

Módulo de Teoría

27-02-2023

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

UAN
UNIVERSIDAD NACIONAL
DE LOS ANGELES



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
INGENIERÍA

UNMSM



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR

Université
de Paris

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN



CLARA

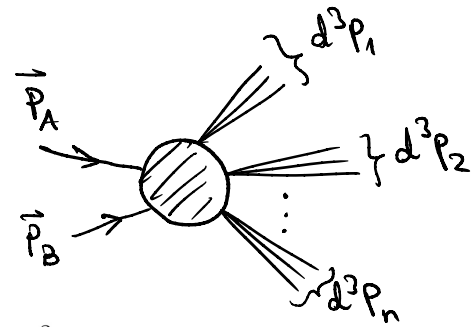
DBACCESS

frontier x
ANALYTICS

Recap

Scattering

Sección eficaz diferencial



$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2E_A)(2E_B)|\vec{v}_A - \vec{v}_B|} d\Pi_{\text{LIPS}}$$

$$d\Pi_{\text{LIPS}} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum_n p_n\right) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3(2E_1)} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3(2E_2)} \cdots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3(2E_n)}$$

e.g. $A+B \rightarrow 1+2$

$m_A = m_B = m_1 = m_2$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2}$$

Amplitudes

$$i\mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_A + p_B - \sum p_f\right)$$

= suma de *todos* los diagramas de Feynman completamente *conectados* y *amputados*

Reglas de Feynman para calcular \mathcal{M} en teoría $\lambda\phi^4$

1. Por cada propagador interno \xrightarrow{p} = $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

2. Por cada vértice $\begin{array}{c} p_1 \swarrow \nearrow p_2 \\ p_3 \nearrow \swarrow p_4 \end{array}$ = $(-i\lambda)$, se impone conservación del 4-momento

3. Por cada pata externa $\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \end{array}$ = 1

4. Se integra sobre el momento (indeterminado!) de cada bucle $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

5. Se divide por el factor de simetría

Amplitudes de Scattering
en $A+B \rightarrow 1+2$

Teoria $\lambda\phi^4$

Posibles diagramas

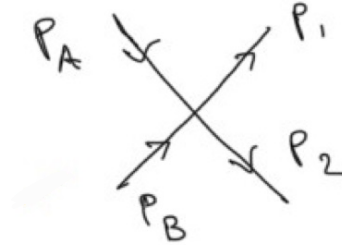
$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \text{---} \\ & \text{---} \\ & + \text{---} \circ \text{---} \\ & + \text{---} \circ \text{---} \\ & + \text{---} \times \text{---} + \text{---} \circ \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \\ & + \dots \end{aligned}$$

The diagrammatic expansion shows the following terms:

- Two parallel horizontal lines.
- A term with a circle containing an 'X' on top of two parallel horizontal lines.
- A term with a circle containing a figure-eight on top of two parallel horizontal lines.
- A term with a circle containing an 'X' on top of a single horizontal line.
- A term with two circles on top of a single horizontal line.
- A term with a circle on top of a single horizontal line.
- A term with a circle on top of a circle on top of a single horizontal line.
- A term with a circle on top of a circle on top of a circle on top of a single horizontal line.

* Orden λ^1 :

$$i \mathcal{M}_1 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) =$$



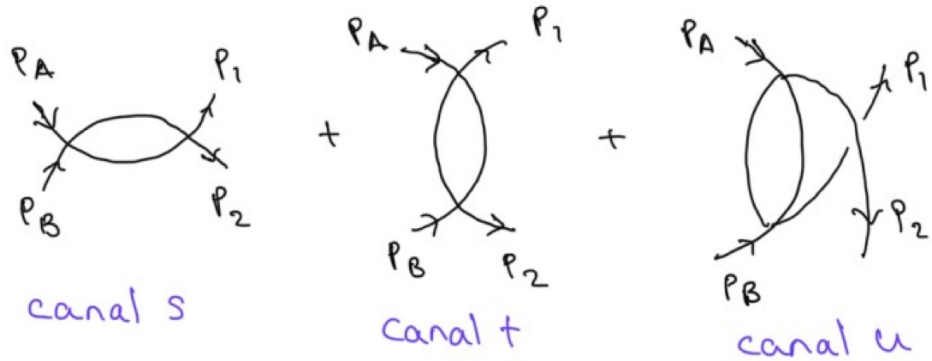
$$= -i \lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$$

$$\rightarrow \mathcal{M}_1 = -\lambda$$

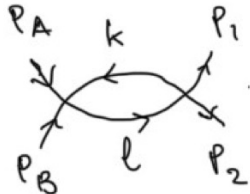
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{CM}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2}$$

