

Resumen 2

Cuantización del campo escalar real con interacciones

Planteamiento ✓

Expansión perturbativa ✓

Fórmula de Dyson ✓

Funciones de correlación

Teorema de Wick

Diagramas y reglas de Feynman

} repasaremos estos temas usando las notas del Prof. N. Bernal

Módulo de Teoría: Teoría Cuántica de Campos

Nicolás BERNAL
Universidad Antonio Nariño

08/02/2022



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea





Funciones de correlación

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\vec{x}) e^{-iHt}$
campo en cuadro de Heisenberg

$|\Omega\rangle$: estado de vacío en presencia de H_I
estado de mínima energía de $H = H_0 + H_I$

$|0\rangle$: estado de mínima energía de H_0 , $H_0|0\rangle = 0$, $a_{\vec{p}}|0\rangle = 0$, $\forall \vec{p}$

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}$$

Se calcula con $|0\rangle$ y $\phi_I(x)$! :-)



Funciones de correlación

Demostración:

* Primero se busca relacionar $|\Omega\rangle$ y $|0\rangle$

$$U(0, -t)|0\rangle = e^{-iHt} e^{iH_0 t}|0\rangle = e^{-iHt} \left[1 + iH_0 t + \frac{1}{2} (iH_0 t)^2 + \dots \right] |0\rangle = e^{-iHt}|0\rangle$$

base de autoestados de $H \quad \rightarrow \quad \sum_n |n\rangle\langle n| = 1$

$$U(0, -t)|0\rangle = \sum_n e^{-iHt} |n\rangle\langle n|0\rangle = \sum_n e^{-iE_n t} |n\rangle\langle n|0\rangle = |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n t} |n\rangle\langle n|0\rangle$$

escogiendo $H|\Omega\rangle = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \sum_{n \neq 0} e^{-iE_n t} |n\rangle\langle n|0\rangle = 0$$

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\langle\Omega|0\rangle} \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} U(0, -t)|0\rangle$$

$$\langle\Omega| = \frac{1}{\langle 0|\Omega\rangle} \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0|U(t, 0)$$

fijando $\langle\Omega|\Omega\rangle = 1 \quad \rightarrow \quad |\langle 0|\Omega\rangle|^2 = \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0|U(t, -t)|0\rangle$



Funciones de correlación

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle = \frac{1}{|\langle 0 | \Omega \rangle|^2} \lim_{t \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \langle 0 | U(t, 0) T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} U(0, -t) | 0 \rangle$$

escogiendo $t_1 > t_2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|\langle 0 | \Omega \rangle|^2} \lim_{t \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \langle 0 | U(t, 0) U^\dagger(t_1, 0) \phi_I(x_1) U(t_1, 0) U^\dagger(t_2, 0) \phi_I(x_2) U(t_2, 0) U(0, -t) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{|\langle 0 | \Omega \rangle|^2} \lim_{t \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \langle 0 | U(t, t_1) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \phi_I(x_2) U(t_2, -t) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{|\langle 0 | \Omega \rangle|^2} \lim_{t \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \langle 0 | T \{ U(t, t_1) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \phi_I(x_2) U(t_2, -t) \} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{|\langle 0 | \Omega \rangle|^2} \lim_{t \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) U(t, -t) \} | 0 \rangle \\ &= \lim_{t' \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle} \end{aligned}$$

Se puede hacer un tratamiento equivalente para $t_1 < t_2$

$$\phi(x) = U^\dagger(t, 0) \phi_I(x) U(t, 0)$$

$$U(t, t') = T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^t dt'' H_I(t'') \right] \right\}$$

Expansión perturbativa de funciones de correlación

En el numerador de $\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$ aparece

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle$$

$$\text{En } \lambda \phi^4, \quad H_I(t) = \int d^3 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t, \vec{z}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) = \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z)$$

$$\exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \right] = 1 - i \underbrace{\int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z)}_{\text{orden } \lambda} + \frac{(-i)^2}{2} \underbrace{\int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z) \int d^4 w \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(w)}_{\text{orden } \lambda^2} + \cdots$$

Es necesario calcular

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \phi_I^4(z) \phi_I^4(w) \cdots \} | 0 \rangle$$

¿ Cómo ? Aplicando el teorema de Wick que lleva a los diagramas y reglas de Feynman



Propagador de Feynman

$$\begin{aligned} D_F(x_1 - x_2) &= D_F(x_2 - x_1) = \langle 0|T \{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \} |0\rangle \\ &= \Theta(x_1^0 - x_2^0) D(x_1 - x_2) + \Theta(x_2^0 - x_1^0) D(x_2 - x_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \end{aligned}$$

