

Módulo de Instrumentación 2023

# Clase 22: Límites de la predicción

Mario Cosenza



Latin American alliance for  
Capacity building in Advanced physics

LA-CoNGA physics



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea



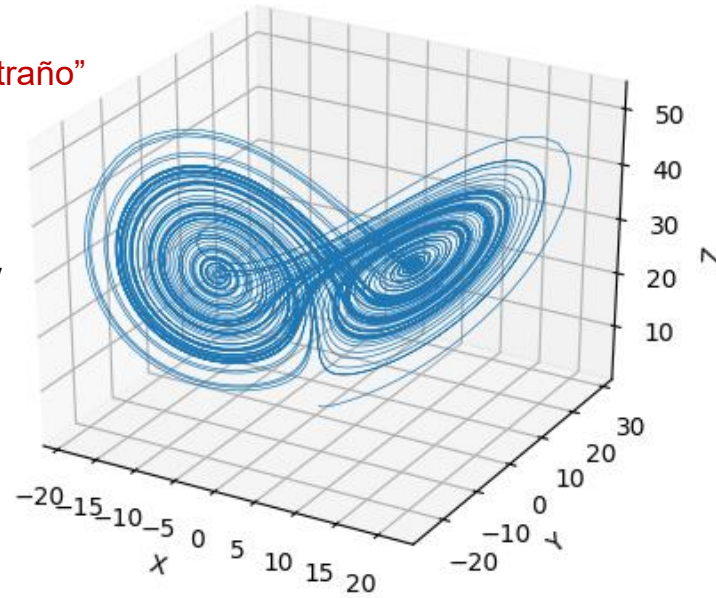


# Atractores extraños de sistemas caóticos

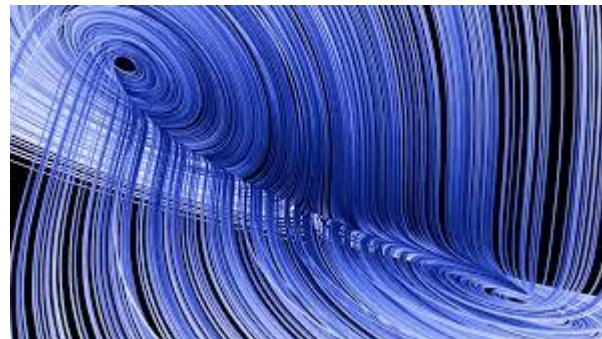
Solución  $\mathbf{x}(t)=((x(t), y(t), z(t)))$  en espacio de fase

atractor "extraño"

$a = 10$   
 $r = 28$   
 $b = 2.67$



Magnificación



Ecs. Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ay$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y$$

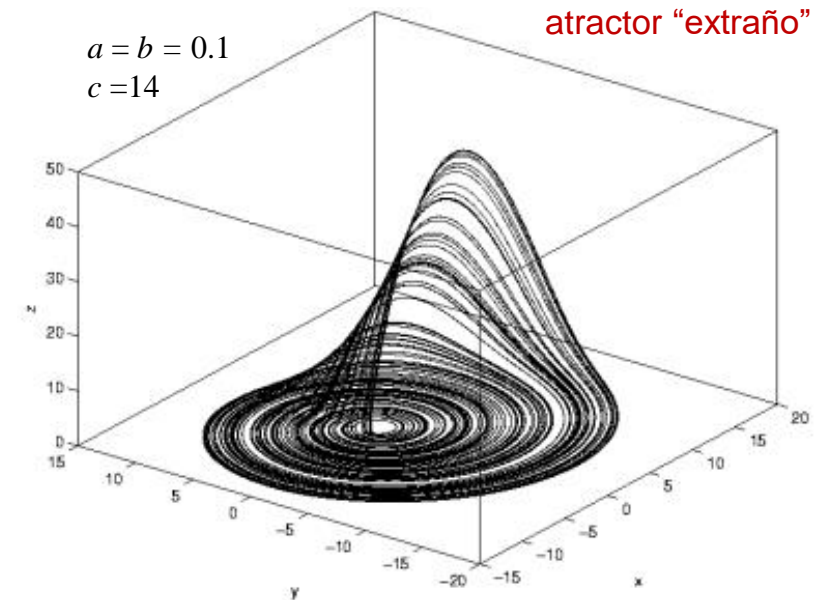
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Ecs. Rössler

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z(x - c)$$



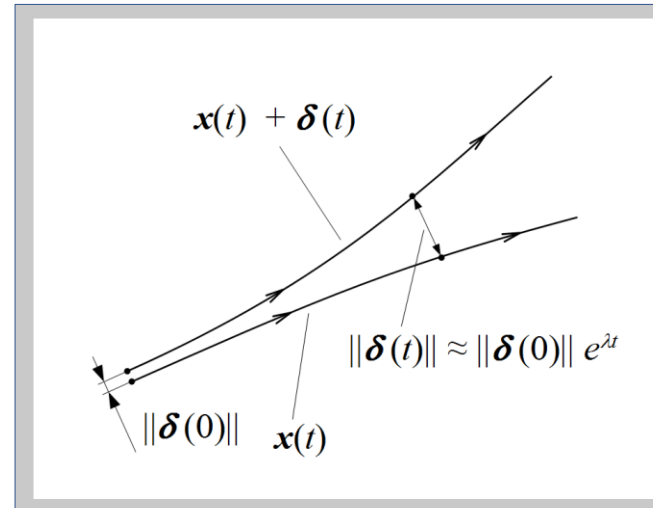
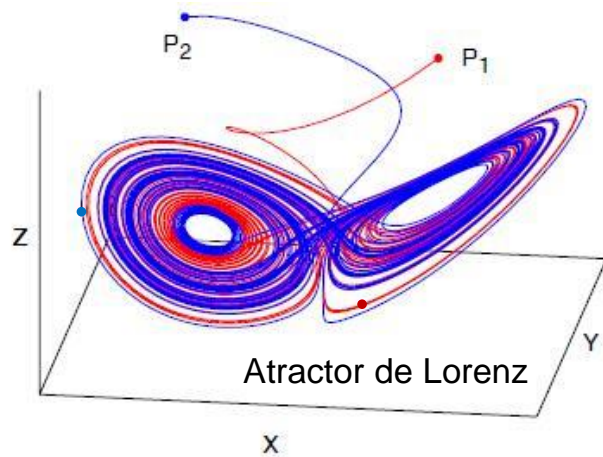
$a = b = 0.1$   
 $c = 14$

Atractor "extraño" posee *geometría fractal* (estructuras recurrentes bajo cambio de escala).



# Separación exponencial de las trayectorias

Distintas condiciones iniciales se separan y recorren el atractor en forma diferente.



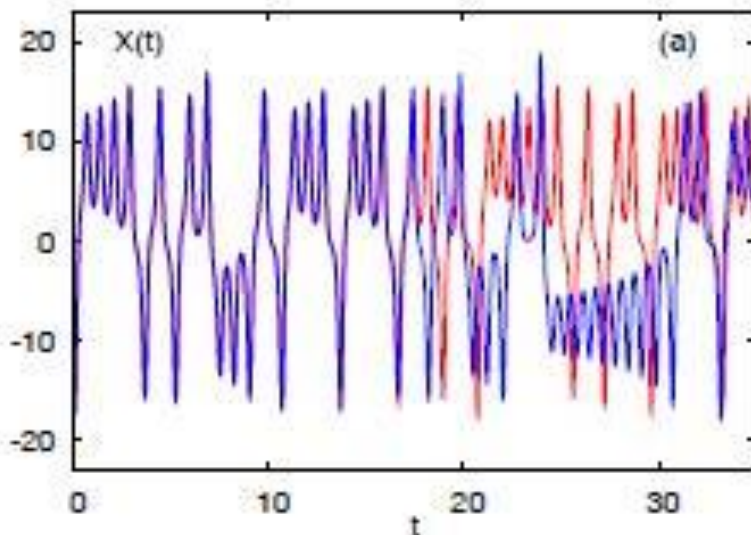
Separación crece exponencialmente:

$$\delta(t) \propto e^{\lambda t}$$

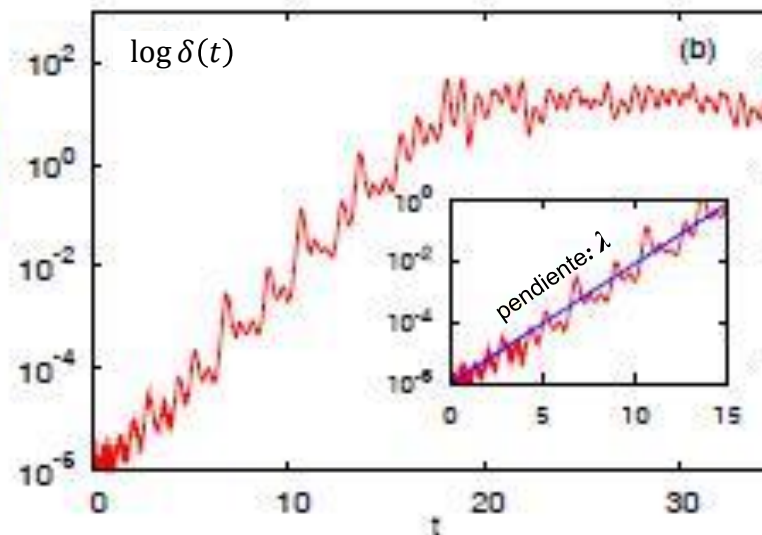
hasta alcanzar el tamaño del atractor.  
Separación varía en el tiempo.  
En promedio para tiempos largos, separación aumenta:  $\lambda > 0$ .

$\lambda$  : Exponente de Lyapunov.

Condiciones iniciales  $P_1 \approx P_2$   $\delta(0)=10^{-6}$



semilog graph  $\delta(t)$  vs. t



**Exponente de Lyapunov**

$\lambda > 0$ : caótico.

$\lambda < 0$ : periódico o punto fijo.

$1/\lambda$  : horizonte de predicción,  
tiempo de predictibilidad





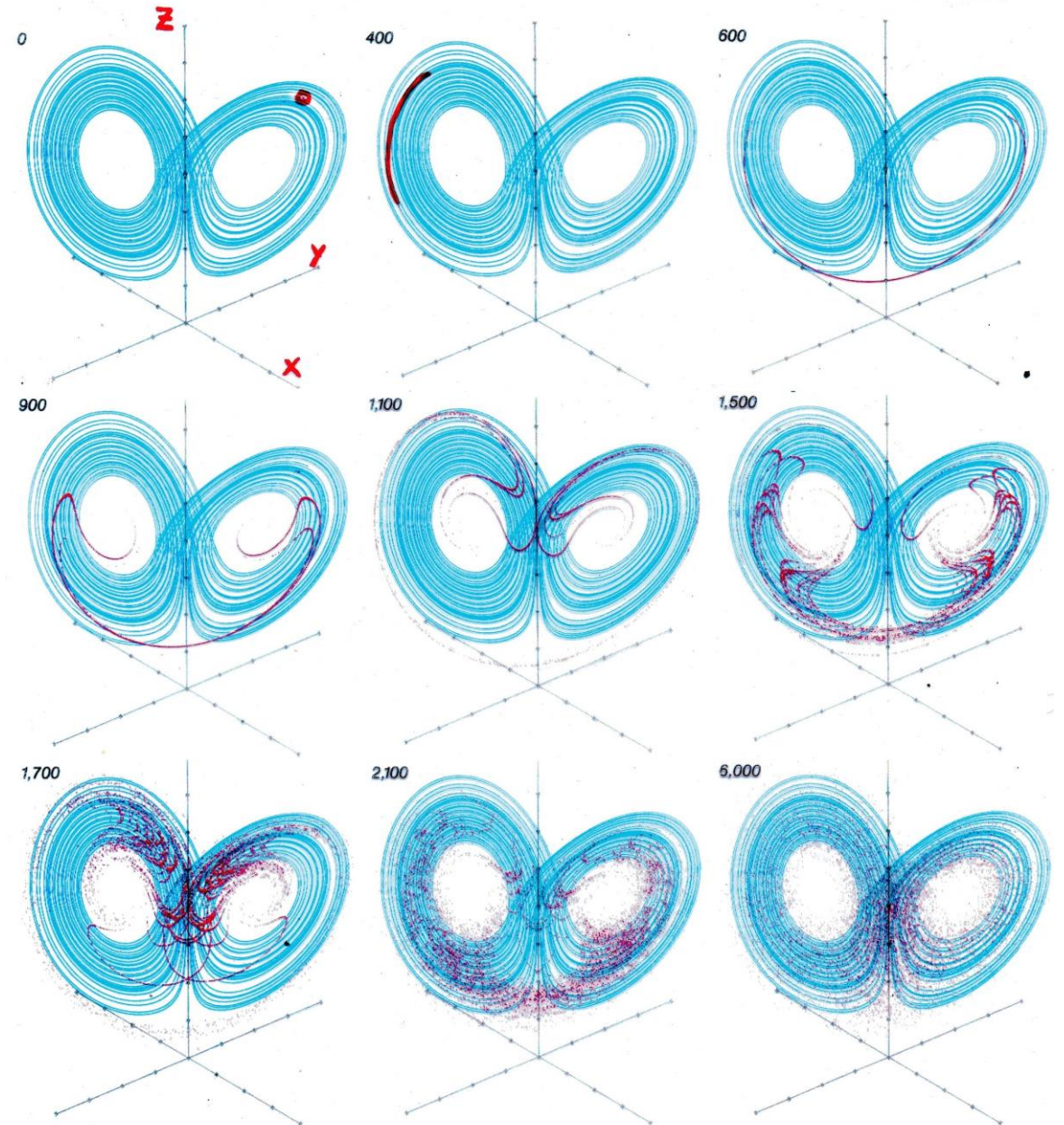
# Expansión y plegamiento

## Atractor de Lorenz

- Ensemble (volumen) de condiciones iniciales

Imágenes de la evolución de trayectorias sobre el atractor para distintos tiempos

Además de separación de trayectorias, ocurre *plegamiento*; trayectorias se distribuyen sobre el atractor formando líneas y estructuras a escalas cada vez más pequeñas, sin intersección. (estructura geométrica fractal)  
→ *Predicción imposible después de cierto tiempo.*





# Sistemas dinámicos con tiempo discreto: mapas

**Mapas o funciones iterativas** son sistemas dinámicos deterministas:

$$x_{n+1} = f(x_n, r) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad r = \text{parámetro}$$

$$x_n, f \in \mathbb{R} \rightarrow \text{estados continuos, una variable.}$$

Secuencia de iterados  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  para un valor  $r$  fijo: evolución con tiempo discreto.

$$x_0 \rightarrow x_1 = f(x_0) \rightarrow x_2 = f(x_1) \rightarrow x_3 = f(x_2) \dots \Rightarrow x_n = f^{(n)}(x_0)$$

Mapas aparecen en muchos contextos:

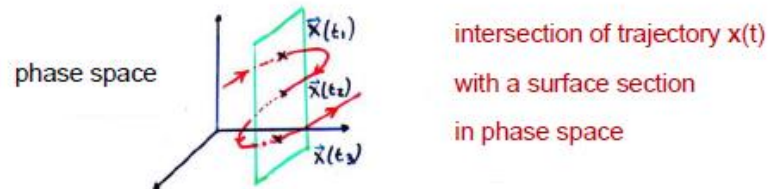
i) Series de datos experimentales en el tiempo.

ii) Integración numérica:  $\frac{dx(t)}{dt} = g(x(t))$

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = g(x(t)) \rightarrow \text{asumir } t = n\Delta t, n=1, 2, 3, \dots$$

$$\rightarrow x[(n+1)\Delta t] = g(x(n\Delta t)\Delta t + x(n\Delta t)) \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$$

iii) Sección de Poincaré en espacio de fase de sistemas con estados continuos:



intersection of trajectory  $x(t)$   
with a surface section  
in phase space

Serie temporal:  $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_m)$

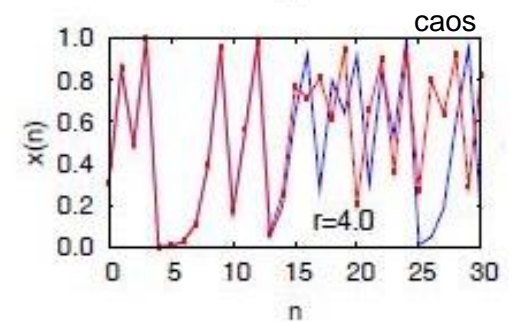
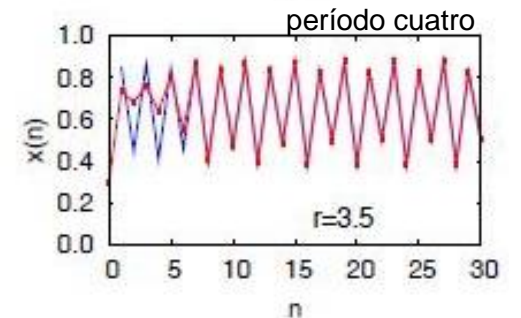
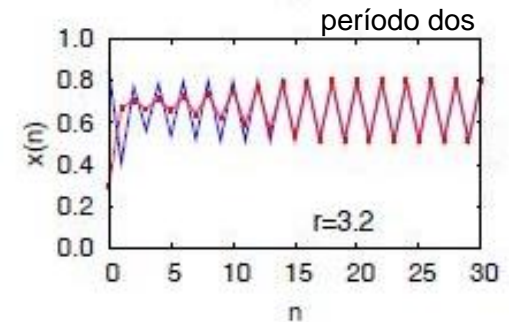
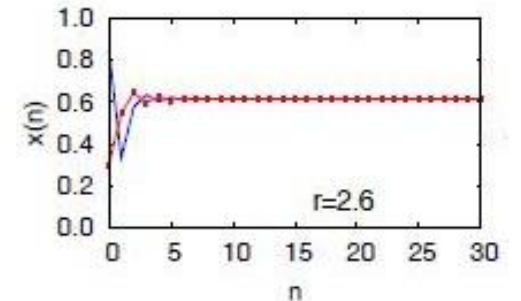
**Ejemplo:**

mapa logístico  
(modelo de crecimiento de población con recursos limitados).

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_n \in [0, 1]$$

Condiciones iniciales  
rojo y azul diferentes



**Caos:** evolución irregular, extremadamente sensible a pequeños cambios  $\Delta x_0$  en condiciones iniciales rojo y azul  $\rightarrow$  falta de predicción.

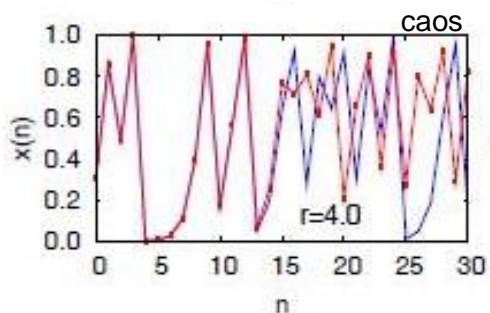
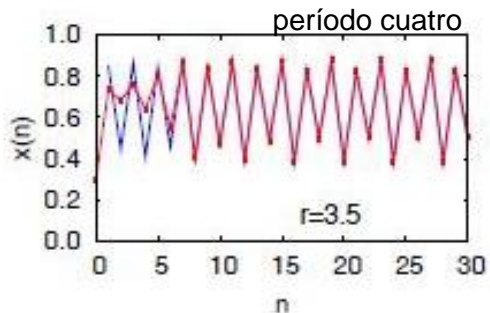
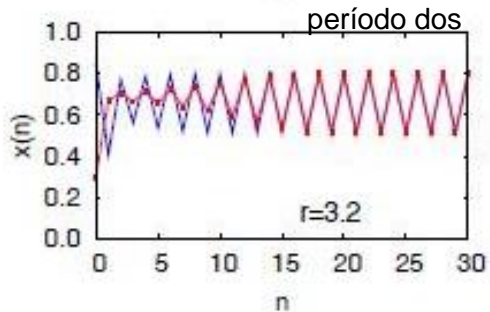
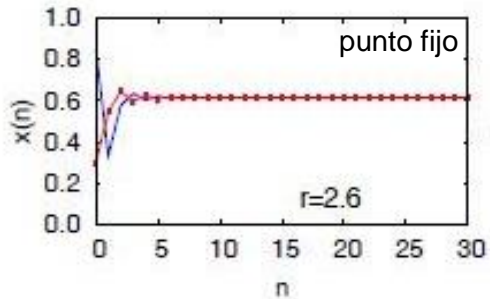


# Dependencia de parámetros: diagrama de bifurcación

Comportamiento dinámico del sistema depende de parámetros.

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1-x_n) \quad x_n \in [0,1] \quad r = \text{parámetro}$$

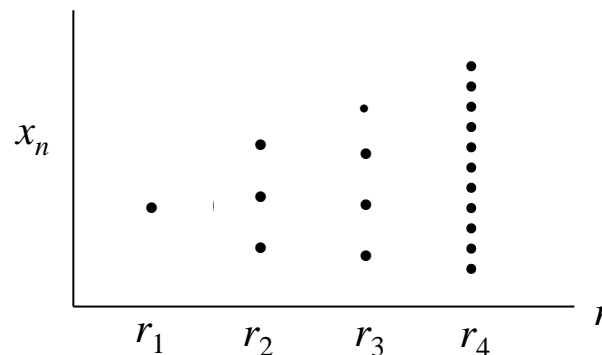
Secuencia de iterados (órbita) para un valor  $r$  fijo:  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$   $n$  grande



**Diagrama de bifurcación:** gráfico de la órbita asintótica en función de  $r$ .

Algoritmo:

1. Dado  $r$ , obtener órbita a partir de  $x_0$ :  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$
2. Descartar  $m$  puntos transitorios  $\rightarrow$  órbita asintótica para  $r$ :  $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$
3. Para sucesivos valores  $r$ , obtener  $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$
4. Graficar  $\{x_{m+1}, \dots, x_n\}$  vs.  $r$ .



$n-m$  puntos para cada  $r$ .

$r_1$ : todos los puntos son iguales  $\rightarrow$  punto fijo.

$r_2$ : periodo 3.  $r_3$ : periodo 4.

$r_4$ : caos (puntos no se repiten).





# Diagramas de bifurcación: ejemplos

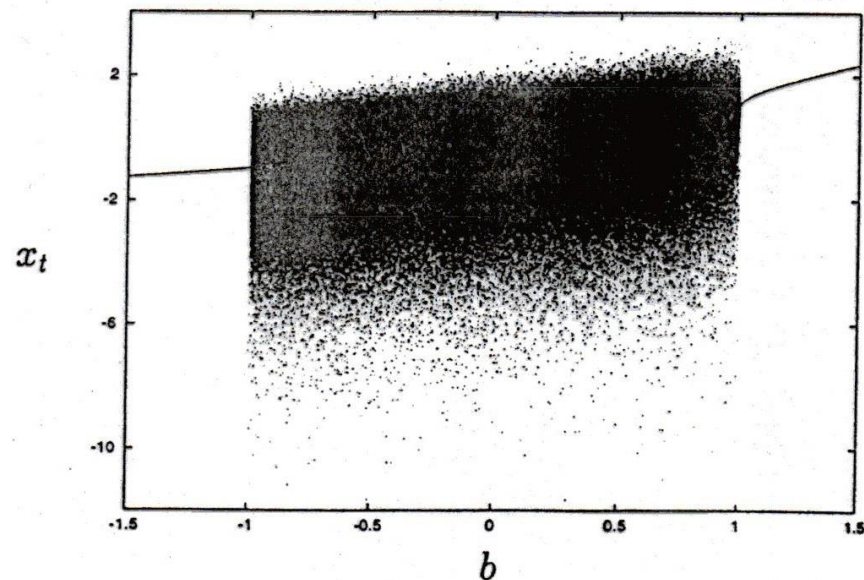
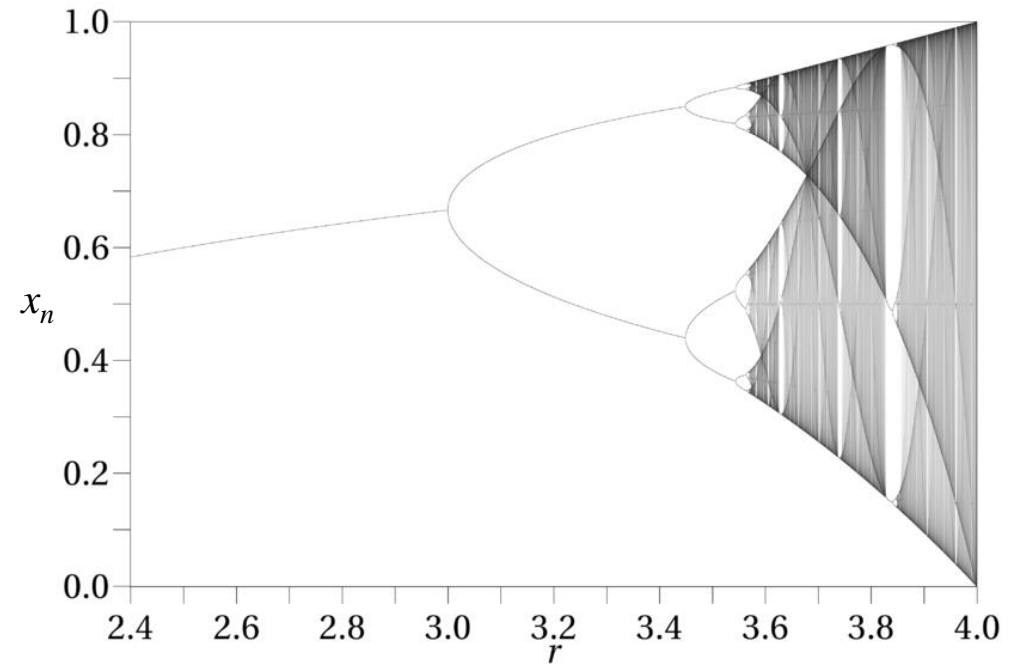
mapa logístico

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

**Bifurcación:** cambio de comportamiento dinámico al variar parámetro

secuencia de órbitas periódicas:  $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$  para  $r < 3.569 \dots$

caos y ventanas de periodicidad para  $r > 3.569 \dots$



mapa logarítmico

$$x_{n+1} = b + \ln |x_n|$$

caos para  $b \in [-1, 1]$

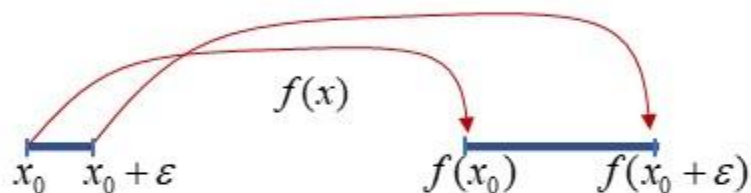


# Exponente de Lyapunov para mapas

$x_{n+1} = f(x_n, r)$  mapa unidimensional,  $r$  : parámetro

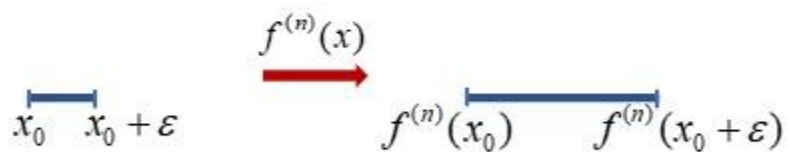
$x_0 \rightarrow x_1 = f(x_0) \rightarrow x_2 = f(x_1) \rightarrow x_3 = f(x_2) \rightarrow \dots \rightarrow x_n = f^{(n)}(x_0)$