* Orden λ^2 :

$$i \mathcal{M}_2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) =$$



Canal s:

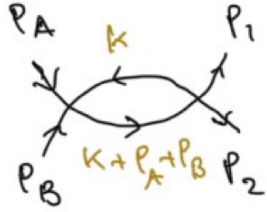


$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{l^2 - m^2 + i\epsilon} \left[-i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B + k - l) \right] \left[-i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(l - k - p_1 - p_2) \right]$$

$$= \left[\frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_A + p_B + k)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)}_{\text{consevación del momento total}}$$

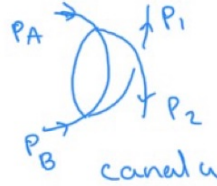
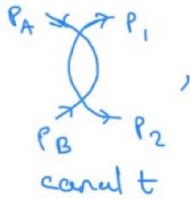
Queda una sola integral en k . Un solo bucle \rightarrow 1 solo momento libre

En la práctica:



$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p_A + p_B + k)^2 - m^2 + i\epsilon} = i\mathcal{M}_2(s)$$

Tarea: comprobar que
Hallar $\mathcal{M}_2(t)$ y $\mathcal{M}_2(u)$



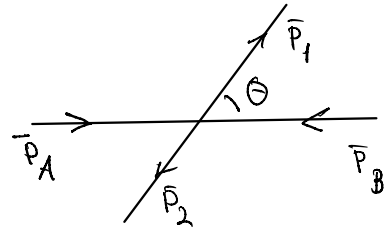
son similares

s, t, u : variables de Mandelstam

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_A - p_1)^2 = (p_2 - p_B)^2, \quad u = (p_A - p_2)^2 = (p_1 - p_B)^2$$

Tarea 4: $s + t + u = 4m^2 = \sum_{i=1}^4 m_i^2$

en el sistema CM
 $S = E_{CM}^2$



En conclusión:

$$i \mathcal{M}_2 = i \mathcal{M}_2(s) + i \mathcal{M}_2(t) + i \mathcal{M}_2(u)$$

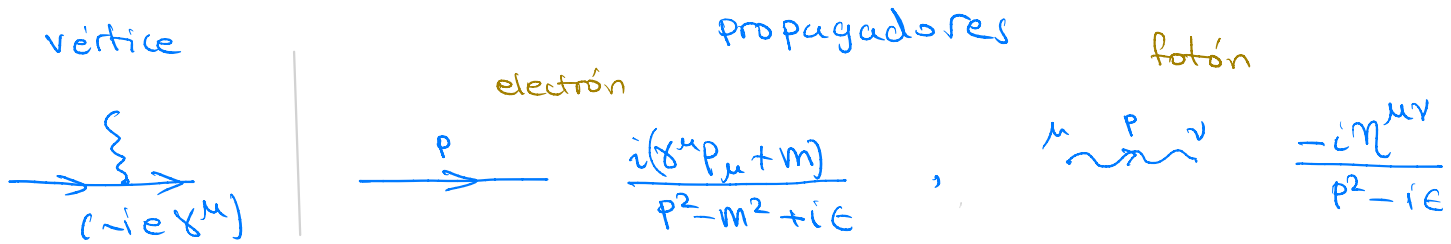
$$i \mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad p \equiv p_A + p_B$$

La integral es divergente!

Para $k^2 \gg m^2, p^2$, $\mathcal{M} \sim \int \frac{d^4 k}{k^4}$ tiene divergencia logarítmica

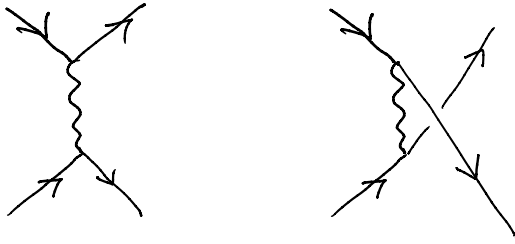
¿Qué hacer? Renormalizar

Se generaliza a otras teorías. Por ejemplo, en QED



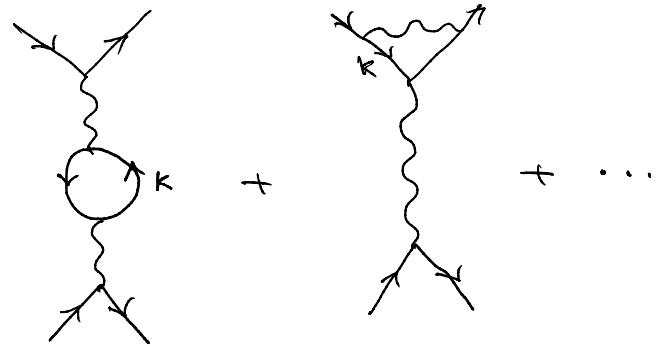
choque elástico $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$

diagramas a nivel árbol (tree level)



nada que integrar

diagramas a 1-lazo (1-loop)

