Tarea 4 – Introducción a Teoría Cuántica de Campos

1. En un proceso de scattering $\mathrm{A}+\mathrm{B} \to 1+2$ se definen las variables de Mandelstam

   $$s=(p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}})^2=(p_1+p_2)^2\,,\quad t=(p_{\mathrm{A}}-p_1)^2=(p_2-p_{\mathrm{B}})^2\,,\quad u=(p_{\mathrm{A}}-p_2)^2=(p_1-p_{\mathrm{B}})^2\,.$$

   La masa de las partículas A, B, 1 y 2 es respectivamente m_{A}, m_{B}, m_1 y m_2.

   a) Demostrar que
   $$s+t+u=m_{\mathrm{A}}^2+m_{\mathrm{B}}^2+m_1^2+m_2^2\,.$$

   b) Para el caso de partículas idénticas ($m_{\mathrm{A}}=m_{\mathrm{B}}=m_1=m_2=m$), demostrar que en el sistema de referencia del centro de masa (CM) se cumple que

   $$s=E_{\mathrm{CM}}^2=4(|\vec{p}\,|^2+m^2),\qquad t=-2|\vec{p}\,|^2(1-\cos\theta),\qquad u=-2|\vec{p}\,|^2(1+\cos\theta)\,,$$

   donde $|\vec{p}\,|=|\vec{p}_{\mathrm{A}}|=|\vec{p}_{\mathrm{B}}|=|\vec{p}_1|=|\vec{p}_2|$ y $\theta=\angle(\vec{p}_{\mathrm{A}},\vec{p}_1)$ es el ángulo de scattering.

2. Determinar el grado de divergencia superficial D de diagramas de Feynman en una teoría con Lagrangiano
   $$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}\phi^2+\frac{\lambda_n}{n!}\phi^n\,,$$
   en cuatro dimensiones, en los casos $n=3$ y $n=5$. Determinar la dimensión de masa de la constante de acoplo λ_n en ambos casos.

3. Considere una teoría de dos campos escalares reales ϕ y σ con Lagrangiano

   $$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma-\frac{1}{2}M^2\sigma^2-\frac{g}{2}\sigma\phi^2\,.$$

   y procesos $\mathrm{A}+\mathrm{B}\to 1+2$, con 4-momentos p_{A}, p_{B}, p_1 y p_2 dados

   a) Para el proceso $\sigma+\sigma\to\phi+\phi$, determine la sección eficaz diferencial a orden mas bajo en la constante de acoplo g.

   b) Para el proceso $\sigma+\sigma\to\sigma+\sigma$, determine los diagramas de Feynman a orden mas bajo en g. Determine las amplitudes correspondientes (sin evaluar integrales).