

Módulo de Teoría

03-03-2023

Anamaría Font V.

Universidad Central de Venezuela

LA-CoNGA-physics

mattermost.redclara.net@afont



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics
LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

UAN
UNIVERSIDAD NACIONAL



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
INGENIERÍA

UNMSM



UNIVERSIDAD VENEZOLANA
VENEZOLANA

Université
de Paris

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN



CLARA

DBACCESS

frontier x
ANALYTICS

Recap

Divergencias en $\lambda\phi^4$

grado de divergencia superficial, $D = 4 - E$

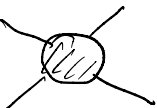
$E=2$  $\sim \Lambda^2 + k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2}$

$D=2$

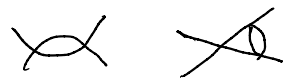
e.g. , 

$E=4$

$D=0$

 $\sim \log \frac{\Lambda^2}{m^2}$

e.g.



Las divergencias ocurren en funciones de correlación con términos a nivel árbol, i.e. con términos en \mathcal{L}

$G^{(2)}$



$\mathcal{L} \supset \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$

$G^{(4)}$



$\mathcal{L} \supset -\frac{\lambda}{4!} \phi^4$

señal que las divergencias se pueden absorber en renormalización de los coeficientes de \mathcal{L}

Renormalización

* amplitud $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$

$$i\mathcal{M} = \text{X} + \text{fish} + \text{loop} + \text{tadpole} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{i\lambda^2}{32\pi^2} \left(\log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$i\mathcal{M} \Big|_{s_0, u_0, t_0} = -i\lambda_R$$

la amplitud define una constante de acoplo renormalizada o física

$\Rightarrow \lambda = \lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left(\log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right) + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$ y sustituyendo

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left(\log \frac{s_0}{s} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right) + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$$

finita, independiente de Λ

$$* \mathcal{G}^{(2)} = \begin{array}{c} \leftarrow k \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \text{p} \\ \text{O} \\ \leftarrow k \quad \leftarrow k \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (i\lambda c_1 \Lambda^2) \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

$$= \frac{i}{k^2 - m^2 + \lambda c_1 \Lambda^2 + i\epsilon} = \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon}$$

$$m^2 = m_R^2 + \lambda c_1 \Lambda^2$$

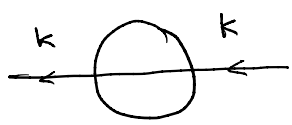
se conduce

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon}$$

el polo en k^2 del propagador se identifica con m_R^2

m_R : masa renormalizada o masa física, finita

En \tilde{G}^2 a orden λ^2 aparece



$$\sim i\lambda^2 (C_2 \Lambda^2 + C_3 k^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2})$$

A orden λ^2

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{i}{(1+b)k^2 - (m^2 - a) + i\epsilon}$$

$$a = \Lambda^2 (C_1 \lambda + C_2 \lambda^2)$$

$$b = C_3 \lambda^2 \log \frac{\Lambda^2}{m^2}$$

La nueva divergencia se absorbe en renormalización del campo.

Es decir, se define ϕ_R tal que $\phi_R = (1+b)^{1/2} \phi$

De esta manera

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R = \frac{1}{2} (1+b) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \Rightarrow (1+b) k^2 \text{ en denominador del propagador}$$

Contrat'èrminos

Es más sistemático empezar con la teoría con los parámetros renormalizados y contraterminos que absorben las divergencias

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_R^4 + \frac{1}{2} \delta_Z \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2 - \frac{\lambda}{4!} \delta_\lambda \phi_R^4$$