órbita o secuencia :  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$



Error relativo después de una iteración

$$E_1 = \left| \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \right|$$



Error relativo después de  $n$  iteraciones

$$E_n = \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)}{\varepsilon} \right|$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_n = \left| \frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} \right| = \left| \frac{df(x_0)}{dx} \times \frac{df(x_1)}{dx} \times \frac{df(x_2)}{dx} \dots \times \frac{df(x_n)}{dx} \right|$$

$E_n < 1$  estable,  $E_n > 1$  inestable

Suponer separación exponencial,  $n$  grande:  $E_n \propto e^{\lambda n}$

$\lambda$  : exponente de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln E_n$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(x_0)}{dx} \times \frac{df(x_1)}{dx} \times \frac{df(x_2)}{dx} \dots \times \frac{df(x_n)}{dx} \right|$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

$\lambda < 0$  órbita estable, periódica

$\lambda > 0$  órbita inestable, caótica

Exponente de Lyapunov depende de parámetro  $r$

En la práctica, tomar  $x_0$  después de  $m$  transitorios,  $n$  suficientemente grande





# Cálculo del exponente de Lyapunov: ejemplos

1) Exponente de Lyapunov en función de  $r$ : mapa logístico  $f(x_n) = rx_n(1-x_n)$

$$\lambda(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i, r)|$$

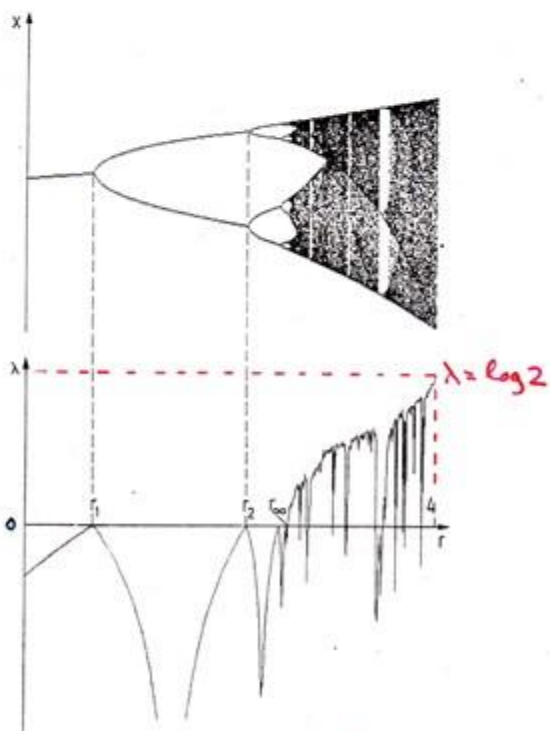
$$f'(x_n) = r(1-2x_n) \quad \lambda(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r(1-2x_i)|$$

Para  $r < r_\infty = 3.569 \dots \Rightarrow \lambda(r) < 0$ , órbita estable periódica

Para  $r > r_\infty = 3.569 \dots \Rightarrow \lambda(r) > 0$  caos,

"ventanas" periódicas  $\lambda(r) < 0$  entre el caos

diagrama bifurcación



exponente Lyapunov  
 $\lambda$  vs.  $r$

$m=10^3$  transitorios  
 $n=10^4$  para cada  $b, r$

2)  $\lambda$  en función de  $b$ : mapa  $f(x_n) = b + \ln |x_n|$

$$f'(x_n) = \frac{1}{|x_n|} \quad \lambda(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{1}{x_i} \right|$$

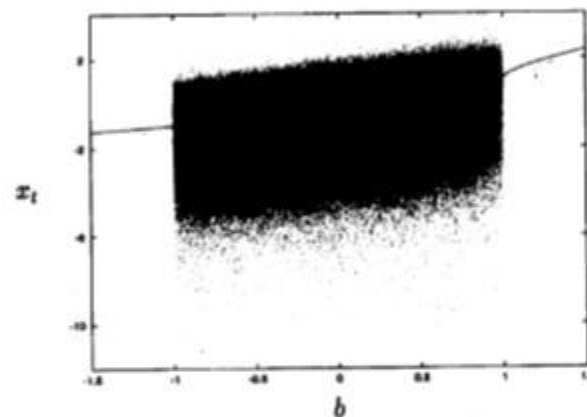
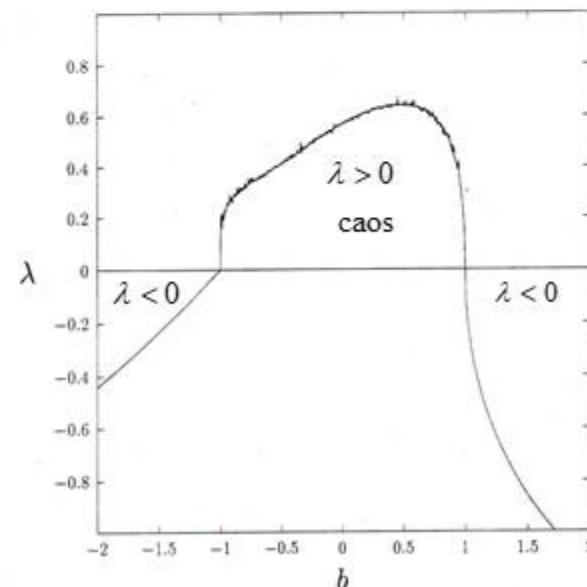