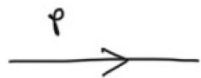


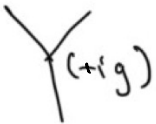
queda $\int d^4k \dots$ divergente

Teoría $g\phi^3$

“Toy model” $g\phi^3$

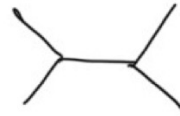
$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2}_{\mathcal{L}_0 \text{ de Klein Gordon}} + \frac{1}{3!}g\phi^3$$

→ propagador  = $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

→ vértice $\mathcal{L}_I = \frac{1}{3!}g\phi^3 \rightarrow$ 

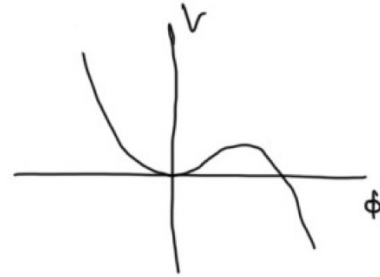
* Choque elástico $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$

→ ahora hay diagramas a nivel árbol

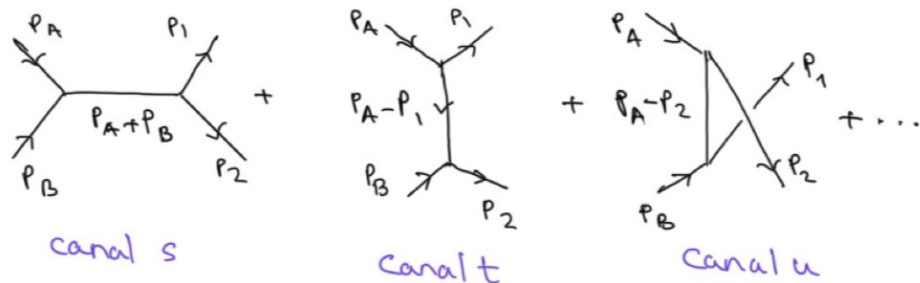


a orden g^2

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{6}g\phi^3$$



$$i \mathcal{M} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2) =$$



Ya se ha impuesto la conservación del 4-momento en un vértice

en el otro aparece $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_1 - p_2)$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2(s) + \mathcal{M}_2(t) + \mathcal{M}_2(u)$$

s, t, u : variables de Mandelstam

$$i \mathcal{M}_2(s) = (+ig) \frac{i}{(p_A + p_B)^2 - m^2 + i\epsilon} (+ig) = \frac{-ig^2}{s - m^2 + i\epsilon}, \quad s = (p_A + p_B)^2$$

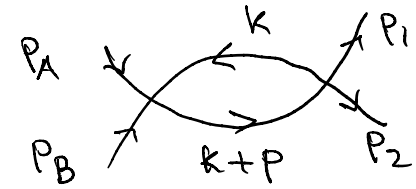
$$i \mathcal{M}_2(t) = \frac{-ig^2}{t - m^2 + i\epsilon}, \quad t = (p_A - p_1)^2$$

$$i \mathcal{M}_2(u) = \frac{-ig^2}{u - m^2 + i\epsilon}, \quad u = (p_A - p_2)^2$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{CM}} = \frac{g^4}{64\pi^2 E_{\text{CM}}^2} \left[\frac{1}{s - m^2} + \frac{1}{t - m^2} + \frac{1}{u - m^2} \right]^2 + \mathcal{O}(g^8)$$

Divergencias en
diagramas de Feynman

$\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ en teoría $\lambda\phi^4$ a orden λ^2 incluye



$$\propto \int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$P = p_A + p_B = p_1 + p_2$$

$$\rightarrow \int_0^\infty dk k^3 \frac{1}{k^2} \frac{1}{k^2} = \int_0^\infty dk \frac{1}{k}$$

la integral diverge cuando $k \rightarrow \infty$
tiene divergencia ultravioleta (UV)
la divergencia es logarítmica