* 3 contraterminos, uno para cada término original

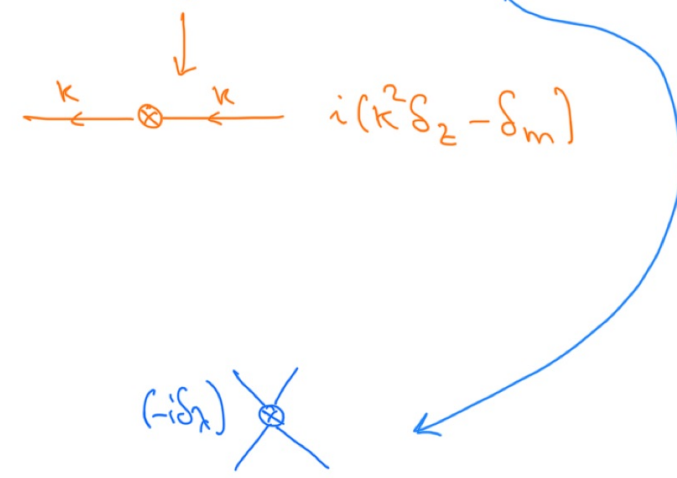
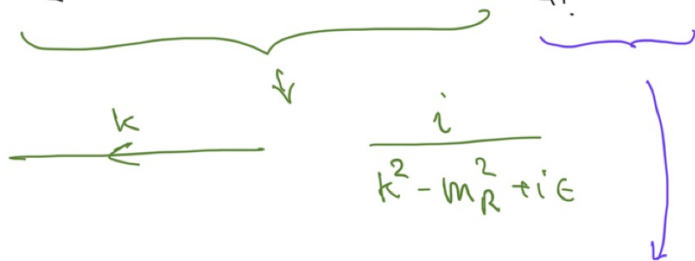
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

* $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ dependen del cutoff Λ (ó de ϵ en regularización dimensional)

* $\delta_Z, \delta_m, \delta_\lambda$ se ajustan orden por orden para cancelar las divergencias

Reglas de Feynman con contraterminos

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2}_{\text{green}} - \underbrace{\frac{1}{4!} \lambda_R \phi_R^4}_{\text{purple}} + \underbrace{\frac{1}{2} \delta_2 \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2}_{\text{orange}} - \underbrace{\frac{1}{4!} \delta_\lambda \phi_R^4}_{\text{blue}}$$



+ otras reglas usuales:
 integrar sobre momentos independientes
 conservación de momento en vértices
 dividir por factores de simetría

S_m, S_λ, S_z se pueden determinar iterativamente imponiendo que el propagador a todo orden tiene polo en m_R^2 con residuo 1, y la amplitud $i\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi)$ en s_0, t_0, u_0 es $-i\lambda_R$.

Iterativamente quiere decir orden por orden

$$S_\lambda = S_\lambda^{(0)} + S_\lambda^{(1)} \lambda_R + S_\lambda^{(2)} \lambda_R^2 + \dots$$

$$S_m = S_m^{(0)} + S_m^{(1)} \lambda_R + S_m^{(2)} \lambda_R^2 + \dots$$

$$S_z = S_z^{(0)} + S_z^{(1)} \lambda_R + S_z^{(2)} \lambda_R^2 + \dots$$

orden 0

amplitud M

a orden cero no hay scattering \Rightarrow ~~\otimes~~ se anula a orden 0

$$\Rightarrow \delta_{\lambda}^{(0)} = 0$$

propagador

$$\begin{array}{c} \leftarrow k \\ \hline \leftarrow k \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow k \\ \hline \otimes \\ \hline \leftarrow k \end{array} \sim \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon} + \frac{(i\partial_z k^2 - \delta m)}{(k^2 - m_R^2 + i\epsilon)^2}$$

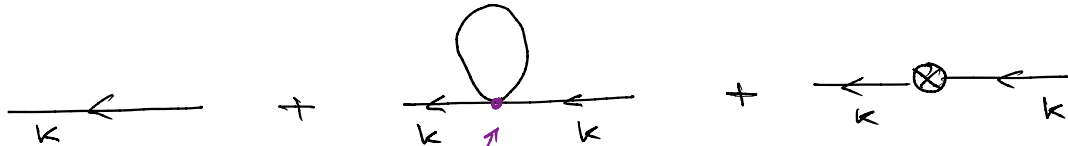
polo en m_R^2 con residuo 1 \Rightarrow $\delta_z^{(0)} = 0$, $\delta_m^{(0)} = 0$

orden 1

M $iM = \text{X} + \text{X} \otimes = -i\lambda_R - i\delta_2$

$iM(\phi\phi \rightarrow \phi\phi)$ en s_0, t_0, u_0 es $-i\lambda_R \Rightarrow \delta_2^{(1)} = 0$

