea 2)

$$[\phi(t,\,\vec{x}),\,H] = i\,\pi(t,\,\vec{x}) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\phi(t,\,\vec{x}) = \pi(t,\,\vec{x})$$

$$[\pi(t,\,\vec{x}),\,H] = i\left(\vec{\nabla}^2 - m^2\right)\phi(t,\,\vec{x}) \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\pi(t,\,\vec{x}) = \left(\vec{\nabla}^2 - m^2\right)\phi(t,\,\vec{x})$$

Por lo tanto $\displaystyle \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \left(\vec{\nabla}^2 - m^2\right)\phi \qquad \rightarrow \qquad \text{Ecuación de Klein-Gordon}$

Campos en espacio-tiempo

$$\phi(x) = \phi(t,\, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\,E_{\vec{p}}}} \left(\underbrace{e^{i\,H\,t} a_{\vec{p}}\, e^{-i\,H\,t}}_{a_{\vec{p}}\, e^{-i E_{\vec{p}}\, t}}\, e^{i\,\vec{p}\cdot\vec{x}} + \underbrace{e^{i\,H\,t} a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\,H\,t}}_{a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{i E_{\vec{p}}\, t}}\, e^{-i\,\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

Demo: $[H,\, a_{\vec{p}}] = -E_{\vec{p}}\, a_{\vec{p}} \quad \rightarrow \quad H\, a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}\,(H - E_{\vec{p}}) \quad \rightarrow \quad H^n\, a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}\,(H - E_{\vec{p}})^n$

$$e^{i\,H\,t} a_{\vec{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,t)^n}{n!} H^n\, a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,t)^n}{n!} (H - E_{\vec{p}})^n = a_{\vec{p}}\, e^{i(H - E_{\vec{p}})t}$$

$$e^{i\,H\,t} a_{\vec{p}}\, e^{-i\,H\,t} e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} = a_{\vec{p}}\, e^{-iE_{\vec{p}}t} e^{i\,\vec{x}\cdot\vec{p}} = a_{\vec{p}}\, e^{-ix_\mu p^\mu}$$

$$x_\mu p^\mu = E_{\vec{p}}\, t - \vec{x}\cdot\vec{p} \qquad p^\mu = (E_{\vec{p}}\,,\, \vec{p}) \qquad E_{\vec{p}} = \sqrt{p' + m^2}$$

Campos en espacio-tiempo

$$\phi(x) = \phi(t,\, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\, E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{-i\, x_\mu p^\mu} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{i\, x_\mu p^\mu} \right)$$

$$\pi(x) = \pi(t,\, \vec{x}) = \frac{\partial \phi(t,\, \vec{x})}{\partial t}$$

Se observa:

* Dualidad onda-partícula
  $\phi(x)$ crea y destruye partículas
  es combinación de soluciones $e^{\mp i\, x_\mu p^\mu}$ de $\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$

* aparecen $e^{-i\, E_{\vec{p}}\, t}$ y $e^{i\, E_{\vec{p}}\, t}$ pero $E_{\vec{p}} = \sqrt{p' + m^2} \geq 0$

* $\phi(x)$ no es una función de onda, es un campo cuántico
  $a_{\vec{p}}\, e^{-i\, x_\mu p^\mu}$ destruye una partícula de energía $E_{\vec{p}}$
  $a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{i\, x_\mu p^\mu}$ crea una partícula de energía $E_{\vec{p}}$

Próximamente...

* Causalidad

Necesitaremos el resultado

$$\int \frac{d^3p}{2\,E_{\vec{p}}} \qquad \leftarrow \qquad \text{es invariante de Lorentz} \qquad E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}\,' + m^2}$$

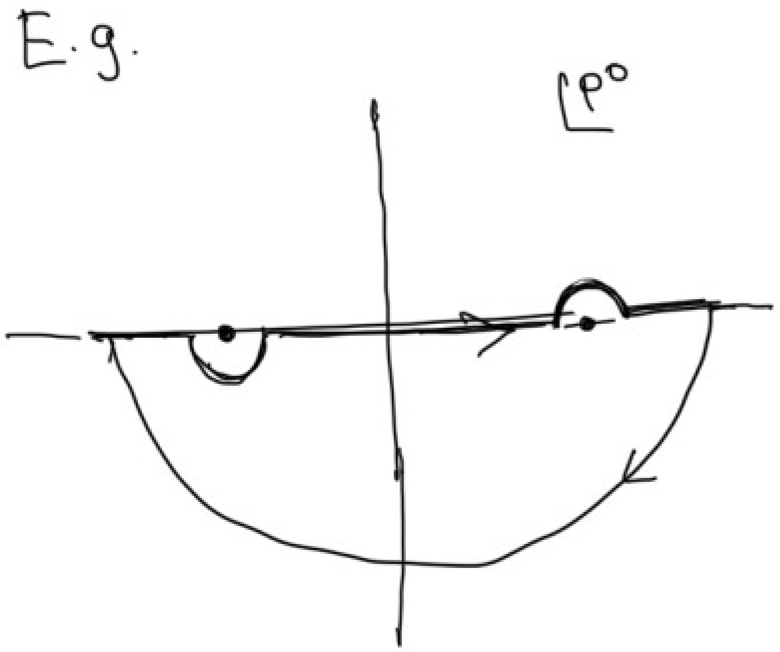
Demo: $$\int \frac{d^3p}{2\,E_{\vec{p}}} = \int \underbrace{d^4p}_{\text{invariante}} \qquad \underbrace{\delta\left(p^2 - m^2\right)\Big|_{p^0>0}}_{\text{invariante} \qquad p^2=p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^{\,2}}$$

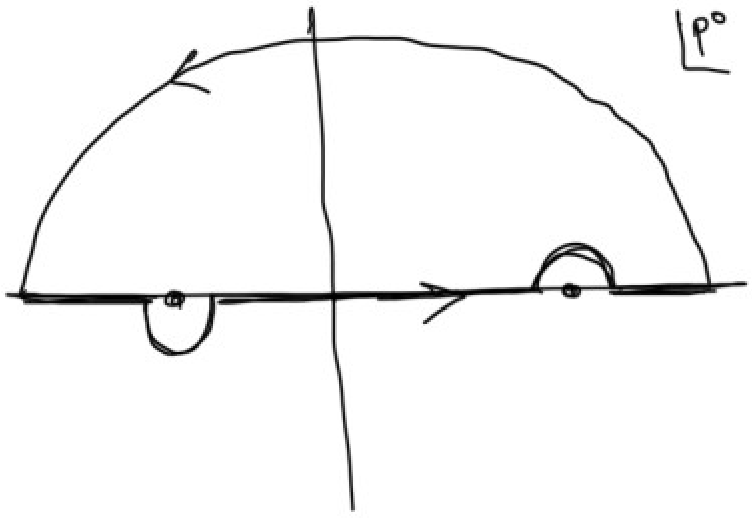
Luego se evalúa la integral en p^0 usando

$$\int dx\, f(x)\, \delta\left(g(x)\right) = \sum_{g(x_i)=0} \frac{1}{|g'(x_i)|}\, f(x_i)$$

* Propagador de Feynman

Aparecerán integrales de contorno en el plano complejo
y se evalúan usando el teorema del residuo





https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_integral_de_Cauchy
https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_residuos
https://es.wikipedia.org/wiki/Residuo_(análisis_complejo)

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced **physics**

LA-CoNGA **physics**

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.