Módulo de Teoría
01-03-2023

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics
LA-CoNGA physics

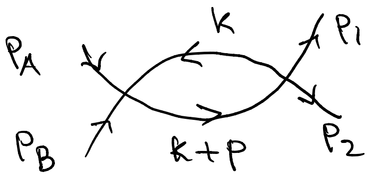
Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

Recap 1^{+}

Divergencias en diagramas de Feynman

Ejemplo: $\phi\phi \longrightarrow \phi\phi$ en teoria $\lambda\phi^4$

amplitud de scattering $\mathcal{M}$ a orden λ^2 incluye



$$\propto \int d^4k \, \frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon} \, \frac{1}{(k+p)^2-m^2+i\epsilon}$$

$p = p_A + p_B = p_1 + p_2$

$$\longrightarrow \int^{\infty} dk \, k^3 \, \frac{1}{k^2} \, \frac{1}{k^2} = \int^{\infty} dk \, \frac{1}{k}$$

la integral diverge cuando $k \to \infty$

tiene divergencia ultravioleta (UV)

la divergencia es logarítmica

Grado de divergencia superficial D

diagrama genérico $\longrightarrow$ tipo de divergencia depende de

$$\boxed{D = 4L - 2I}$$

$L = \#$ de lazos (bucles), $I = \#$ de líneas internas

$$\mathcal{I}_F \sim \underbrace{\int d^4k_1 \int d^4k_2 \cdots \int d^4k_L}_{\text{1 integral por bucle}} \underbrace{\frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k_2^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots \frac{1}{k_L^2 - m^2 + i\epsilon}}_{\text{1 propagador por cada línea interna}}$$

$$\text{integrando} \sim \frac{(\text{momento})^{4L}}{(\text{momento})^{2I}} \sim (\text{momento})^D$$

$D \geq 0 \Rightarrow$ integral divergente

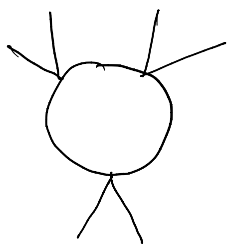
e.g. $D = 0 \longrightarrow$ divergencia logarítmica, $D = 2 \longrightarrow$ divergencia cuadrática

$D < 0$ integral superficialmente convergente, puede ser divergente

Teorema de Weinberg

un diagrama es convergente si su grado de divergencia superficial, y el de todos sus subdiagramas, es negativo

Ejemplos

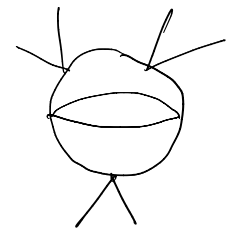


$L=1\,,\ I=3$

$D = 4L - 2I = 4-6 = -2$

convergente

no hay subdiagramas divergentes

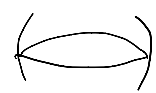


$L=3\,,\ I=7$

$D = 12-14 = -2$

$D<0$ pero no es convergente

$\exists$ subdiagrama divergente



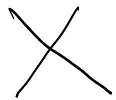
$L'=1\,,\ I'=2$

$D' = 4-4 = 0$

subdivergencia logarítmica

D en función de V = # de vértices, E = # de líneas externas

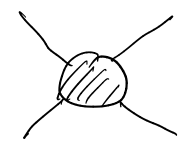
conservación de momento $\Rightarrow$ $L = I - (V-1)$

en $\lambda\phi^4$ vértice  $\Rightarrow$ $4V = E + 2I$

sustituyendo en $D = 4L - 2I$ $\Rightarrow$ $\boxed{D = 4 - E}$ ¡independiente de V!

OBS

* diagramas con E impar se cancelan por simetría $\phi \to -\phi$
* $E=0$, $D=4$ es la divergencia en la energía de vacío, no observable
* quedan 2 tipos con $D \geq 0$ (divergentes)



$E=2$, $D=2$ 

e.g. 

divergencia cuadrática

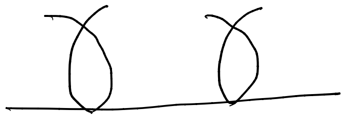
$E=4$, $D=0$

e.g. 

divergencia logarítmica

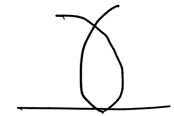
$*$ $E > 4 \Rightarrow D = 4 - E < 0$ pero el diagrama puede ser divergente

e.g.