Propagador



$$\frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon} + \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon} (i\lambda_R C_1 \Lambda^2 + i\delta_2 k^2 - i\delta_m) \frac{i}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon}$$

polo en m_R^2 con residuo 1 $\Rightarrow \delta_m^{(1)} = C_1 \Lambda^2, \delta_2^{(1)} = 0$

orden 2 μ

$$i\mathcal{M} = \text{X} + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4}$$

$$= -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[\log \frac{\Lambda^2}{s} + \log \frac{\Lambda^2}{t} + \log \frac{\Lambda^2}{u} \right] - i\delta_\lambda$$

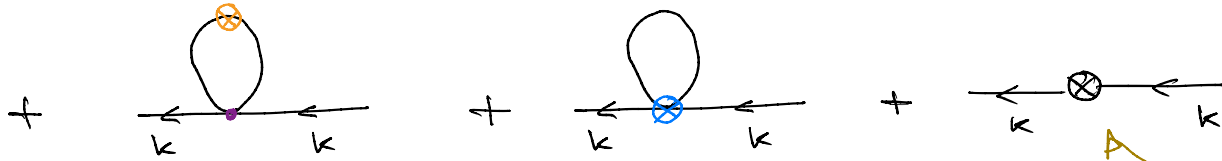
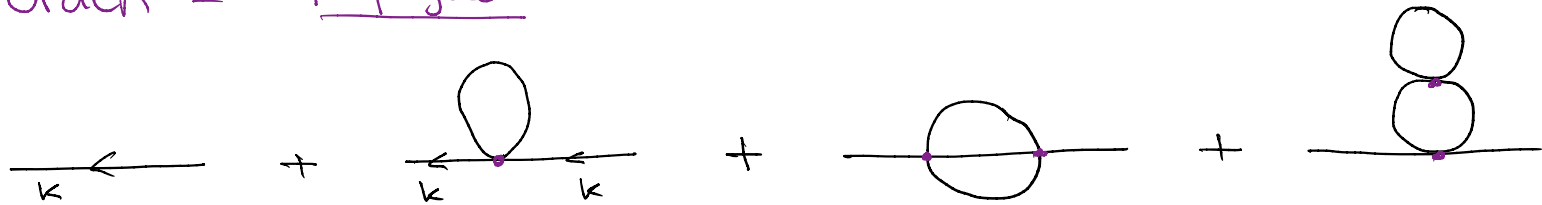
$$i\mathcal{M} \Big|_{s_0, t_0, u_0} = -i\lambda_R \Rightarrow \delta_\lambda^{(2)} = \frac{1}{32\pi^2} \left[\log \frac{\Lambda^2}{s_0} + \log \frac{\Lambda^2}{t_0} + \log \frac{\Lambda^2}{u_0} \right]$$

notar que sustituyendo $\delta_\lambda = \delta_\lambda^{(2)} \lambda_R^2$ se obtiene

$$i\mathcal{M} = -i\lambda_R + \frac{i\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[\log \frac{s_0}{s} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right] + \mathcal{O}(\lambda_R^3)$$

