Tarea 2 – Introducción a Teoría Cuántica de Campos

1. En el cuadro de Schrödinger la descomposición de Fourier del campo escalar libre y su momento conjugado está dada por

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\left(a_{\boldsymbol{p}}\,e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\,e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right)\\ \pi(\boldsymbol{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}}\left(a_{\boldsymbol{p}}\,e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} - a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\,e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right)\end{aligned},$$

   donde $\omega_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Demostrar que las relaciones de conmutación

$$[\phi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})] = i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \qquad [\phi(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})] = [\pi(\boldsymbol{x}), \pi(\boldsymbol{y})] = 0\,,$$

   implican que los operadores $a_{\boldsymbol{p}}$ y $a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$ satisfacen

$$[a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{p}'}] = [a^\dagger_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}] = 0, \quad [a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}] = (2\pi)^3\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\,.$$

   Ayuda: Demostrar primero que

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}}}\left(a_{\boldsymbol{p}} + a^\dagger_{-\boldsymbol{p}}\right)e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\ ,\ \pi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{\omega_{\boldsymbol{p}}}{2}}\left(a_{\boldsymbol{p}} - a^\dagger_{-\boldsymbol{p}}\right)e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$$

2. Dado el Lagrangiano del campo escalar libre

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\,,$$

   a) Hallar el Hamiltoniano.

   b) Demostrar que en términos de operadores de creación y destrucción, $a^\dagger_{\boldsymbol{p}}$ y $a_{\boldsymbol{p}}$, el Hamiltoniano resulta ser

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\omega_{\boldsymbol{p}}\left(a^\dagger_{\boldsymbol{p}}\,a_{\boldsymbol{p}} + \tfrac{1}{2}[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}}]\right)\,.$$

3. Considerando el campo escalar libre $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ y su momento conjugado $\pi(\boldsymbol{x}, t)$ en el cuadro de Heisenberg, demostrar que

   a) $\dfrac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{x}, t) = \pi(\boldsymbol{x}, t), \qquad \dfrac{\partial}{\partial t}\pi(\boldsymbol{x}, t) = (\nabla^2 - m^2)\phi(\boldsymbol{x}, t)$

   b) $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon.