

Módulo de Instrumentación 2022

Clase 20: Explorando Sistemas No Lineales

Mario Cosenza



Latin American alliance for
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea



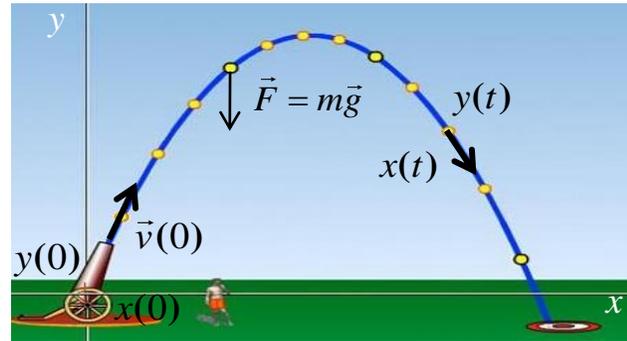


Sistemas dinámicos deterministas

Ciencia: fenómenos naturales se pueden comprender como relaciones *causa-efecto*.
Relaciones se expresan en lenguaje matemático: ecuaciones, reglas, funciones.
Sistemas físicos, biológicos, químicos, económicos, etc.

Ejemplo: Mecánica Clásica.
Leyes de Newton para el movimiento.

$$F = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

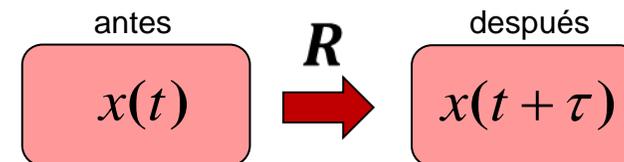


Conociendo posición inicial $(x(0), y(0))$ y velocidad inicial (v_{0x}, v_{0y}) , trayectoria $(x(t), y(t))$ está determinada.

Regla determinista: operación que permite calcular el estado de un sistema en un tiempo posterior a partir del conocimiento de su estado en un tiempo anterior.

Regla: t continuo, t discreto, algoritmo.

$\mathbf{x}(t)$: Conjunto de variables del estado del sistema en el tiempo t .





Sistemas dinámicos y espacio de fase

Estado de muchos sistemas se puede describir mediante un conjunto de N variables reales (posición, velocidad, presión, densidad, temperatura, etc)

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t) \cdots, x_N(t)) \in U \subset \mathbb{R}^N$$

Espacio de fase: espacio euclidiano N -dimensional U donde cada coordenada x_i representa una variable del sistema. Evolución del sistema se puede ver como un cambio del vector $\mathbf{x}(t)$ (análogo a posición) en su espacio de fase.

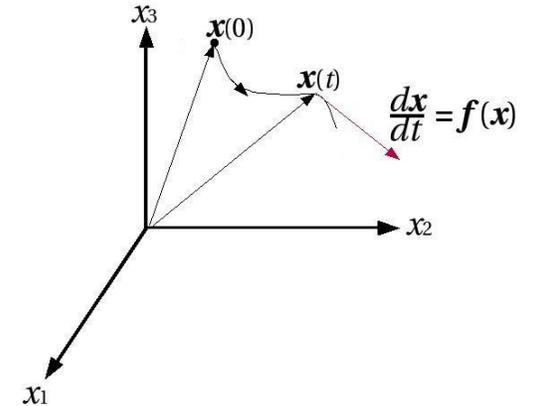
La evolución de muchos sistemas dinámicos con t continuo se puede describir mediante ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \lambda) \quad \text{donde} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)) \cdots, f_N(x_N(t))) \quad \lambda: \text{parámetros.}$$

Equivalente a sistema de N ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, x_2, \cdots, x_N) \end{aligned}$$

En general, una ecuación diferencial de orden N se puede expresar como N ecuaciones diferenciales de primer orden.



Solución $\mathbf{x}(t)$ determinada por condiciones iniciales: $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0) \cdots, x_N(0))$ Si f_i son no lineales, comportamiento de $\mathbf{x}(t)$ depende de parámetros.

$$\text{Solución estacionaria o punto fijo } \mathbf{x}^*: \quad \frac{d\mathbf{x}^*}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \lambda) = 0$$



Teorema de existencia y unicidad

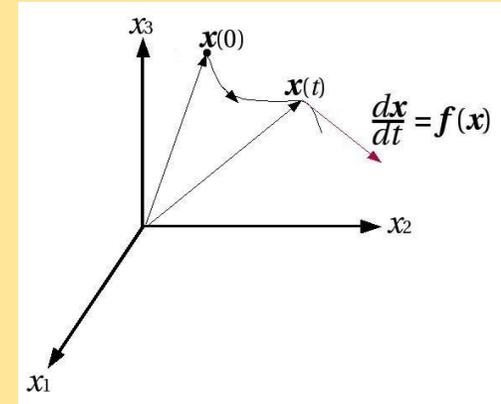
Considere un sistema dinámico $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$ definido en un subespacio $U \subset \mathbb{R}^N$

tal que $f(x)$ satisface la *propiedad de Lipschitz*: $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

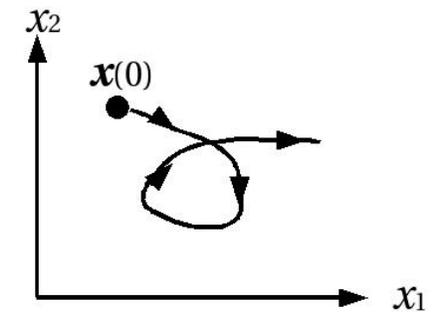
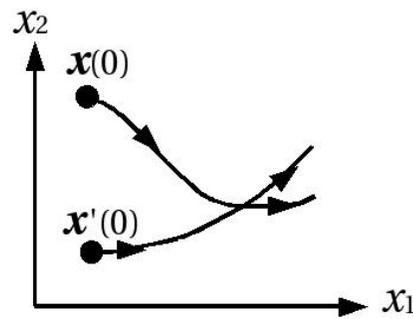
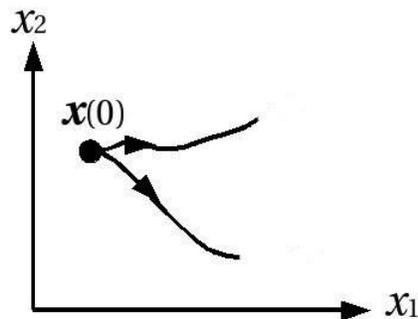
para algún $k < \infty$, donde $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$

Dada un condición inicial $x(0) \in U$,

existe una solución única $x(t)$ que satisface el sistema para $t \in (0, \tau)$ que pasa por $x(0)$.



Situaciones prohibidas por el Teorema de unicidad en el espacio de fase:



Atractor: estado dinámico asintótico en espacio de fase.

Los únicos estados asintóticos posibles en un espacio de fase bidimensional son puntos fijos o trayectoria cerradas (periódicas).



Sistemas lineales vs. no lineales

Lineal: suma de las causas = suma de los efectos. Principio de superposición: si $x(t)$ y $y(t)$ son soluciones, entonces $x(t)+y(t)$ es solución.

No lineal: efecto no es proporcional a la causa. No se cumple principio de superposición: $f(x+y) \neq f(x)+f(y)$

Sistemas lineales: existen métodos generales para encontrar soluciones en términos de funciones u operaciones elementales: polinomios, exponenciales, trigonométricas. Soluciones son regulares, periódicas, suaves.

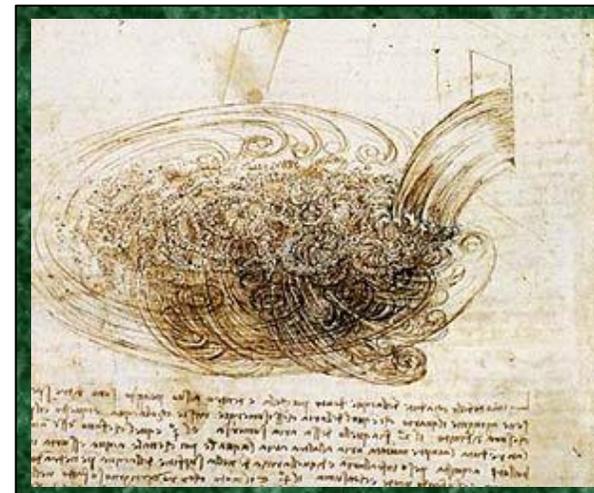
Sistemas no lineales: no hay métodos generales; soluciones son particulares; comportamiento es irregular. En general, soluciones se obtienen por métodos numéricos, computacionales, o experimentales.

Sistemas no lineales son mayoría en la naturaleza.

Ejemplo clásico: turbulencia en fluidos, impredecible en tiempo y espacio.

“Hay un problema físico que es común en muchos campos, que es muy antiguo y que no ha sido resuelto: es el problema de la turbulencia”.

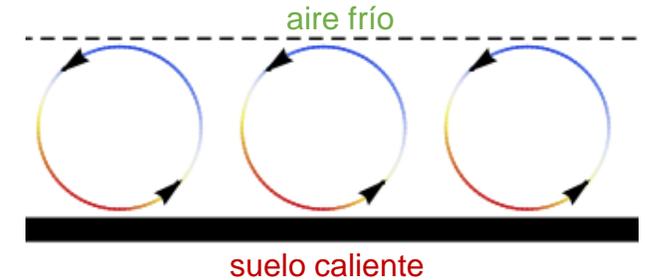
Richard Feynman, *Lectures on Physics* (1963).





Sistema no lineal: Ecuaciones de Lorenz

Edward Lorenz (1963):
modelo simplificado de corrientes de convección en la atmósfera.



Ecuaciones de Lorenz:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y$$

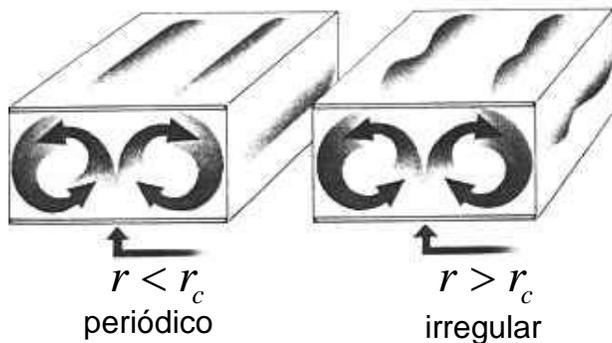
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Variables de estado del sistema:

x : velocidad de convección
 y : temperatura en dirección longitudinal
 z : temperatura en dirección vertical

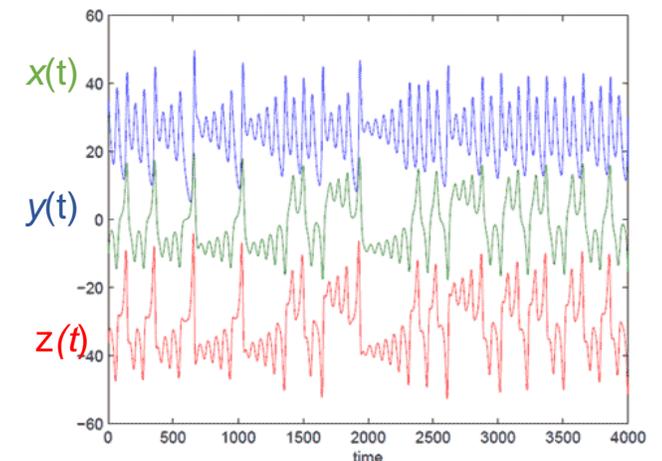
Parámetros:

a : conductividad térmica
 b : factor geométrico
 r : número de Rayleigh



Solución numérica:
parámetros fijos, $r > r_c$,
dados valores iniciales $x(0), y(0), z(0)$

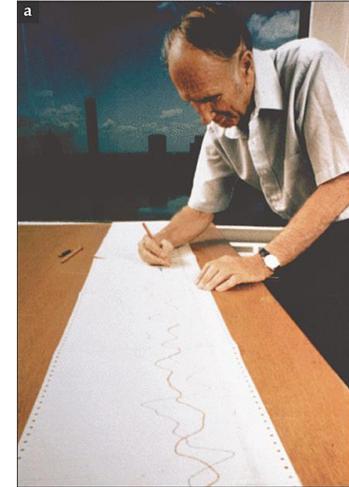
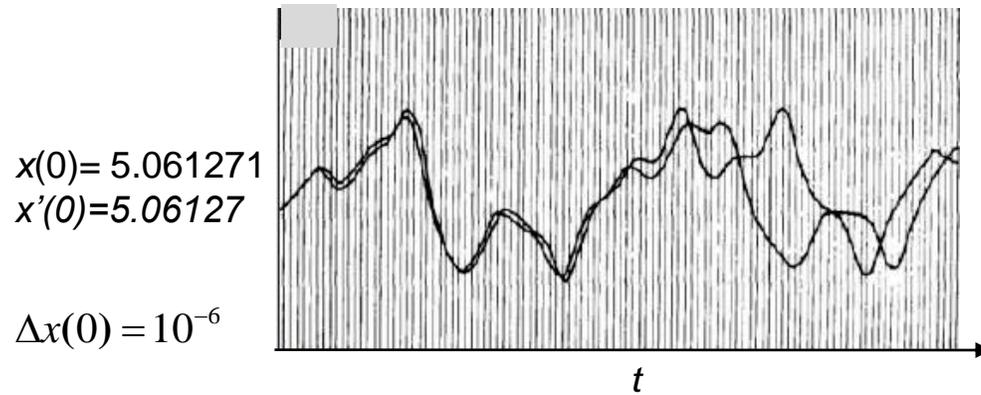
Computador Royal McBee





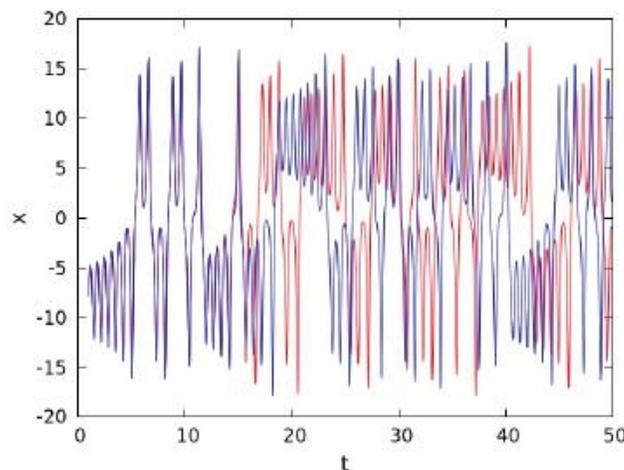
El efecto mariposa: descubrimiento del caos

Caos: sensibilidad extrema de la trayectoria ante pequeños cambios en las condiciones iniciales



E. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of Atmospheric Sciences **20**, 130 (1963).

- Perturbación inicial \rightarrow clima impredecible a largo plazo.
- Comportamiento genérico en sistemas de ecuaciones no lineales.



Condiciones iniciales de trayectorias
rojo y azul difieren en 10^{-12} :

“Does the flap of a butterfly’s wing set off a tornado in Texas?”
Titulo de una charla de Lorenz en una conferencia en 1972.

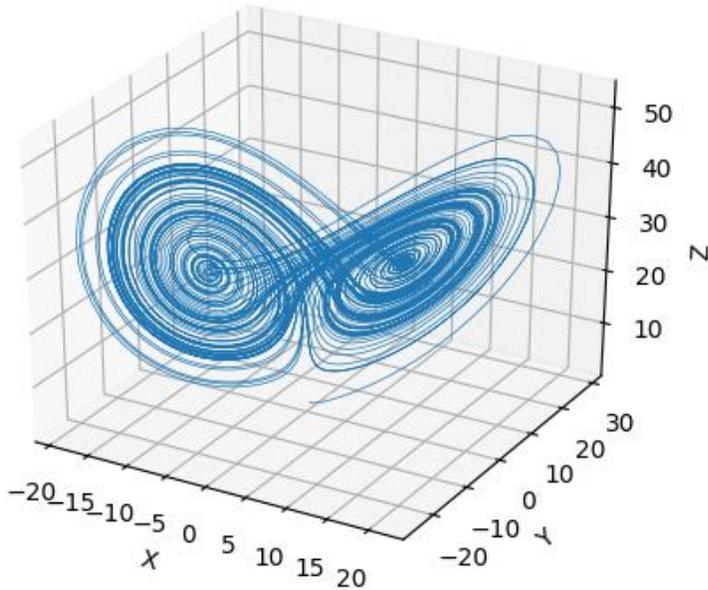
Tema literario, arte, cine, cultura.



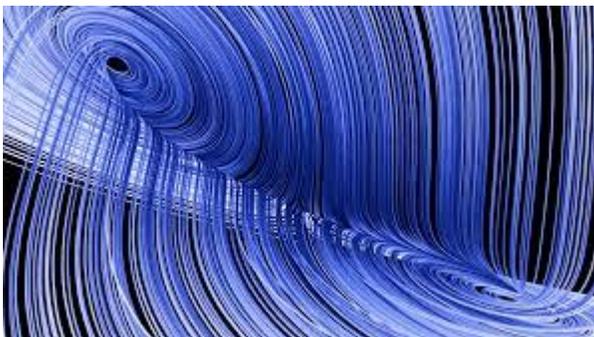


Atractor de Lorenz

Solución en espacio de variables x, y, z : “atractor extraño”

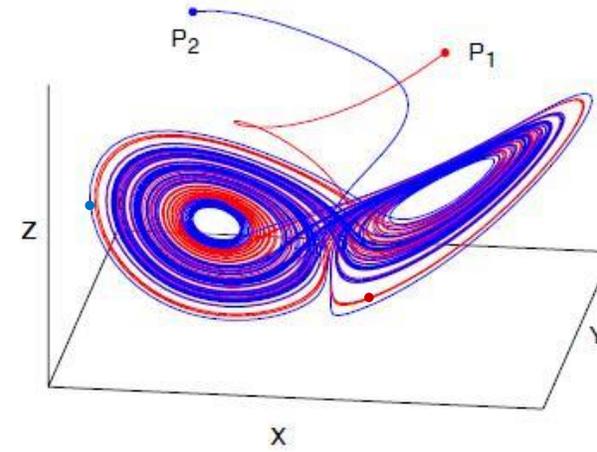


Magnificación



Atractor “extraño” posee geometría fractal.

Distintas condiciones iniciales recorren el atractor en forma diferente.



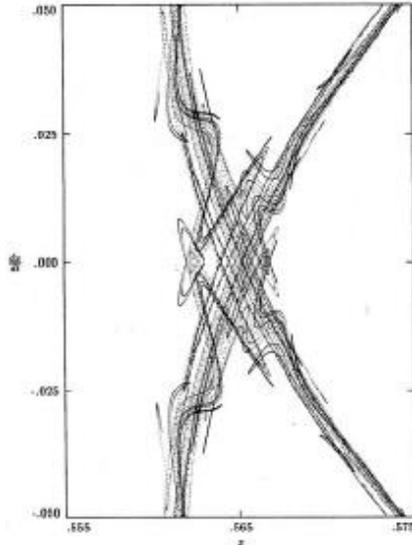
¡Lorenz pasó desapercibido por 12 años!

El nombre “caos” aparece por primera vez:

T. Y. Li, J. Yorke, *Period three implies chaos*,
Amer. Math. Monthly **82**, 985 (1975).



La increíble visión de Poincaré

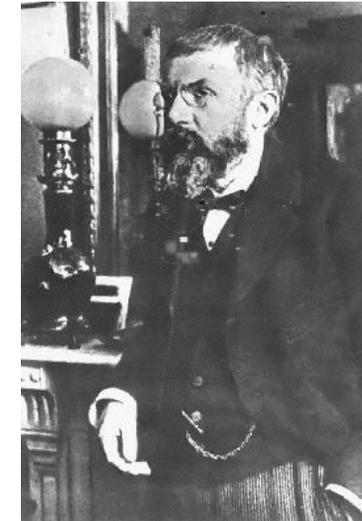


Henri Poincaré estudió la estabilidad del sistema solar; en particular el problema gravitacional de 3 cuerpos:

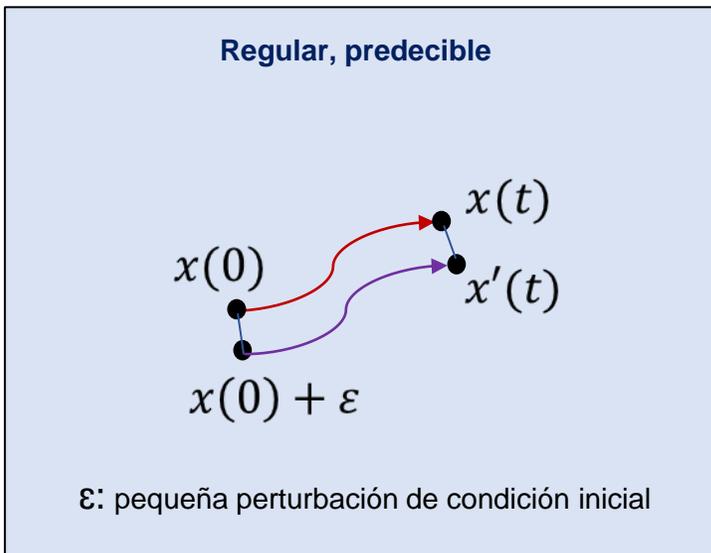
“Puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales conduzcan a grandes diferencias en los resultados finales. La predicción se vuelve imposible”.

“Cada curva nunca se intersecta a sí misma, sino que se pliega sobre sí misma de un modo muy intrincado. Uno se queda atónito frente a la complejidad de esta forma, la cual no intentaré siquiera dibujarla”.

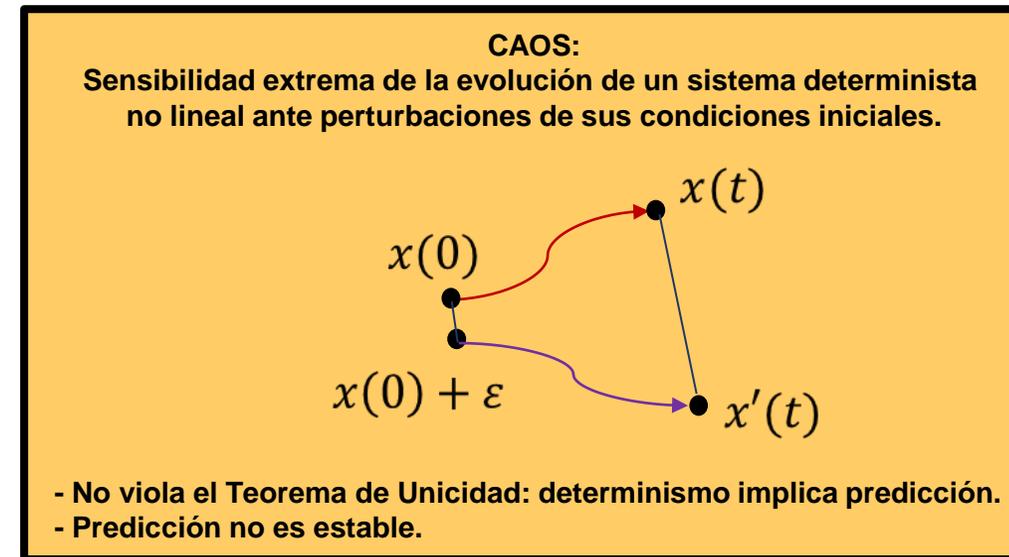
Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste (1903).



Comportamiento de sistema no lineal puede experimentar grandes cambios al variar un parámetro:



parámetro
↔

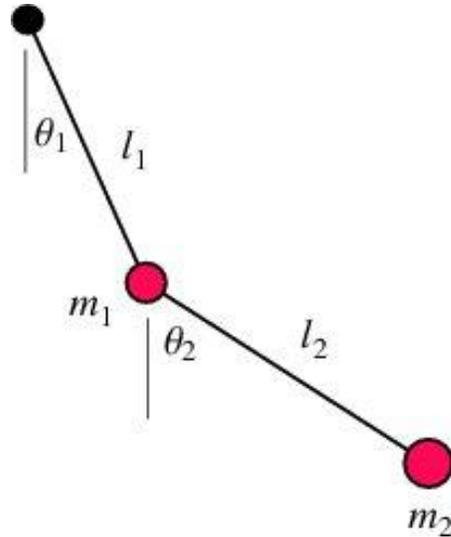




Caos en el péndulo doble

Péndulo doble: sistema determinista.

Leyes de Newton → Ecuaciones de movimiento para θ_1, θ_2 son no lineales:



$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin\theta_2 \cos\Delta\theta - \mu \sin\theta_1) - (l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos\Delta\theta) \sin\Delta\theta}{l_1 (\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