igual que antes

orden 2 propagador



$$\sim \lambda_R \cdot \delta_m^{(1)} \lambda_R$$

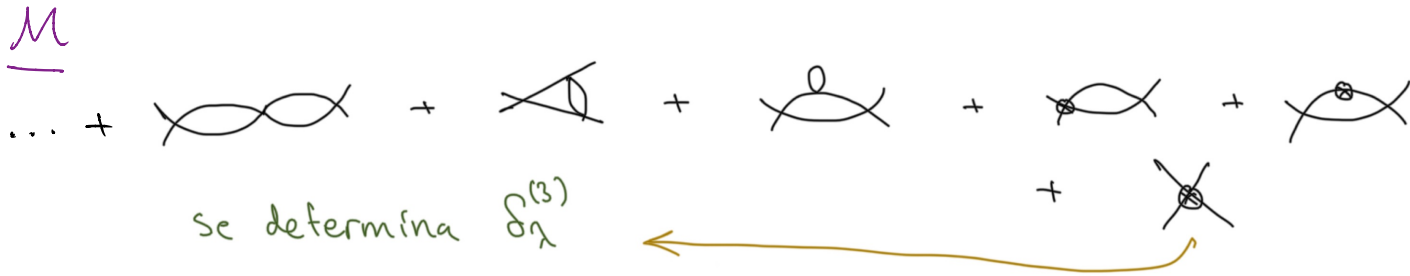
$$\sim \delta_\lambda^{(2)} \lambda_R^2$$

$\delta_m^{(1)}, \delta_z^{(1)}, \delta_\lambda^{(2)}$
ya estaban

cancelación de divergencias fija

$\delta_z^{(2)}, \delta_m^{(2)}$

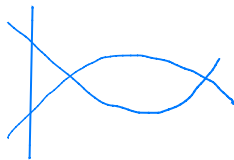
orden 3



Teorema BPHZ (Bogoliouov-Parasiuk-Hepp-Zimmerman)

Este procedimiento elimina todas las divergencias

induyendo e.g. en



para el cual no hay contratérmino



Lagrangiano "desnudo" (bare)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{\lambda_R}{4!} \phi_R^4 + \frac{1}{2} \delta_Z \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} \delta_m \phi_R^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_R^4 \\ &= \frac{1}{2} (1 + \delta_Z) \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R - \frac{1}{2} (m_R^2 + \delta_m) \phi_R^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_R^4\end{aligned}$$

se definen ϕ_0, m_0, λ_0 : campo, masa y constante de acoplamiento desnudos

$$\phi_0 = (1 + \delta_Z)^{1/2} \phi_R, \quad m_0^2 = \frac{m_R^2 + \delta_m}{1 + \delta_Z}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_R + \delta_\lambda}{(1 + \delta_Z)^2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4$$

ϕ_0, λ_0, m_0 son los ϕ, λ, m en el \mathcal{L} original, $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4$

la etiqueta "0" sirve para distinguirlos de los ϕ_R, λ_R, m_R físicos o renormalizados

* procedimiento estándar
de entrada tenemos campos y parámetros desnudos, pero para simplificar
no se les pone la etiqueta "0"

* para renormalizar (necesario porque existen divergencias) se introducen
los campos + parámetros renormalizados (físicos) y se separan los
contratérminos.

ϕ_0, m_0, λ_0 también se pueden definir de forma multiplicativa, i.e

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi_R, \quad m_0^2 = \frac{Z_m}{Z_\phi} m_R^2, \quad \lambda_0 = \frac{Z_\lambda}{Z_\phi^2} \lambda_R$$

Ejercicio: a partir de
 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4$
hallar los contratérminos

* se regularizan las divergencias, por ejemplo con Λ ó $\epsilon = 4-d$

* para determinar la dependencia de $\delta_\lambda, \delta_z, \delta_m$ (ó Z_ϕ, Z_m, Z_λ) de λ_R se usa un esquema de sustracción de divergencias. Aquí usamos un esquema de sustracción tal que el polo del propagador se mantiene en M_R^2 y $\mathcal{M}(\phi\phi \rightarrow \phi\phi) = -\lambda_R$ a escala s_0, t_0, u_0 .

Otros esquemas: MS, \overline{MS}

RGE

Ecuación del grupo de renormalización

No hay relación con teoría de grupos. Hay una ecuación
El nombre se debe a que la ecuación describe como cambia la
teoría cuando se redefinen las constantes de acoplo renormalizadas

En $\lambda\phi^4$, definimos $\lambda_R = -\mathcal{M}(s_0, t_0, u_0)$ y encontramos

$$\mathcal{M} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \left(\log \frac{s_0}{s} + \log \frac{t_0}{t} + \log \frac{u_0}{u} \right) + O(\lambda_R^3)$$