Hace falta calcular

$$\langle 0|T \{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \} |0\rangle$$

$$\phi_I(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-i x_\mu p^\mu} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{i x_\mu p^\mu} \right) = \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a_{\vec{p}} e^{-i x_\mu p^\mu}}{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}}}_{\phi_I^+(x)} + \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a_{\vec{p}}^\dagger e^{i x_\mu p^\mu}}{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}}}_{\phi_I^-(x)}$$

$$\phi_I^+ |0\rangle = 0, \quad \langle 0| \phi_I^- = 0$$

$$[\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{2 E_{\vec{p}}} = D(x - y)$$



Propagador de Feynman

$$\begin{aligned}
D_F(x_1 - x_2) &= D_F(x_2 - x_1) = \langle 0|T \{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \} |0\rangle \\
&= \Theta(x_1^0 - x_2^0) D(x_1 - x_2) + \Theta(x_2^0 - x_1^0) D(x_2 - x_1) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}
\end{aligned}$$

* Notación $\phi_1 \equiv \phi_I(x_1)$

* Definición $\overbrace{\phi_1\phi_2} \equiv D_F(x_1 - x_2)$

y contracciones

$$\overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6} = D_F(x_1 - x_2)\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6$$

$$\overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6} = D_F(x_1 - x_4)D_F(x_3 - x_5)\phi_2\phi_6$$

$$\overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6} = D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4)D_F(x_5 - x_6)$$



Definición: ordenamiento normal

$:\phi_1\phi_2\cdots\phi_n:$ = el producto con todos los ϕ_i^+ a la derecha

Ejemplo $:\phi_1\phi_2: = :(\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-): = \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^- + \phi_2^-\phi_1^+$

Tarea $\rightarrow : \phi_1\phi_2\phi_3 : = ? \quad :-)$

$$\langle 0 | : \phi_1\phi_2\cdots\phi_n : | 0 \rangle = 0$$

Teorema de Wick

$$T \{ \phi_1\phi_2\cdots\phi_n \} = : \phi_1\phi_2\cdots\phi_n : + \text{ : todas las contracciones posibles : }$$



Teorema de Wick

Teorema de Wick $T\{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\} = :\phi_1\phi_2\cdots\phi_n: +$: todas las contracciones posibles :

$$\begin{aligned}
T\{\phi_1\phi_2\cdots\phi_n\} &= :\phi_1\phi_2\cdots\phi_n: + \overbrace{(\phi_1\phi_2:\phi_3\cdots\phi_n: + \cdots)} \\
&+ \overbrace{(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4:\phi_5\cdots\phi_n: + \cdots)} \\
&+ \overbrace{(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6:\phi_7\cdots\phi_n: + \cdots)} \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

→ es más fácil de lo que parece :-)

$$T\{\phi_1\} = :\phi_1: = \phi_1 \quad \rightarrow \quad \langle 0|T\{\phi_1\}|0\rangle = 0$$

$$T\{\phi_1\phi_2\} = :\phi_1\phi_2: + \overbrace{\phi_1\phi_2} = :\phi_1\phi_2: + D_F(x_1-x_2) \quad \rightarrow \quad \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\}|0\rangle = D_F(x_1-x_2)$$

$$\begin{aligned}
T\{\phi_1\phi_2\phi_3\} &= :\phi_1\phi_2\phi_3: + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3} = :\phi_1\phi_2\phi_3: + D_F(x_1-x_2)\phi_3 + D_F(x_1-x_3)\phi_2 + D_F(x_2-x_3)\phi_1 \\
&\rightarrow \quad \langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\}|0\rangle = 0
\end{aligned}$$

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3)$$



Teorema de Wick

Demostración: se prueba para $n=2$, y luego por inducción

$n=2$, considerando $x_1^0 > x_2^0$

$$T\{\phi_1\phi_2\} = (\phi_1^+ + \phi_1^-)(\phi_2^+ + \phi_2^-) = \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^- + \phi_1^+\phi_2^-$$

$$\phi_1^+\phi_2^- = [\phi_1^+, \phi_2^-] + \phi_2^-\phi_1^+$$

$$T\{\phi_1\phi_2\} = (\phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^- + \phi_2^-\phi_1^+) + [\phi_1^+, \phi_2^-] = : \phi_1\phi_2 : + D(x_1 - x_2)$$

y lo mismo para $x_1^0 < x_2^0$...

Entonces

$$T\{\phi_1\phi_2\} = [: \phi_1\phi_2 : + D(x_1 - x_2)] \Theta(x_1^0 - x_2^0) + [: \phi_1\phi_2 : + D(x_2 - x_1)] \Theta(x_2^0 - x_1^0)$$

$$=: \phi_1\phi_2 : + D_F(x_1 - x_2) =: \phi_1\phi_2 : + \overline{\phi_1\phi_2}$$

→ tarea: comprobar el teorema para $T\{\phi_1\phi_2\phi_3\}$ usando inducción :-)

ayuda: suficiente considerar $x_1^0 > x_2^0 > x_3^0$



Diagramas de Feynman

Wick \rightarrow $\langle 0|T\{\phi_1 \cdots \phi_n\}|0\rangle =$ suma de productos de propagadores D_F

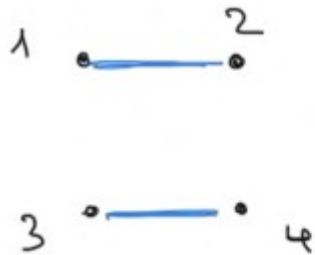
\rightarrow Se puede representar gráficamente
cada punto x_i se representa por un punto
cada $D_F(x_i - x_j)$ por una línea entre x_i y x_j

Ejemplos

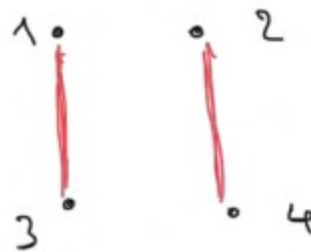
$$\langle 0|T\{\phi_1 \phi_2\}|0\rangle = D_F(x_1 - x_2)$$



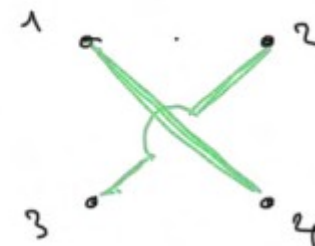
$$\langle 0|T\{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4\}|0\rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)$$



+



+



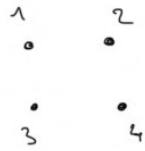


Diagramas de Feynman

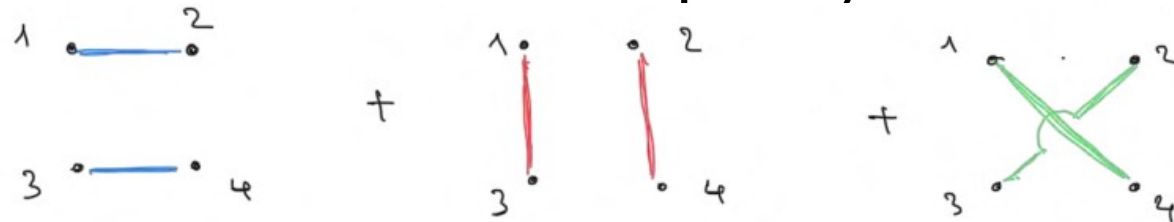
En la práctica se hace al revés: i.e. diagrama \rightarrow resultado

Ejemplo: $\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle$

1. Se dibujan los puntos



2. Se ven las diferentes maneras distintas de unirlos a pares, sin dejar ninguno suelto



3. Se suman los diagramas asignando los propagadores

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\}|0\rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3)$$

\rightarrow interpretación: partículas se crean en unos puntos, se propagan y luego se destruyen en otros puntos



Diagramas de Feynman

Y ahora con interacciones

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{t' \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-i \int_{t'}^{t'} dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle}$$

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int dt H_I(t) \right] \right\} | 0 \rangle, \quad H_I = \int d^3 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z)$$

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \left[1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^3 z \phi_I(z) \phi_I(z) \phi_I(z) \phi_I(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^3 z \phi_I^4(z) \int d^3 w \phi_I^4(w) \right] \right\} | 0 \rangle$$

Ejemplo, $n=2$ a orden λ $\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^3 z \phi_I(z) \phi_I(z) \phi_I(z) \phi_I(z) \right\} | 0 \rangle$

Piezas:



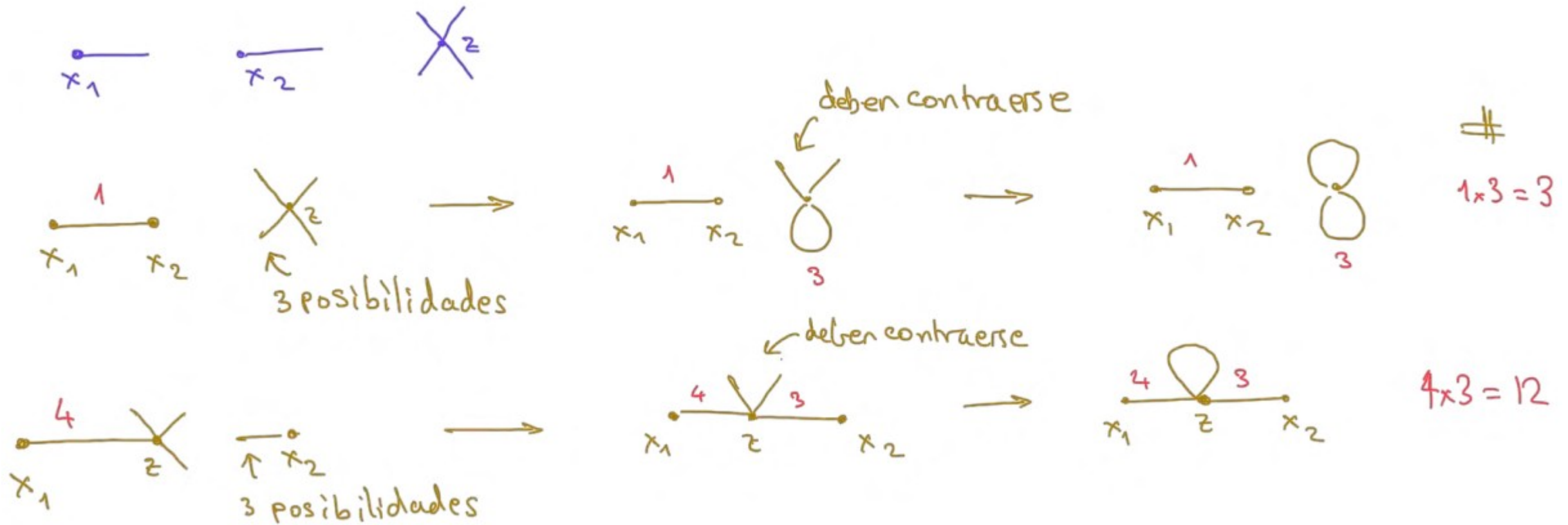
* ¿Cuántas contracciones completas se pueden armar? $\rightarrow 5 \times 3 = 15$

Hay 6 patas. Una de ellas se puede contraer con 5. De las 4 restantes, una de ellas se puede contraer con 3. Quedan 2 que se contraen entre si.

* ¿De cuántas maneras? $\rightarrow 2$



Diagramas de Feynman



$$\langle 0|T \left\{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^3z \phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z) \right\} |0\rangle$$

$$= 3 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) D_F(x_1 - x_2) \int d^4z D_F(z - z)D_F(z - z) + 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x_1 - z)D_F(z - z)D_F(x_2 - z)$$





Reglas de Feynman

Para cada tipo de diagrama posible:

1. por cada propagador

$$\text{---} \begin{matrix} \bullet & \text{---} & \bullet \\ x & & y \end{matrix} = D_F(x-y)$$

2. por cada vértice

$$\begin{matrix} & \diagup & \\ & \bullet & \\ & \diagdown & \\ z & & \end{matrix} = (-i\lambda) \int d^4z$$

3. por cada punto externo

$$\text{---} \begin{matrix} \bullet \\ x \end{matrix} = 1$$

4. se divide por el factor de simetría

(i.e. número de formas de intercambiar componentes sin alterar el diagrama)

Ejemplo:

$$\begin{matrix} & \text{---} & \\ & \bullet & \\ & \text{---} & \\ x_1 & z & x_2 \end{matrix} = \frac{(-i\lambda)}{2} \int d^4z D_F(x_1 - z) D_F(z - z) D_F(x_2 - z)$$

$$\text{factor de simetría} = 2, \text{ notar } \frac{-i\lambda}{2} = 12 \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)$$



Reglas de Feynman

Incluso para $n=2$, los términos de orden λ^2 y λ^3 son bastante complicados

Ejemplos:

* $n=2$, términos de orden λ^2

9 x 7 x 5 x 3 posibles contracciones!