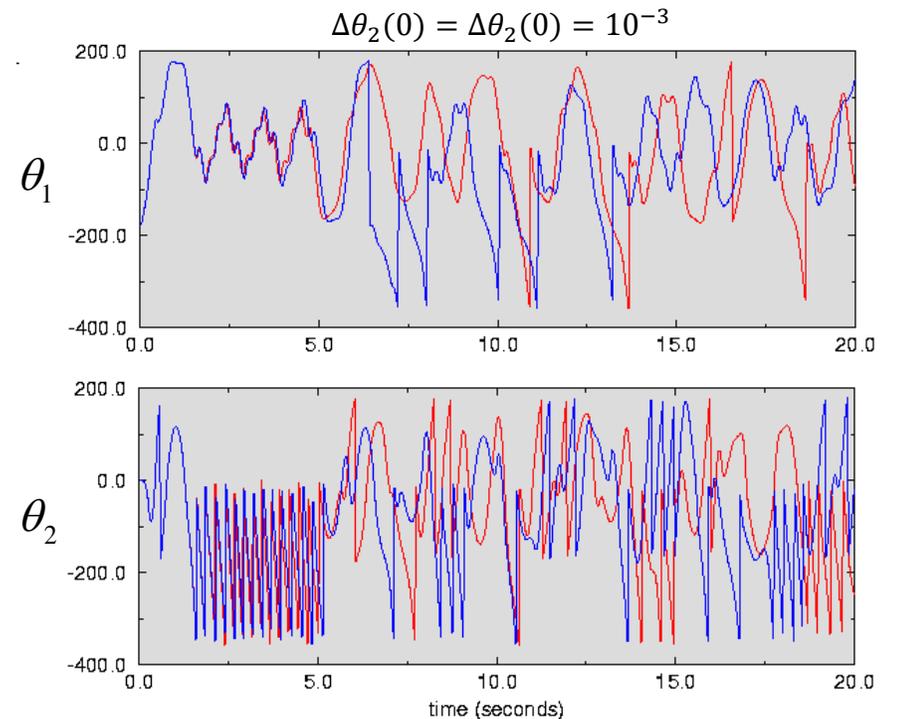
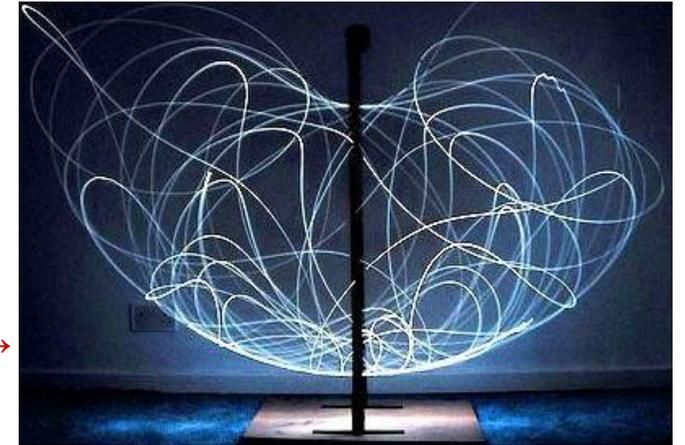
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\sin\theta_1 \cos\Delta\theta - \sin\theta_2) - (\mu l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos\Delta\theta) \sin\Delta\theta}{l_2 (\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

$$\mu = 1 + \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

Evolución de θ_1, θ_2 periódica, predecible para ángulos iniciales pequeños.

Trayectoria de m_2 para amplitudes iniciales grandes →



Caos: evolución de θ_1, θ_2 irregular, impredecible; *extremadamente sensible a cambios infinitesimales en condiciones iniciales.*



Sistemas dinámicos con tiempo discreto: mapas

Mapas o funciones iterativas son sistemas dinámicos deterministas:

$$x_{n+1} = f(x_n, r) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad r = \text{parámetro}$$

$$x_n, f \in \mathbb{R} \rightarrow \text{estados continuos, una variable.}$$

Secuencia de iterados para un valor r fijo: evolución con tiempo discreto.

$$\text{Dado } x_0 : \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = f^{(n)}(x_0)$$

Mapas aparecen en muchos contextos:

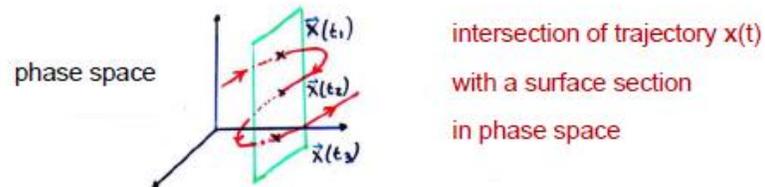
i) Series de datos experimentales en el tiempo.

ii) Integración numérica: $\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t))$

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = g(x(t)) \rightarrow \text{asumir } t = n\Delta t, n=1, 2, 3, \dots$$

$$\rightarrow x[(n+1)\Delta t] = g(x(n\Delta t)\Delta t + x(n\Delta t)) \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$

iii) Sección de Poincaré en espacio de fase de sistemas con estados continuos:



intersection of trajectory $x(t)$
with a surface section
in phase space

Serie temporal: $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_m)$

Ejemplo:

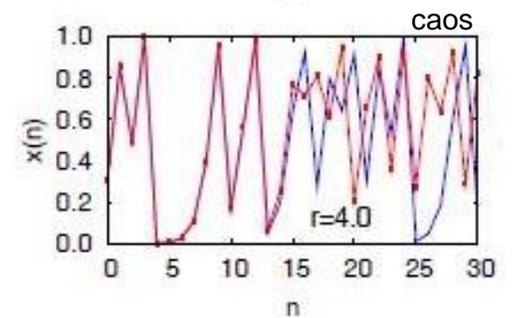
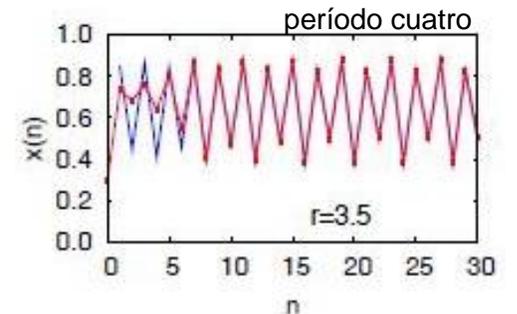
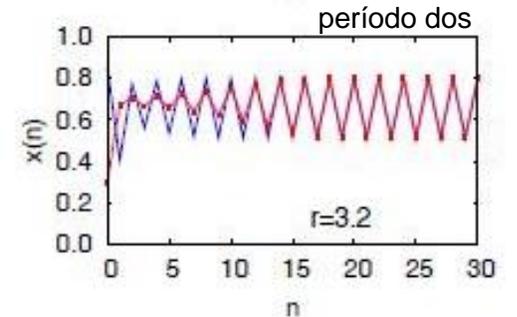
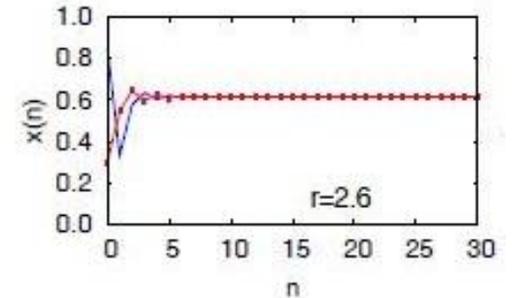
mapa logístico
(modelo de crecimiento de población con recursos limitados).

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_n \in [0, 1]$$

Condiciones iniciales
rojo y azul diferentes

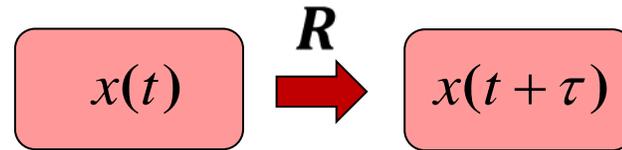
Caos: evolución irregular, extremadamente sensible a pequeños cambios en condiciones iniciales rojo y azul \rightarrow falta de predicción.





Resumen

Sistema dinámico determinista:



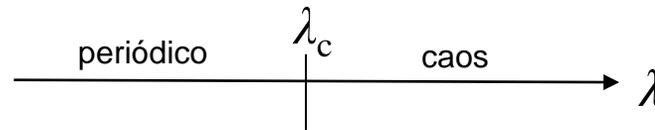
Dado $x(0)$, evolución está determinada para $t > 0$.

R : ecuaciones diferenciales, funciones, mapas, algoritmo, instrucciones. t continuo, discreto. R puede depender de parámetros λ .

R $\left\{ \begin{array}{l} \text{lineal} \rightarrow \text{evolución regular, periódico, punto fijo, predecible, solución analítica (en general).} \\ \text{no lineal} \rightarrow \text{evolución puede ser irregular, impredecible, caótico (sensible a pequeños cambios en condiciones iniciales).} \end{array} \right.$

Propiedades de sistemas no lineales:

1) Comportamientos dinámicos distintos al variar λ (bifurcaciones). Puede existir valor crítico λ_c para transición orden-caos.



2) $\lambda > \lambda_c$ comportamiento caótico.

- No linealidad: condición necesaria, pero no suficiente para caos.
- Dimensión espacio de fase > 2 para caos en sistemas con tiempo continuo.



<http://laconga.redclara.net>



contacto@laconga.redclara.net



lacongaphysics



Latin American alliance for
Capacity buildiNG in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el
programa Erasmus+
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.