$E = 6$, $D = 4 - 6 = -2$

pero contiene



$E' = 4$
$D' = 0$

subdivergencia logarítmica

$*$ $D = 4 - E$ independiente de V porque λ es adimensional

tarea 4, $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda_5}{5!}\phi^5$, $[\lambda_5] = -1$ dimensión $(\text{masa})^{-1}$

D aumenta con V

$\exists$ infinitos diagramas divergentes

3 tipos de comportamiento UV

tipo de teoría	dimensión de constante de acoplo	divergencias	ejemplos
super renormalizable	>0	# finito de diagramas diverge superficialmente	$\lambda_3 \phi^3$
renormalizable	$=0$	# finito de amplitudes diverge superficialmente, divergencias ocurren a todo orden	$\lambda\phi^4$ QED
no-renormalizable	<0	todas las amplitudes divergen a un orden suficientemente grande	$\lambda_5\phi^5$ gravedad

* en una teoría renormalizable las divergencias se absorben en un número finito de parámetros, equivalentemente en un número finito de contratérminos

Recap 2^+

Regularización de integrales de Feynman

ref. A. Zee, QFT in a nutshell, Ap. D

primero se hace rotación de Wick

$$K^0 = iK_4 \Rightarrow d^4K = i\,d^4K_E \,, \qquad K^2 = -K_4^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2 = -K_E^2$$

para simplificar $K_E = K$

* cut-off Λ

$$\int_0^\infty |K|^{D-1}\, d|K| \longrightarrow \int_0^\Lambda |K|^{D-1}\, d|K|$$

Λ tiene unidades de energía (masa)

Ej. $$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - c^2 + i\epsilon)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{c^2} + \dots$$

términos que se anulan para $\Lambda^2 >> c^2$

notación : $\log = \ln$

* regularización dimensional

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \quad , \quad \epsilon = 4-d$$

Para mantener λ adimensional se introduce un parámetro μ (masa)

$$\lambda \longrightarrow \lambda \mu^{\epsilon}$$

razón:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\phi^4 \longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\mu^{\epsilon}\phi^4$$

$S = \int d^4x \, \mathcal{L}$ adimensional

$\mathcal{L}$ tiene dimensión 4

$S = \int d^dx \, \mathcal{L}$ adimensional

$\mathcal{L}$ tiene dimensión d

Ej. $\lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2-c^2+i\epsilon)^2} \longrightarrow \lambda^2 \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2-c^2+i\epsilon)^2}$

$$= \frac{i\lambda^2\mu^{\varepsilon}}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{c^2}\right)^{\varepsilon/2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$\varepsilon = 4-d$, $\gamma = 0{,}5572..$

$$= \frac{i\lambda^2\mu^{\varepsilon}}{16\pi^2} \left\{ \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\log\frac{4\pi\mu^2}{c^2} + \cdots\right)\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \cdots\right) \right\}$$

$\cdots$ = términos de orden ε

$$= \frac{i\lambda^2\mu^{\varepsilon}}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log\frac{c^2}{\mu^2} + \cdots \right)$$

divergencias = polos en ε

Regresamos a

$p = p_A + p_B \quad , \quad s = (p_A+p_B)^2$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{(-i\lambda)^2}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{i}{(k+p)^2-m^2-i\epsilon}$$

se usa el truco de Feynman: $\displaystyle \frac{1}{ab} = \int_0^1 dx\,\frac{1}{[ax+b(1-x)]^2}$

luego se cambia variable a $l = k + xp$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx\,\underbrace{\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(l^2-c^2+i\epsilon)^2}}\quad , \quad c^2 = m^2 - x(1-x)s$$

evaluada anteriormente

$$I = \frac{i}{16\pi^2}\log\frac{\Lambda^2}{c^2} + \dots$$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\int_0^1 dx\,\log\frac{\Lambda^2}{m^2-x(1-x)s}$$

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\log\frac{\Lambda^2}{s}\quad , \quad s \gg m^2$$

 en regularización dimensional

como antes se llega a

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 dx \underbrace{\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-c^2+i\epsilon)^2}}_{\frac{i\mu^{\varepsilon}}{16\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 4\pi - \log\frac{c^2}{\mu^2} + \dots\right)} \quad , \qquad c^2 = m^2 - x(1-x)s$$

$\longrightarrow$ evaluada anteriormente

$$i\mathcal{M}_2(s) = \frac{i\lambda^2\mu^{\varepsilon}}{16\pi^2\varepsilon} - \frac{i\lambda^2\mu^{\varepsilon}}{32\pi^2}\int_0^1 dx\left[\gamma - \log 4\pi + \log\left(\frac{m^2 - x(1-x)s}{\mu^2}\right)\right]$$

esquema MS (minimal substraction)

contratérmino absorbe polo en ϵ

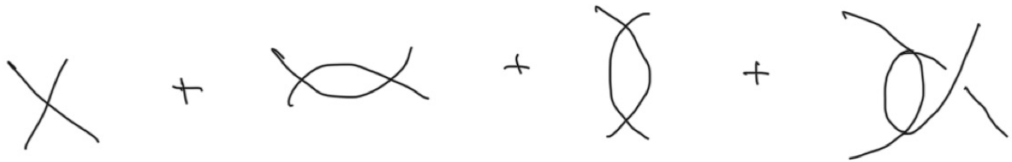
esquema $\overline{\text{MS}}$ (modified MS)