diagrama  
bifurcación



exponente  
Lyapunov  
 $\lambda$  vs.  $b$

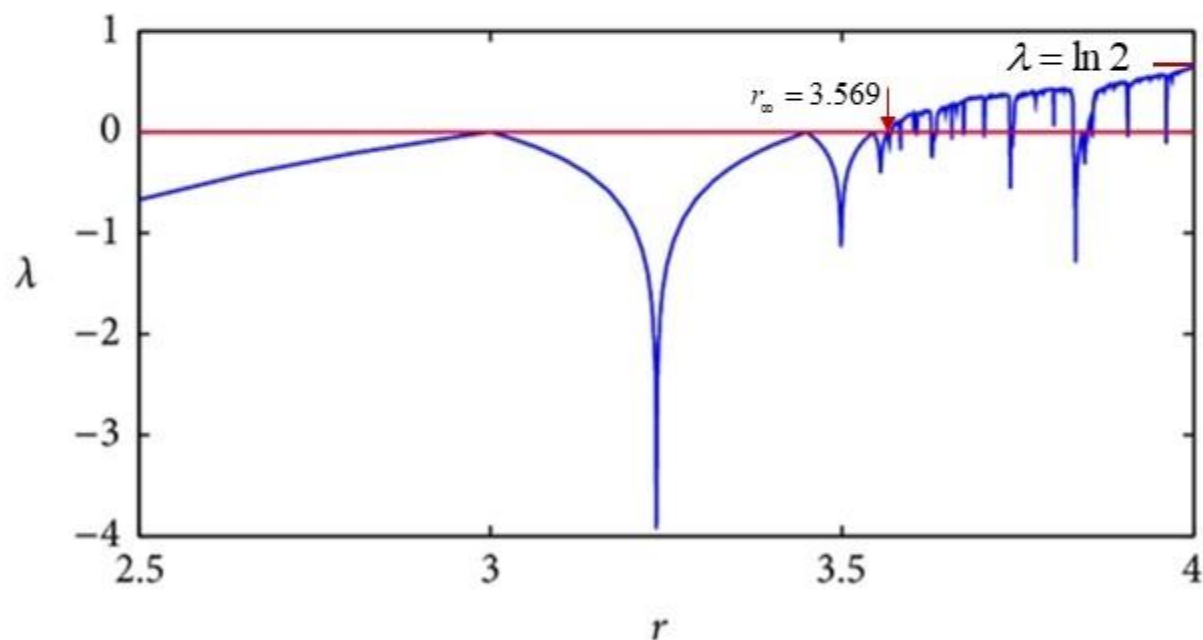


# Caos y límite de predicción: ejemplo

## Exponente de Lyapunov mapa

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n) \quad x_n \in [0,1]$$

Para  $r = 4 \rightarrow \lambda = \ln 2$



## Límite de predicción para $r = 4$ :

Suponer separación exponencial de trayectorias para  $n$  grande:

$$E_n = E_0 e^{\lambda n}$$

$E_0$ : separación inicial

¿En cuantas iteraciones  $n \rightarrow E_n \approx 1$ ? (tamaño del espacio)

$$n = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{E_n}{E_0} \right)$$

Supongamos  $E_0 = 10^{-6}$ :

$$n = \frac{1}{\ln 2} \times \ln \left( \frac{1}{10^{-6}} \right) = 6 \times \frac{\ln 10}{\ln 2} = 17.3$$

Predicción imposible para  $n > 17$

→ horizonte de predicción para  $r=4$



<http://laconga.redclara.net>



[contacto@laconga.redclara.net](mailto:contacto@laconga.redclara.net)



lacongaphysics



Latin American alliance for  
Capacity buildiNG in Advanced physics

**LA-CoNGA physics**



Cofinanciado por el  
programa Erasmus+  
de la Unión Europea

El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.