Es conveniente escoger $s_0 = u_0 = t_0 = \mu^2$ μ es una escala de energía

$$\mathcal{M} = -\lambda_R(\mu) + \frac{\lambda_R^2(\mu)}{32\pi^2} \left(\log \frac{\mu^2}{s} + \log \frac{\mu^2}{t} + \log \frac{\mu^2}{u} \right) + O(\lambda_R^3)$$

$\lambda_R(\mu)$ es el acoplo apropiado para s, t, u de orden μ^2 tal que $\log \frac{\mu^2}{s} \ll 1$

también se puede usar otra escala μ'

$$\mathcal{M} = -\lambda_R(\mu') + \frac{\lambda_R^2(\mu')}{32\pi^2} \left(\log \frac{\mu'^2}{s} + \log \frac{\mu'^2}{t} + \log \frac{\mu'^2}{u} \right) + O(\lambda_R^3)$$

Pero entonces

$$-\lambda_R(\mu) = -\lambda_R(\mu') + \frac{\lambda_R^2(\mu')}{32\pi^2} \left(\log \frac{\mu'^2}{\mu^2} + \log \frac{\mu'^2}{\mu^2} + \log \frac{\mu'^2}{\mu^2} \right) + O(\lambda_R^3)$$

$$\Rightarrow \lambda_R(\mu') = \lambda_R(\mu) + \frac{3\lambda_R^2(\mu)}{16\pi^2} \log \frac{\mu'}{\mu} + O(\lambda_R^3)$$

$\mu' = \mu + d\mu$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = \frac{3\lambda_R^2}{16\pi^2} + O(\lambda_R^3)} \quad \text{RGE}$$

Para simplificar (y conectar con la literatura), eliminamos la etiqueta R

En general la ecuación es

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g)$$

running coupling constant
g: constante de acoplamiento efectiva
 $\beta(g)$: función β

$$\text{En } \lambda\phi^4, \quad g = \lambda, \quad \beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\text{En QED}, \quad g = e, \quad \beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^5)$$

$$\text{En QCD} \quad g = g_s, \quad \beta(g_s) = -\frac{g_s^3}{16\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3} n_f \right) + \mathcal{O}(g_s^5)$$

*incluyendo
quarks*

$n_f = 6$

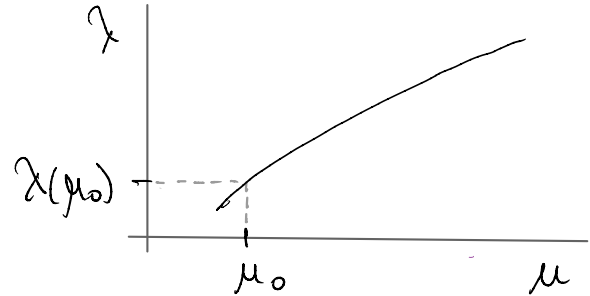
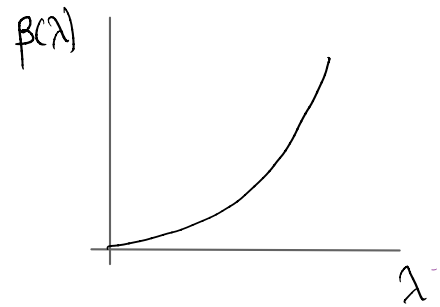
$n_f = \#$ de sabores en el Modelo Estándar: u, d, e, s, b, t

$$\lambda \phi^4, \quad \mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + o(\lambda^3)$$

Solución (ignorando $o(\lambda^3)$)

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{3}{16\pi^2} \frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow -\frac{1}{\lambda(\mu)} + \frac{1}{\lambda(\mu_0)} = \frac{3}{16\pi^2} \log \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - \frac{3}{16\pi^2} \lambda(\mu_0) \log \frac{\mu}{\mu_0}}$$



si empezamos con $\lambda(\mu_0) \ll 1$, $\lambda(\mu)$ crece.

Eventualmente la teoría de perturbaciones deja de ser válida.

Asumiendo $\beta(\lambda) = 3\lambda^2/16\pi^2$ incluso para λ grande, entonces

$\lambda(\mu)$ explotaría en

$$\mu = \mu_0 \exp \left[\frac{16\pi^2}{3\lambda(\mu_0)} \right]$$

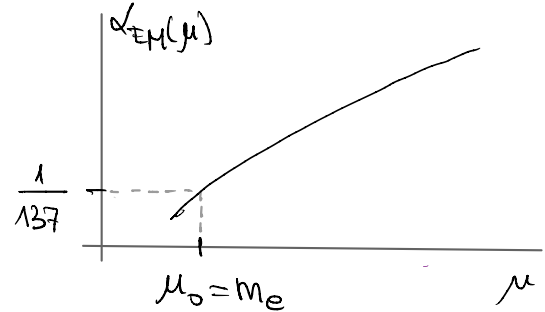
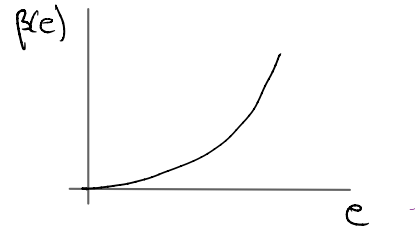
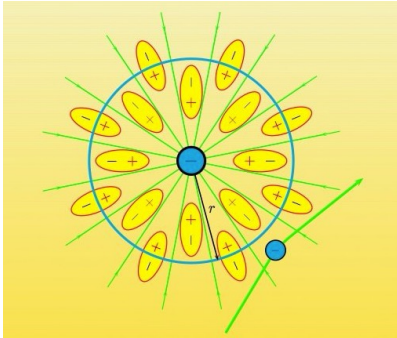
polo de Landau

QED , $\mu \frac{d e}{d \mu} = \frac{e^3}{12 \pi^2} + O(e^5)$

$\alpha_{EM} = \frac{e^2}{4 \pi}$, $\mu \frac{d \alpha_{EM}}{d \mu} = \frac{2}{3 \pi} \alpha_{EM}^2 + \dots$

$\alpha_{EM}(\mu) = \frac{\alpha_{EM}(\mu_0)}{1 - \frac{2}{3 \pi} \alpha_{EM}(\mu_0) \log \frac{\mu}{\mu_0}}$

α_{EM} crece cuando la energía aumenta,
decrece cuando la energía disminuye,
por el efecto de apantallamiento



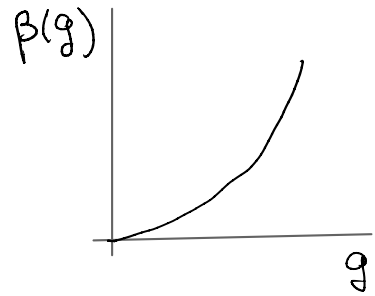
$m_e = 511 \text{ keV}$

$\alpha_{EM}(m_e) = \frac{1}{137} = \frac{g_e^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar c}$

$m_Z = 91 \text{ GeV}$

$\alpha_{EM}(m_Z) \sim \frac{1}{127}$

En $\lambda\phi^4$ y QED, $\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta(g)$




$\beta(0) = 0$, $\beta'(0) > 0$

* $g=0$ es un punto fijo

* cerca de $g=0$, $\frac{dg}{d\mu} > 0 \Rightarrow g$ decrece cuando μ decrece

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta'(0)g$$

$g=0$ es un punto fijo estable IR

¿Qué pasa si  ?

$$\beta(0) = 0, \quad \beta'(0) < 0$$

* $g=0$ es un punto fijo

* cerca de $g=0$, $\frac{dg}{d\mu} < 0 \Rightarrow$ g decrece cuando μ aumenta

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = \beta'(0)g$$

$g=0$ es un punto fijo estable UV

Este es el fenómeno de LIBERTAD ASINTÓTICA.

Ocurre en QCD, $\beta(g_s) = -\frac{7g_s^3}{16\pi^2}$

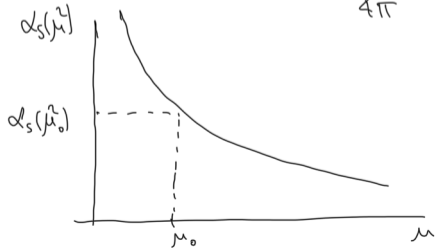
QCD incluyendo quarks

$$\mu \frac{dg_s}{d\mu} = - \left(\underbrace{7g_s^3}_{1\text{-laço}} + \underbrace{b_1 g_s^5}_{2\text{-laços}} + \underbrace{b_2 g_s^7}_{3\text{-laços}} + \dots \right)$$

Con el resultado a un laço

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{1 + \frac{7}{4\pi} \alpha_s(\mu_0^2) \log\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)}$$

$$, \quad \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$$



$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$$

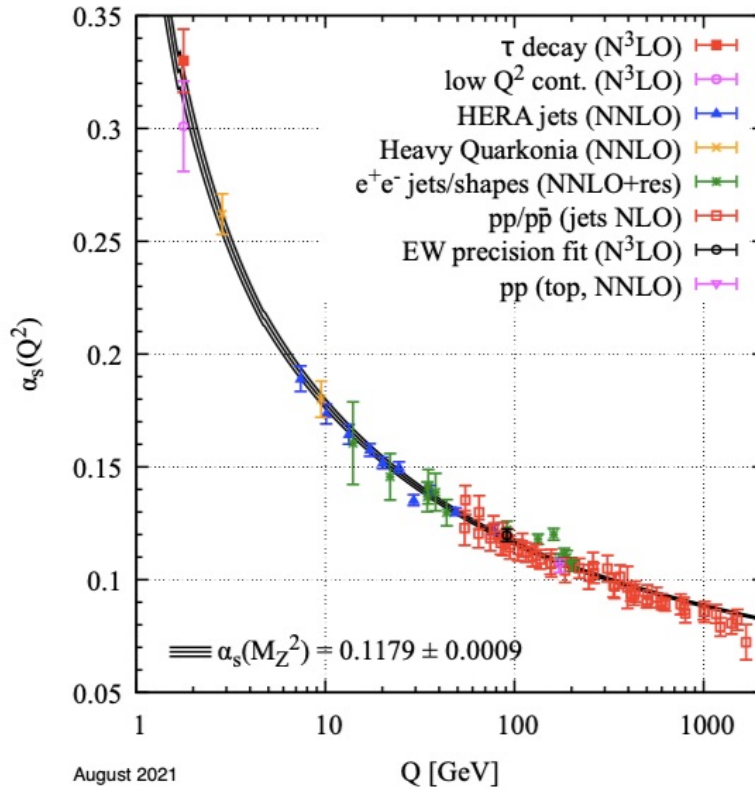


Figure 9.4: Summary of measurements of α_s as a function of the energy scale Q . The respective degree of QCD perturbation theory used in the extraction of α_s is indicated in brackets (NLO: next-to-leading order; NNLO: next-to-next-to-leading order; NNLO+res.: NNLO matched to a resummed calculation; N³LO: next-to-NNLO).

93.5 Gauge coupling unification

The quantitative unification of the three SM gauge couplings at the energy scale M_G is one of the cornerstones of the GUT paradigm. It is obviously of direct phenomenological relevance. Gauge coupling unification is well understood in the framework of effective field theory (EFT) [60]. In the simplest case, the relevant EFT at energies $\mu \gg M_G$ has a unified gauge symmetry (say $SU(5)$ for definiteness) and a single running gauge coupling $\alpha_G(\mu)$. At energies $\mu \ll M_G$, states with mass $\sim M_G$ (such as X bosons, GUT Higgs, color-triplet Higgs) have to be integrated out. The EFT now has three independent couplings and SM (or SUSY SM) matter content. One-loop renormalization group equations readily allow for an extrapolation to the weak scale,

$$\alpha_i^{-1}(m_Z) = \alpha_G^{-1}(M_G) + \frac{b_i}{2\pi} \log \left(\frac{M_G}{m_Z} \right) + \delta_i, \quad (93.3)$$

($i = 1, 2, 3$). Here we defined δ_i to absorb all sub-leading effects, such as threshold corrections at or near the weak scale (e.g. from superpartners and the additional Higgs bosons in the case of the MSSM) and at the GUT scale, and also higher-order corrections. We will discuss them momentarily.