7 tipos de diagramas ← tarea :-)

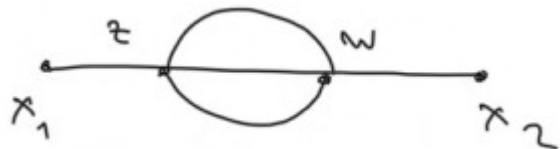
* $n=2$, términos de orden λ^3

13 x 11 x 9 x 7 x 5 x 3 = 135135 contracciones

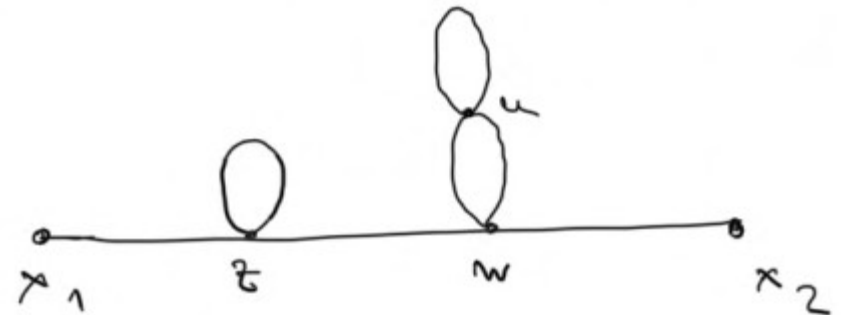
muchos diagramas, e.g.

ver Peskin & Schroeder

→ Peskin & Schroeder
para factores de simetría



$$S = 3!$$





Interpretación:

- * El factor de vértice $-i\lambda$ es la amplitud para la emisión o la absorción de partículas en el vértice.
- * La integral es la suma sobre todos los puntos donde puede ocurrir la emisión / absorción
- * El propagador $D_F(x-y)$ es la amplitud para ir de x a y
- * En cada diagrama se multiplican las amplitudes (propagadores y vértices)

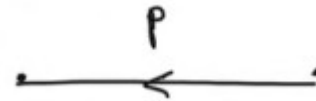


Reglas de Feynman en espacio de momentos

* Propagadores

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)}$$

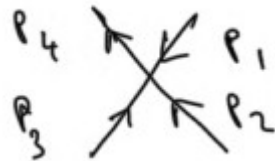
Se asigna momento a cada propagador, indicando la dirección con una flecha.



El orden no importa, porque $D_F(x - y) = D_F(y - x)$

* Vértices

Cuando 4 líneas se encuentran en un vértice hay conservación del momento (cuadrimomento, o sea energía y momento lineal)



$$\Leftrightarrow \int d^4 z e^{-ip_1 z} e^{-ip_2 z} e^{-ip_3 z} e^{+ip_4 z} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - p_4)$$

* Puntos externos




ahora llevan $e^{-ix \cdot p}$



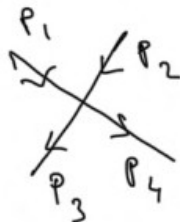
Reglas de Feynman en espacio de momentos

Reglas

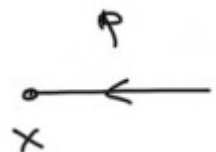
1. por cada propagador


$$= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

2. por cada vértice


$$= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

3. por cada punto externo


$$= e^{-i x \cdot p}$$

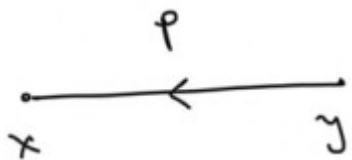
4. se integra sobre todos los momentos $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

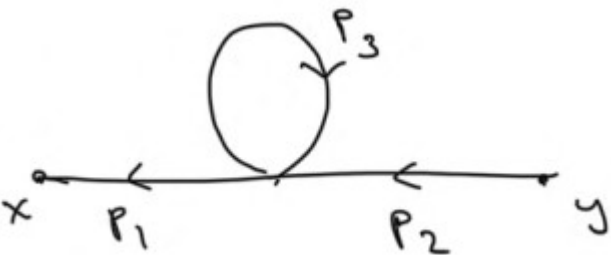
5. se divide por el factor de simetría



Reglas de Feynman en espacio de momentos

Ejemplos:

1.  $= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ix \cdot p} e^{iy \cdot p} = D_F(x - y)$

2. 
$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ix \cdot p_1}}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{ie^{iy \cdot p_2}}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon} (-i\lambda) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + p_3 - p_3 - p_1)$$
$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2 \left(\frac{-i\lambda}{2} \right) \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \frac{i}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon}$$



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.