contratérmino absorbe polo en ε

y $-\gamma + \log 4\pi$

Renormalización

Volvemos a la amplitud $\phi\phi \to \phi\phi$ en $\lambda\phi^4$

$i\mathcal{M} =$  $+ \; \mathcal{O}(\lambda^3)$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left[\log\frac{\Lambda^2}{s} + \log\frac{\Lambda^2}{t} + \log\frac{\Lambda^2}{u}\right] + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

problema aparente: $\mathcal{M}$ depende de $\Lambda \to \infty$

solución: entender el significado de λ

Refs. Zee III.1, Schwartz 15.4

λ determina la magnitud de la interacción ϕ^4

para medir λ se hace un experimento $\phi\phi \to \phi\phi$ y se mide $d\sigma/d\Omega$ a ciertos valores s_0, t_0, u_0. Como $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\mathcal{M}|^2$ efectivamente se mide $\mathcal{M}$, pero $\mathcal{M}$ también incluye las correcciones en λ^2. Lo que se mide se define como un λ renormalizado λ_R (ó λ_P, P de physical en Zee), es decir

$$i\mathcal{M}\Big|_{s_0, t_0, u_0} = -i\lambda_R$$

$$\Rightarrow -i\lambda_R = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2}\left[\log\frac{\Lambda^2}{s_0} + \log\frac{\Lambda^2}{t_0} + \log\frac{\Lambda^2}{u_0}\right] + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Esta ecuación relaciona la λ en el Lagrangiano $\mathcal{L}$ con el valor observado λ_R

$$\lambda_R = \lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} L_0 \quad , \quad L_0 = \log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0}$$

Para despejar λ , $\lambda = \lambda_R + a\lambda_R^2 + O(\lambda_R^3)$

$$\lambda_R = \lambda_R + a\lambda_R^2 - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 + \cdots \quad \Rightarrow \quad a = \frac{L_0}{32\pi^2}$$

$$\lambda = \lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0 + O(\lambda_R^3)$$

Se sustituye en $\mathcal{M} = -\lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \overbrace{\left(\log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u}\right)}^{L} + O(\lambda^3)$

$$\mathcal{M} = -\left(\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0\right) + \frac{\left(\lambda_R + \cancel{\frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} L_0}\right)^2}{32\pi^2} L + O(\lambda_R^3)$$

daria λ_R^3 , λ_R^4. pero es $O(\lambda_R^3)$

$$\mathcal{M} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}(L - L_0) + O(\lambda_R^3)$$

$$L - L_0 = \left(\log\frac{\Lambda^2}{s} + \log\frac{\Lambda^2}{t} + \log\frac{\Lambda^2}{u}\right) - \log\left(\frac{\Lambda^2}{s_0} + \log\frac{\Lambda^2}{t_0} + \log\frac{\Lambda^2}{u_0}\right)$$

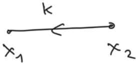
$$\mathcal{M} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{s_0}{s} + \log\frac{t_0}{t} + \log\frac{u_0}{u}\right) + O(\lambda_R^3)$$

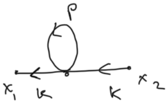
finito, independiente de Λ

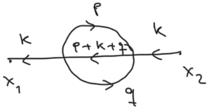
además predice $\mathcal{M}(s_1, t_1, u_1) - \mathcal{M}(s_0, t_0, u_0) = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{s_0}{s_1} + \log\frac{t_0}{t_1} + \log\frac{u_0}{u_1}\right)$

Divergencias en $G^{(2)}$

Ref. Zee, III.3

$G^{(2)}(x_1, x_2) =$ 

$+$ 

$+$ 

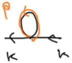
$+ \dots$

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx_1} e^{ikx_2} \tilde{G}^{(2)}(k,-k)$$

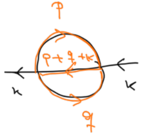
transformada de Fourier

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} + \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} I_1 \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} + \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} I_2 \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon} + \dots$$

$$I_1 = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon} = i\lambda C_1 \left(\Lambda^2 - m^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2} + \dots\right)$$



$$I_2 = \frac{(-i\lambda)^2}{6}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{p^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{i}{(k+p+q)^2-m^2+i\epsilon}$$