En general

$$\mathcal{I}_F \sim \underbrace{\int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \cdots \int d^4 k_L}_{1 \text{ integral por bucle}} \underbrace{\frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots \frac{1}{k_L^2 - m^2 + i\epsilon}}_{1 \text{ propagador por cada línea interna}}$$

$L = \#$ de bucles

$I = \#$ de líneas internas



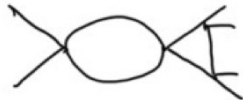
bucle = lazo = loop

$$\text{integrando} \sim \frac{(\text{momento})^{4L}}{(\text{momento})^{2I}} \sim (\text{momento})^{4L-2I}$$

Grado de divergencia *superficial*: $D = 4L - 2I$

* $D \geq 0$: es divergente

* $D < 0$: *puede* ser divergente



$$D = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = -8, \text{ pero incluye}$$



divergente...

de bucles L y # de líneas internas I se relacionan con

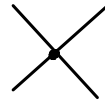
$E = \#$ líneas externas y $V = \#$ vértices

$$L = I - (V - 1)$$

L cuenta el número de momentos independientes k . En principio hay tantos k como líneas internas, pero en cada vértice hay una delta de conservación del 4-momento. Una delta es global. Se eliminan entonces $V - 1$.

En $\lambda\phi^4$

$$4V = E + 2I$$



Los vértices de 4 puntas $\rightarrow 4V$

Líneas internas cuentan la mitad, comienzan y termina en un vértice!

$$D = 4L - 2I = 4(I - V + 1) - 2I = 2I - 4V + 4 = 2I - E - 2I + 4$$

$$\Rightarrow D = 4 - E$$

$$D = 4 - E$$

el grado de divergencia superficial no depende del número de vértices

OBS

- * diagramas con E impar se cancelan por simetría $\phi \rightarrow -\phi$
- * $E=0, D=4$ es la divergencia en la energía de vacío, no observable
- * quedan 2 tipos con $D \geq 0$ (divergentes)

$E=2, D=2$

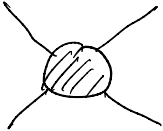


e.g.



divergencia cuadrática

$E=4, D=0$



e.g.



divergencia logarítmica

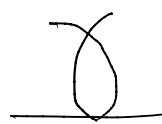
* $E > 4 \Rightarrow D = 4 - E < 0$ pero el diagrama puede ser divergente

e.g.



$$E=6, D=4-6=-2$$

pero contiene



$$E'=4 \\ D'=0$$

subdivergencia logarítmica

* $D = 4 - E$ independiente de V porque λ es adimensional

tarea 4, $L_{int} = -\frac{\lambda_5}{5!} \phi^5$, $[\lambda_5] = -1$ dimensión (masa)⁻¹

D aumenta con V
 \exists infinitos diagramas divergentes

Regularización de integrales de Feynman

Las integrales se regularizan, i.e. se hacen finitas, siguiendo un procedimiento sistemático tal como

* **usar cut-off Λ** *Λ tiene unidades de energía*

en las integrales se restringe $|k| < \Lambda$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

* **hacer regularización dimensional**

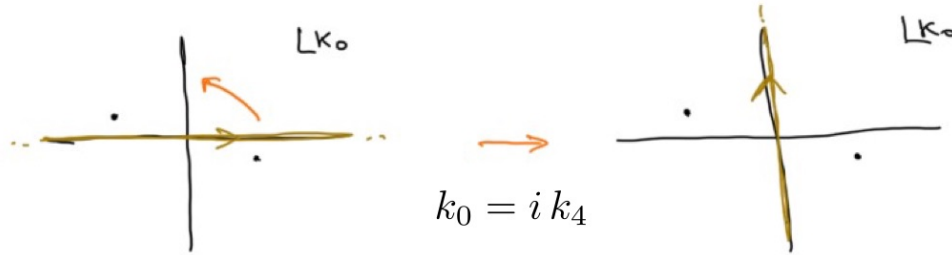
se considera la dimensión del espacio como un parámetro d
→ para d suficientemente pequeño las integrales convergen

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \quad \text{luego se expande en } \epsilon = 4 - d$$

Paso previo: Rotación de Wick

(de Minkowski a espacio euclídeo)