It is apparent from Eq. (93.3) that the three low-scale couplings can be very different. This is due to the large energy range $m_Z \ll \mu \ll M_G$ and the non-universal β -function coefficients ($b_i^{\text{SM}} = \{41/10, -19/6, -7\}$ or $b_i^{\text{MSSM}} = \{33/5, 1, -3\}$). Incomplete GUT multiplets, such as gauge and Higgs bosons in the SM and also their superpartners and the additional Higgs bosons in the MSSM, contribute to the differences between the β functions. Inverting the argument, one expects that extrapolating the measured couplings to the high scale, we find quantitative unification at $\mu \sim M_G$. While this fails in the SM, it works intriguingly well in the MSSM (cf. Fig. 93.1).

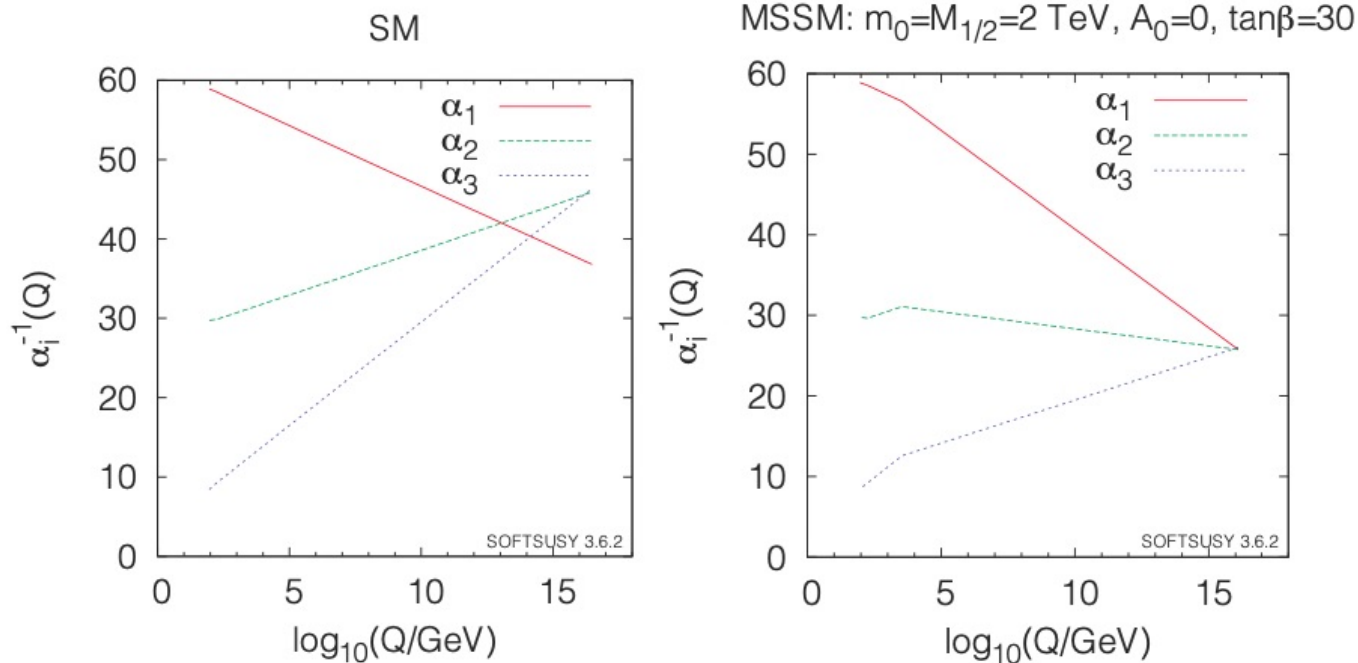


Figure 93.1: Running couplings in SM and MSSM using two-loop RG evolution. The SUSY threshold at 2 TeV is clearly visible on the MSSM side. (We thank Ben Allanach for providing the plots created using SOFTSUSY [61].)



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongapysics



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.