Por invariancia de Lorentz

$$I_2 = D + \mathcal{E}k^2 + \mathcal{F}k^4 + \cdots$$

$$D = I_2\Big|_{k=0} \sim i C_2 \lambda^2 \Lambda^2 + \cdots$$

D tiene divergencia cuadrática

Para determinar $\mathcal{E}$ se deriva respecto a $r = k^2$, luego se evalúa en $k=0$

$$\frac{\partial I_2}{\partial r} = \frac{1}{2r}k^\mu\frac{\partial I_2}{\partial k^\mu} \xrightarrow[\sim]{k=0} \int d^4p\int d^4q\,\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{1}{q^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{1}{[(p+q)^2-m^2+i\epsilon]^2}$$

divergencia logarítmica

$$\mathcal{E} \sim i C_3 \lambda^2 \log\frac{\Lambda^2}{m^2} + \cdots ,$$

similarmente se obtiene que $\mathcal{F}$ es finita

$$I_2 = i\lambda^2\left(C_2\Lambda^2 + C_3 k^2 \log\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + \cdots$$

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\left\{1 - \frac{\lambda C_1 \Lambda^2}{k^2-m^2+i\epsilon} - \frac{\lambda^2\left(C_2\Lambda^2 + C_3 k^2 \log\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)}{k^2-m^2+i\epsilon} + \cdots\right\}$$

← serie geométrica

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}\left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda C_1\Lambda^2 + \lambda^2\left(C_2\Lambda^2 + C_3 k^2 \log \Lambda^2/m^2\right) + \cdots}{k^2-m^2+i\epsilon}}\right)$$

$\mathcal{O}(\lambda^3)$

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{i}{k^2 - m^2 + C_1\lambda\Lambda^2 + C_2\lambda^2\Lambda^2 + C_3\lambda^2 k^2 \log\frac{\Lambda^2}{m^2} + i\epsilon + \cdots}$$

se concluye.

$$\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(1+b)k^2 - (m^2-a) + i\epsilon}$$

$$a = \Lambda^2\left(C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \cdots\right)$$

$$b = C_3\lambda^2 \log\frac{\Lambda^2}{m^2} + \cdots$$

$$\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon} \longrightarrow \frac{(1+b)^{-1}}{k^2-\dfrac{(m^2-a)}{1+b}+i\epsilon}$$

* el polo en k^2 se corre a m_R^2 (ó m_p^2 en Zee)

$$m_R^2 = \frac{m^2-a}{1+b} = m^2+\delta m^2$$

renormalización de masa

$$m^2 = m_R^2 + c_1 \lambda \Lambda^2 + \cdots$$

* el residuo en el polo se modifica de 1 a $(1+b)^{-1}$

corresponde a renormalización del campo ϕ

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi + \cdots \longrightarrow \frac{1}{2}(1+b)\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi .$$

$$\frac{1}{k^2\ldots} \longrightarrow \frac{1}{(1+b)k^2\ldots}$$ en el propagador

CONTRATÉRMINOS

Hasta ahora: se ajustan los parámetros originales, e.g. λ en términos de λ_R, o m en términos de m_R, tal que la dependencia en Λ desaparece. Funciona a orden λ^2. Para demostrar que funciona a todo orden se procede sistemáticamente incluyendo contratérminos en $\mathcal{L}$ dependiente de ϕ_R, m_R, λ_R:

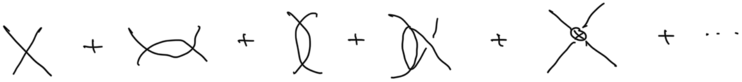
$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{1}{4!}\lambda_R \phi_R^4}_{\mathcal{L}_R} + \underbrace{\frac{1}{2}\delta_Z \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2}\delta_m \phi_R^2 - \frac{1}{4!}\delta_\lambda \phi_R^4}_{\mathcal{L}_{CT}}$$

sólo se necesitan 3 contratérminos, todos de la forma de términos originales

Los coeficientes $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ dependen de λ_R, se determinan iterativamente

Ejemplo: amplitud $\phi\phi \to \phi\phi$

$i\mathcal{M} =$



se calculan con $\mathcal{L}_R$

contribución de $-\frac{\delta\lambda}{4!}\phi_R^4$ en $\mathcal{L}_{CT}$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2}\left[\log\frac{\Lambda^2}{s} + \log\frac{\Lambda^2}{t} + \log\frac{\Lambda^2}{u}\right] - i\delta\lambda$$

$$\mathcal{M}\Big|_{s_0,t_0,u_0} = -\lambda_R \quad \Rightarrow \quad \delta\lambda = \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2}\left[\log\frac{\Lambda^2}{s_0} + \log\frac{\Lambda^2}{t_0} + \log\frac{\Lambda^2}{u_0}\right]$$

sustituyendo

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2}\left[\log\frac{s_0}{s} + \log\frac{t_0}{t} + \log\frac{u_0}{u}\right] + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$$

igual que antes

Próxima clase

reglas de Feynman con contratérminos

grupo de renormalización

http://laconga.redclara.net
contacto@laconga.redclara.net

lacongaphysics

Latin American alliance for Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics

Cofinanciado por el programa Erasmus+ de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.