Ejemplo
$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2}$$



$$k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2$$

$$k^2 = -k_4^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = -k_E^2$$

$$\rightarrow \mathcal{I} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}$$

ventaja: pasar a coordenadas esféricas $d^4 k_E = |k_E|^3 d|k_E| d\Omega_4$

Ejemplo vía cut-off

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\Lambda d|k_E| \frac{|k_E|^3}{(|k_E|^2 + m^2)^2} \quad \int d\Omega_4 = 2\pi^2 \quad \begin{array}{l} \text{área de esfera} \\ k_4^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1 \end{array}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^{\frac{\Lambda^2}{m^2}} du \frac{u}{(u+1)^2}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{-\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} + \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) \right] \approx \frac{i}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 + \dots \right)$$

... = términos
que se anulan
para $\Lambda^2 \gg m^2$

divergencia logarítmica

notar que se puede
reabsorber en Λ

Función Γ de Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \operatorname{Re} z > 0$$

integrando por partes

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1) \Rightarrow \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \Gamma(n+1) = n!$$

$\Gamma(z)$ es analítica excepto por polos en $z = 0, -1, -2, \dots$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon)$$

$$\Gamma(-1+\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - 1 + O(\varepsilon)$$

$$\gamma = 0,5772\dots \quad \text{constante de Euler-Mascheroni}$$

```
In[52]:= Gamma[6] / 5!
```

```
Out[52]:= 1
```

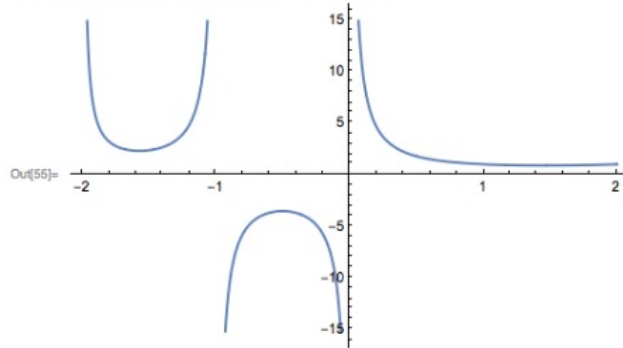
```
In[53]:= Gamma[1/2]
```

```
Out[53]:=  $\sqrt{\pi}$ 
```

```
In[54]:= Gamma[-1/2]
```

```
Out[54]:=  $-2\sqrt{\pi}$ 
```

```
In[55]:= Plot[Gamma[x], {x, -2, 2}]
```



```
In[56]:= Series[Gamma[epsilon], {epsilon, 0, 1}] // Simplify
```

```
Out[56]:=  $\frac{1}{\epsilon} - \text{EulerGamma} + \frac{1}{12} (6 \text{EulerGamma}^2 + \pi^2) \epsilon + O[\epsilon]^2$ 
```

```
In[57]:= EulerGamma // N
```

```
Out[57]:= 0.577216
```

```
In[58]:= Series[Gamma[-1+epsilon], {epsilon, 0, 1}] // Simplify
```

```
Out[58]:=  $-\frac{1}{\epsilon} + (-1 + \text{EulerGamma}) + \left(-1 + \text{EulerGamma} - \frac{\text{EulerGamma}^2}{2} - \frac{\pi^2}{12}\right) \epsilon + O[\epsilon]^2$ 
```

Ejemplo via regularización dimensional

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}$$

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\Omega_d \int d|k_E| |k_E|^{d-1}$$

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int d|k_E| \frac{|k_E|^{d-1}}{(|k_E|^2 + m^2)^2}$$

$$\mathcal{I} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2} m^{4-d}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)$$

$\epsilon = 4 - d$, en el límite $d \rightarrow 4$, $\epsilon \rightarrow 0$

$$\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots$$

polo en $\epsilon = 0$ \leftrightarrow divergencia logarítmica

$$\int_0^\infty du \frac{u^{\frac{d-2}{2}}}{(1+u)^2} = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)$$

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2}$$

relevante para



Ejercicio

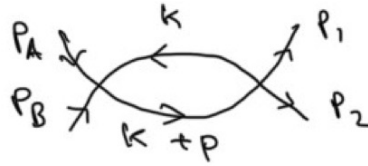
$$\tilde{\mathcal{I}} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

relevante para



evaluar vía cut-off y vía regularización dimensional

Regresamos a



$$p = p_A + p_B, \quad s = (p_A + p_B)^2$$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

se usa el truco de Feynman $\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}$

cambio de variable $l \equiv k + xp$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l^2 - c^2 + i\epsilon]^2}, \quad c^2 \equiv m^2 - x(1-x)s$$

$$i\mathcal{M}_2(s) \simeq \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{\Lambda^2}{m^2 - x(1-x)s} \right]$$

$$i\mathcal{M}_2(s) \simeq \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{s}$$

asumiendo $s \gg m^2$



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.