Módulo de Teoría
23-02-2023

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Recap

* $\phi(t,\vec{x}) = e^{iHt}\phi(\vec{x})e^{-iHt} = U^\dagger(t,0)\phi_I(t,\vec{x})U(t,0)\,, \qquad H = H_0 + H_I$

$$\phi_I(t,\vec{x}) = e^{iH_0t}\phi(\vec{x})e^{-iH_0t} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\left(a_{\vec{p}}\,e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$

* $U(t,t') = e^{iH_0t}\,e^{-iH(t-t')}\,e^{-iH_0t'} = T\left\{\exp\left[-i\int_{t'}^{t} dt''\,H_I(t'')\right]\right\}$

* funciones de correlación: $G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle$

$|\Omega\rangle$: estado de mínima energía de $H = H_0 + H_I$

$$G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{t'\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\left\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)\exp\left[-i\int_{-t'}^{t'} dt\,H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|T\left\{\exp\left[-i\int_{-t'}^{t'} dt\,H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}$$

Expansión perturbativa de funciones de correlación

En el numerador de $\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle$ aparece

$$\langle 0|T\left\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,H_I(t)\right]\right\}|0\rangle$$

En $\lambda\phi^4$, $\quad H_I(t)=\int d^3z\,\frac{\lambda}{4!}\,\phi_I^4(t,\vec{z}) \;\;\Rightarrow\;\; \int_{-\infty}^{\infty}dt\,H_I(t)=\int d^4z\,\frac{\lambda}{4!}\,\phi_I^4(z)$

$$\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty}dt\,H_I(t)\right]=1-i\underbrace{\int d^4z\,\frac{\lambda}{4!}\,\phi_I^4(z)}_{\text{orden }\lambda}+\frac{(-i)^2}{2}\underbrace{\int d^4z\,\frac{\lambda}{4!}\,\phi_I^4(z)\int d^4w\,\frac{\lambda}{4!}\,\phi_I^4(w)}_{\text{orden }\lambda^2}+\cdots$$

Es necesario calcular

$$\langle 0|T\left\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)\phi_I^4(z)\phi_I^4(w)\cdots\right\}|0\rangle$$

Se hace aplicando teorema de Wick $\longrightarrow$ diagramas y reglas de Feynman

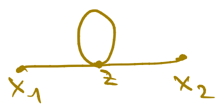
Propagador de Feynman

$$D_F(x-y) = \langle 0 \big| T\big\{\phi_I(x)\phi_I(y)\big\}\big| 0\rangle$$

$$\boxed{D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}\, e^{-ip\cdot(x-y)}}$$

Ejemplo, $n = 2$ a orden λ

$$\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2) \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z \phi_I^4(z) \right\} | 0 \rangle \; =$$



$$= \left(\frac{-i\lambda}{2} \right) \int d^4z \, D_F(x_1 - z) \, D_F(z - z) \, D_F(x_2 - z)$$

$$= \left(\frac{-i\lambda}{8} \right) \int d^4z \, D_F(x_1 - x_2) \, D_F(z - z) \, D_F(z - z)$$

notar que el integrando no depende de z $\Rightarrow \int d^4z \to \infty$

$\int d^4z \to \infty$ corresponde a $\delta^4(0)$ en espacio de momentos

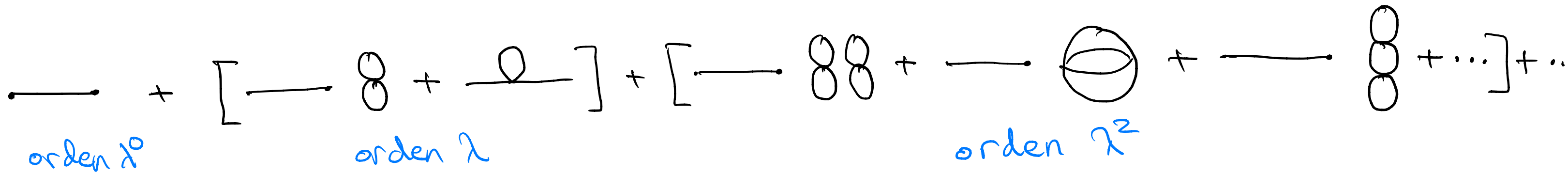
$$\sim \; (2\pi)^4 \, \delta^4(p_1 + p_2 - p_1 - p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(0) = \int d^4z$$

ocurre siempre que en en el diagrama hay una *burbuja de vacío*

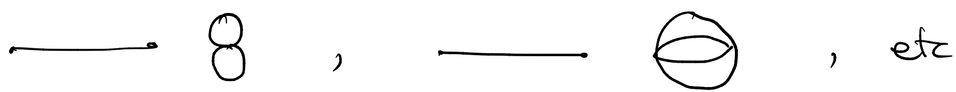
(subdiagrama desconectado de todos los puntos externos)

Funciones de correlación y diagramas conexos

$$\langle 0|T\left\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\exp\left[\frac{-i\lambda}{4!}\int d^4z\,\phi_I^4(z)\right]\right\}|0\rangle \;=$$



Incluye diagramas disconexos (con diagramas desconectados de x_1 y x_2), e.g.



Hay burbujas de vacío proporcionales a $(2\pi)^4\delta^4(0) = \int d^4z$

Estas burbujas también aparecen en el denominador de

$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|\Omega\rangle = \lim_{t'\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\left\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\exp\left[-i\int_{-t'}^{t'}dt\,H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|T\left\{\exp\left[-i\int_{-t'}^{t'}dt\,H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}$$

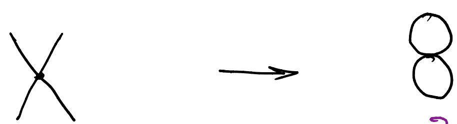
En $\lambda\phi^4$, $\quad H_I(t) = \int d^3z \, \frac{\lambda}{4!} \, \phi_I^4(t, \vec{z}) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \, H_I(t) = \int d^4z \, \frac{\lambda}{4!} \, \phi_I^4(z)$

$$\langle 0| T \left\{ \exp\left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \, H_I(t) \right] \right\} |0\rangle$$

$$= \langle 0| \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \, \phi_I^4(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z \int d^4w \, T\left\{ \phi_I^4(z) \phi_I^4(w) \right\} + \cdots \right] |0\rangle$$

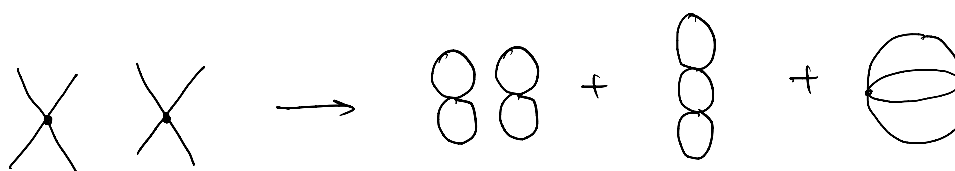
se calcula orden por orden usando el teorema de Wick

λ : un vértice



3

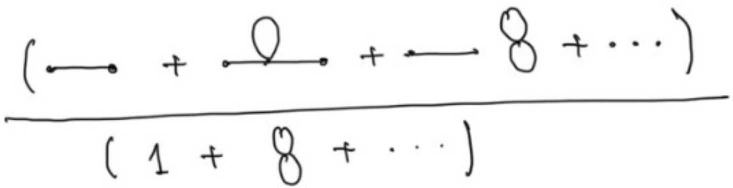
λ^2 : dos vértices



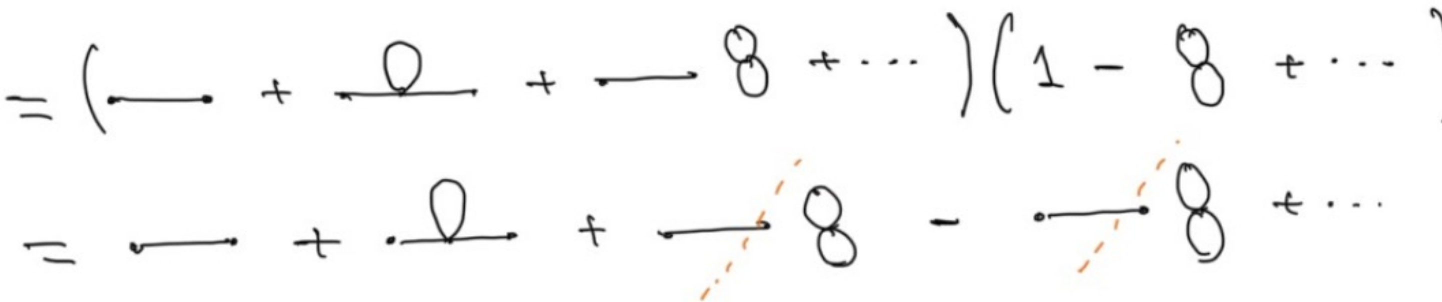
9 $\qquad$ 72 $\qquad$ 24

En $\quad \dfrac{\langle 0|\, T\left\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\, \exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0|\, T\left\{\exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, H_I(t)\right]\right\}|0\rangle}$ $\quad$ se cancelan las burbujas

“demostración”:

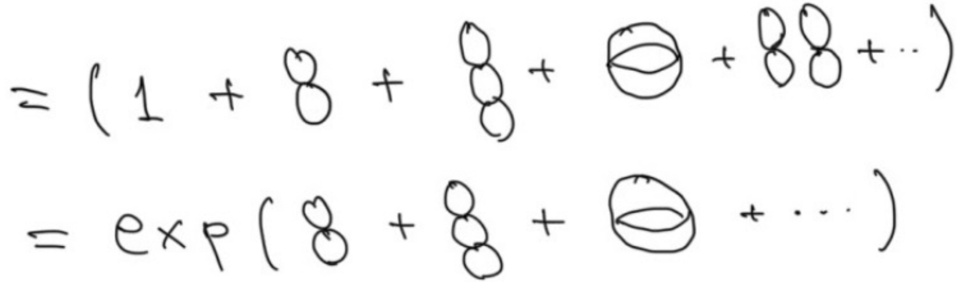


$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + \cdots\,, \qquad \text{si } r \ll 1$$

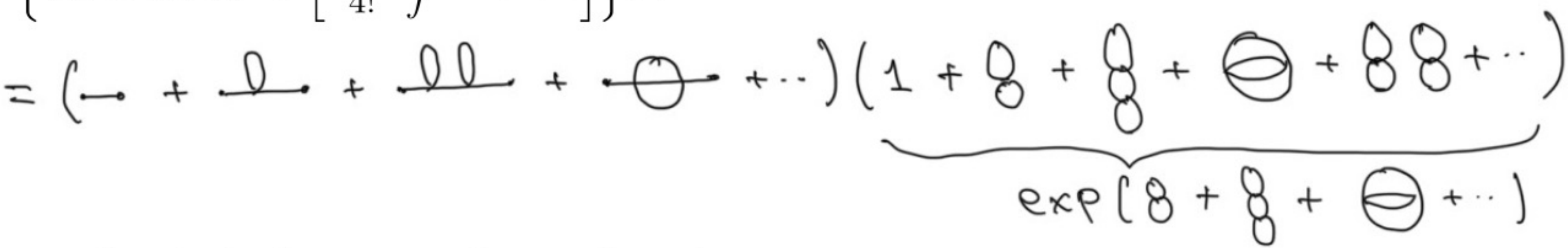


Se demuestra:

$$\langle 0|T\left\{\exp\left[\frac{-i\,\lambda}{4!}\int d^4z\phi^4(z)\right]\right\}|0\rangle$$



$$\langle 0|T\left\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\exp\left[\frac{-i\,\lambda}{4!}\int d^4z\phi^4(z)\right]\right\}|0\rangle$$



→ exp[burbujas] se cancela en el cociente

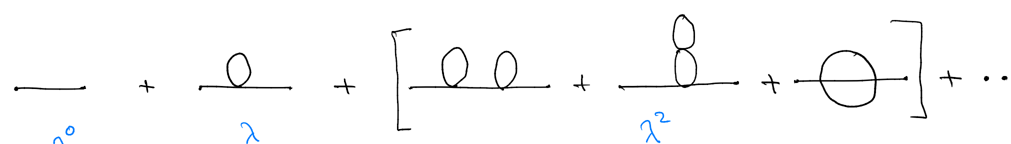
En resumen:

* funciones de correlación: $\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle = G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n)$

$$G^{(n)}(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{t'\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\Big\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)\exp\Big[-i\int_{-t'}^{t'}dt\,H_I(t)\Big]\Big\}|0\rangle}{\langle 0|T\Big\{\exp\Big[-i\int_{-t'}^{t'}dt\,H_I(t)\Big]\Big\}|0\rangle}$$

* $\boxed{\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\}|\Omega\rangle = \text{suma de todos los diagramas conectados con } n \text{ puntos}}$

* E.g. $\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|\Omega\rangle =$



tarea 3

http://laconga.redclara.net

contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA **physics**

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.